

SAMOBUZENÉ KMITY

V OBRÁBĚCÍCH
STROJÍCH

J. TLUSTÝ - L. ŠPAČEK

NAKLADATELSTVÍ ČESKOSLOVENSKÉ AKADEMIE VĚD

ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

Vědecký redaktor Ing. Dr. Přemysl Breník

ING. JIŘÍ TLUSTÝ

laureát státní ceny

SAMOBUZENÉ KMITY V OBRÁBĚCÍCH STROJÍCH

Dodatek:

RNDr. LADISLAV ŠPAČEK

laureát státní ceny

THEORIE POLOHOVÉ VAZBY
PRO SYSTÉM O VÍCE STUPNÍCH VOLNOSTI

PRAHA 1954

NAKLADATELSTVÍ ČESKOSLOVENSKÉ AKADEMIE VĚD

Předmluva

Kapitola I. Úvod

| | |
|---|----|
| 1. Zpřesnění názvu knihy | 13 |
| 2. O pojmu samobuzených kmitů všeobecně | 13 |
| 3. Samobuzené kmity v obráběcích strojích | 20 |
| 4. Cizí práce na řešení problému samobuzených kmitů vznikajících při obrábění | 24 |

Kapitola II. Samobuzené kmitání za různých podmínek obrábění

| | |
|--|----|
| 5. Cizí práce | 26 |
| 6. Metodika zkoušek | 34 |
| 7. Zkoušky na soustruhu | 40 |
| 8. Zkoušky čelního frézování rychlořezným nástrojem na vodorovné frézce | 44 |
| 9. Zkoušky frézování frézovacími hlavami s nástroji ze slinutých karbidů | 51 |
| 10. Zkoušky na jednostranově hoblovcích | 54 |
| 11. Menší zkoušky na různých strojích | 57 |
| a) Na svislé obrážečce HOV 63 | 57 |
| b) Na vodorovné obrážečce VOB 600 | 59 |
| c) Zkoušky prototypů řady odvalovacích frézek | 59 |
| d) Soustružení otvorů na soustruhu a vyvrtávání otvorů na vodorovných vyvrtávacích | 60 |
| 12. Souhrn vlivu jednotlivých podmínek na vznik samobuzených kmitů při obrábění | 61 |
| a) Hlavní znaky kmitání vznikajícího při obrábění | 61 |
| b) Vliv vlastností stroje na vznik samobuzených kmitů | 62 |
| c) Vliv řezných podmínek na vznik samobuzených kmitů | 63 |
| d) Veličina charakterisující celý souhrn řezných podmínek | 65 |

Kapitola III. Škodlivost samobuzených kmitů vznikajících při obrábění

| | |
|--|----|
| 13. Základní hlediska | 70 |
| 14. Hodnoty zvýšení namáhání v některých případech | 71 |
| 15. Zhodnocení škodlivosti samobuzených kmitů | 80 |

Kapitola IV. Základní principy vzniku samobuzených kmitů při obrábění

| | |
|---|-----|
| 16. Cizí práce | 83 |
| 17. Předpoklady obecného principu vzniku samobuzených kmitů při obrábění | 87 |
| 18. Princip rezonančního kmitání, vynuceného vlnitostí povrchu, vzniklou při předchozí třísce | 91 |
| a) Vyjádření postupného rozkmitávání | 91 |
| b) Rovnice kmitání při n -té třísce | 94 |
| c) Podmínka nestability a podmínka stability | 97 |
| d) Stabilita systému různě směrově orientovaného | 103 |
| e) Závěr | 105 |



KNIHOVNA AV ČR

E 64 140



@9531028 15955/54

REV. 2001

REV. 1

| | |
|--|-----|
| 19. Princip polohové vazby — Kmitavý systém se dvěma na sebe kolnými pružinami s tlumením | 106 |
| a) Rovnice pohybu a její řešení | 106 |
| b) Význam kořenů charakteristické rovnice | 109 |
| c) Poměr amplitud a fázový vztah kmitů v obou hlavních směrech | 110 |
| d) Podmínka stability | 111 |
| e) Podmínky stability systému s velmi malým poměrným tlumením | 115 |
| f) Stabilita systému s tlumením určité velikosti | 122 |
| g) Útlum v poli stability | 128 |
| h) Stručný souhrn výsledků matematického vyšetření stability kmitavého systému se dvěma pružinami navzájem kolnými | 130 |
| 20. Princip polohové vazby pro kmitavý systém o dvou pružinách bez tlumení | 132 |
| a) Podmínka stability | 132 |
| b) Vliv směrové orientace a naladění na stabilitu | 135 |
| c) Koeficient narůstání a frekvence samobuzených kmitů | 137 |
| d) Poměr amplitud a fázový vztah kmitů v obou hlavních směrech | 140 |
| e) Systém s jednou pružinou jako základní prvek polohové vazby | 143 |
| f) Závěr | 145 |
| 21. Princip polohové vazby pro obecný systém o dvou stupních volnosti bez tlumení | 146 |
| a) Charakteristická rovnice pro případ obou stupňů volnosti na nástroji | 146 |
| b) Charakteristická rovnice pro jeden stupeň volnosti na nástroji a jeden na obrobku | 148 |
| c) Úprava charakteristické rovnice a podmínka stability | 150 |
| d) Rozbor podmínky stability | 151 |
| e) Zvláštní případy | 154 |
| f) Stručný souhrn výsledků matematického vyšetření systému o dvou stupních volnosti bez tlumení | 161 |
| 22. Experimentální ověření principu polohové vazby | 162 |
| a) Uspořádání experimentu | 162 |
| b) Hodnoty jednotlivých parametrů zkoušek | 166 |
| c) Výsledky zkoušek | 167 |
| 23. Základní principy vzniku samobuzených kmitů — souhrn | 197 |

Kapitola V. Vlastnosti některých kmitavých systémů obráběcích strojů

| | |
|--|-----|
| 24. Měřicí metody | 201 |
| 25. Frekvence vlastních kmitů, tlumení a tvar kmitání systému obrobku na soustruhu, upnutého na obou koncích | 211 |
| 26. Resonanční charakteristiky, tvary kmitání a tlumení různých soustruhů a různých obrobků | 220 |
| a) Stejný obrobek na různých soustruzích | 220 |
| b) Různé obrobky na soustruhu S 35 | 223 |
| c) Závěr pro řídicí systém obrobku upnutého na obou koncích na soustruhu | 226 |
| 27. Řídicí kmitavý systém obrobku upnutého letmo na soustruhu | 227 |
| a) Porovnání tuhosti a tlumení válcového obrobku upnutého letmo | 227 |
| b) Řídicí kmitavý systém pro krátké obrobky velkých průměrů | 228 |
| 28. Tlumení a tvar kmitání řídicího systému frézovací hlavy | 231 |
| 29. Závěr z měření tuhosti, tlumení a tvarů kmitání systémů obráběcího stroje | 240 |

Kapitola VI. Zkoušky vlivu směrové orientace řídicího systému obráběcího stroje na vznik samobuzeného kmitání

| | |
|--|-----|
| 30. Řídicí systém obrobku upnutého na obou koncích na soustruhu | 242 |
| a) Zvláštní vliv zpevnění pinoly na směrovou orientaci řídicího systému na soustruhu S 35 | 242 |
| b) Změna směrové orientace řídicího systému obrobku úpravou pinoly | 246 |
| c) Vliv směrové orientace řídicího systému soustruhu SU 50 na mezní podmínky při soustružení nástroji ze slinutých karbidů | 252 |
| d) Zhodnocení zkoušek | 260 |
| 31. Řídicí systém obrobku upnutého letmo na soustruhu | 261 |
| 32. Zkoušky vlivu směrové orientace systému nástroje na vznik samobuzených kmitů při frézování | 265 |
| 33. Zkoušky vyvrtáváním na vodorovné vyvrtávače | 269 |
| 34. Vliv směrové orientace řídicího systému na vznik samobuzených kmitů při soustružení otvorů | 276 |
| 35. Souhrn zkoušek vlivu směrové orientace řídicího systému na vznik samobuzených kmitů .. | 282 |

Kapitola VII. Závěr

| | |
|--|-----|
| 36. Souhrn jednotlivých poznatků | 286 |
| 37. Praktické využití získaných poznatků | 311 |
| a) Základní údaje kmitavého systému stroje | 311 |
| b) Způsob určení vhodné změny kmitavého systému | 316 |
| c) Souvislost konstrukce stroje s výslednými vlastnostmi jeho kmitavého systému .. | 326 |
| 38. Směrnice pro další práci | 341 |
| Seznam literatury | 342 |

Dodatek: Theorie polohové vazby pro systém o více stupních volnosti

| | |
|--|-----|
| Přehled označení | 345 |
| 1. Rovnice pro kmity obráběcího stroje | 347 |
| 2. Charakteristická rovnice | 349 |
| 3. Mezní rovnice | 353 |
| 4. Sestrojení diagramu pro tři stupně volnosti | 354 |
| 5. Tyč vetknutá do hmotného rámu | 360 |
| 6. Podružné stupně volnosti | 369 |
| 7. Vliv tlumení a pochyveného povrchu | 374 |
| Literatura | 378 |

Předložené pojednání obsahuje výsledky práce, která byla pod autorovým vedením ve Výzkumném ústavě obráběcích strojů a obrábění v Praze vykonána během několika let. Jejím cílem a konečným výsledkem bylo rozřešení problému samobuzeného kmitání, které vzniká při obrábění kovů na většině obráběcích strojů. Tento zjev je velmi škodlivý, neboť snižuje v značné míře možnost využití výkonu strojů a v řadě případů zhoršuje i při nepatrném výkonu obrábění nepřijatelným způsobem jakost obrobeného povrchu.

Vliv jednotlivých podmínek obrábění na vznik samobuzených kmitů byl do nedávna velmi málo zpracován. Souvislost mezi konstrukcí obráběcího stroje a vznikem samobuzeného kmitání prakticky nebyla zpracována vůbec. Princip a teorie samobuzeného kmitání, vznikajícího při obrábění, nebyly uspokojivým způsobem na jiném pracovišti rozřešeny. Nebyl tedy dán klíč k pochopení tohoto poměrně složitého zjevu, který se projevuje mnoha rozmanitými stránkami, a nebyly vytvořeny podmínky k tomu, aby byl zvládnut.

Průkopnické, široce založené práce, věnované řešení tohoto problému, provedli sovětské vědci A. J. Kaširin a A. P. Sokolovskij. Jejich výsledky měl autor k dispozici při začátku vlastní práce. V nich byla objasněna řada důležitých stránek problému a byl učiněn pokus o theoretické vysvětlení vzniku samobuzeného kmitání při obrábění. Při tom bylo použito stejného principu jako u systémů, na které působí třecí síla s negativní charakteristikou závislosti na kluzné rychlosti. Teorie byla vytvořena při zjednodušení na kmitavý systém s jedním stupněm volnosti a počítala s daným nelineárním procesem. Podobným způsobem později navrhl řešení problému též R. N. Arnold. I když se při naší práci ukázalo, že uvedené teorie nejsou konečným řešením a nevystihují podstatu zjevu, byly nám velmi cenným východiskem.

Během vlastní práce jsme se dále seznámili s důležitými pracemi L. K. Kučmy a G. A. Manžose, kteří velmi pěkně, systematicky a podrobně vyšetřili vliv řezných podmínek na vznik samobuzených kmitů při soustružení. Seznámili jsme se dále s prací I. S. Amosova, který velmi podrobně měřil kmitání při soustružení a ukázal, že výsledný relativní pohyb mezi nástrojem a obrobkem je nejméně dvojrozměrný a má zhruba tvar elipsy, superponované na rovnoměrný pohyb řeznou rychlostí. Tento výsledek se dobře shodoval s naším vlastním, mezitím získaným názorem. Podobné zjištění uveřejnil později též R. S. Hahn. Jmenovaní autoři však nepoužili zjištěné skutečnosti k odvození základního principu vzniku samobuzených kmitů při obrábění, který v této práci formulujeme jako princip „polohové vazby“. Teprve během tisku této knihy jsme četli článek H. W. Ly-sena, který také uvádí jako možnost vysvětlení vzniku samobuzených

kmitů, hodnou theoretického zpracování, křivkový relativní pohyb mezi nástrojem a obrobkem. Jeho zmínka je velmi stručná (srov. [12]) a o dalších výsledcích nejsme dosud zpraveni. Autor této publikace zveřejnil základy principu polohové vazby již dříve (srov. [13]).

Předložená práce obsahuje výsledky experimentů, theoretických prací a jejich ověření v jednotlivých základních etapách.

Nejprve byl systematicky sledován vliv jednotlivých řezných podmínek na vznik samobuzených kmitů při velké řadě zkoušek a měření různých případů obrábění na různých druzích obráběcích strojů a byly určovány další typické znaky tohoto zjevu. Pak byla kvantitativně vyjádřena škodlivost kmitání a znovu ověřena naléhavost řešení problému. V další etapě je navržen princip vzniku kmitání, založený na typických vlastnostech zjištěných v předchozích zkouškách. Princip je pak matematicky propracován. Základní teorie se od cizích předchozích liší zejména tím, že vychází z rovinného kmitání a vysvětluje vznik samobuzených kmitů při obrábění za předpokladu kmitavého systému stroje s nejméně dvěma stupni volnosti, že nemusí předpokládat určitou, ve skutečnosti nevýraznou závislost řezné síly na rychlosti kmitání a počítá pouze s výraznou, pro obrábění typickou závislostí řezné síly na tloušťce třísky.

Podrobné zpracování je umožněno linearisací zjevu, která je přípustná pro řešení základní otázky, za jakých podmínek vzniká samobuzené kmitání. Není při tom zpracována nepodstatná otázka amplitudy, na které se ustálí vzniklé kmitání.

Výsledky podrobného matematického zpracování teorie systému s dvěma stupni volnosti byly překvapující. Ukázaly základní souvislost samobuzeného kmitání se směrovou orientací a naladěním kmitavého systému a rozsáhlé možnosti jeho stabilisace. Teorie byla skvěle potvrzena zkouškami a měřením na modelu.

V další etapě byla vytvořena měřicí technika. Byly zjišťovány vlastnosti kmitavých systémů obráběcích strojů. V řadě zkoušek byla ověřena zásadní platnost teorie a možnosti stabilisace kmitavých systémů obráběcích strojů, a to mnohdy velmi jednoduchými konstrukčními zásahy.

Rozšířením teorie polohové vazby na kmitavé systémy s více stupni volnosti a praktickou úpravou konečného řešení byla vypracována obecná teorie samobuzených kmitů, vznikajících při obrábění. Byla zjištěna její shoda s veškerou experimentální zkušeností. Tím jsou nyní vytvořeny předpoklady pro výpočet odolnosti obráběcího stroje proti vzniku samobuzených kmitů na základě hodnot jeho jednotlivých tvarů vlastních kmitů.

I když teprve v dalším nabudeme zkušeností s praktickou aplikací dosažených výsledků, bylo rozhodnuto uveřejnit je již nyní. Tím se umožní jejich nejširší využití.

Řešení problému se zúčastnil celý kolektiv spolupracovníků. Z nich zejména dva zásadně přispěli k rozřešení. Ing. Miloš Poláček po prvé formuloval možnost vzniku samobuzeného kmitání na základě relativního elipsovitého pohybu ná-

stroje vůči obrobku tak, jak ji uvádíme v popisu obr. 69. Zúčastnil se dále značnou měrou na matematickém řešení principu polohové vazby systému se dvěma stupni volnosti. Dr. Ladislav Špaček provedl matematické rozšíření principu polohové vazby na systém s více stupni volnosti. Jeho významný podíl na výsledku lze dosti dobře oddělit. Jeho práce je v této knize uvedena zvlášť v Dodatku. Samostatné řešení výrazu pro kmitání při n -té třísce při postupném rozkmitávání (kap. IV, 18b) provedl Dr. Antonín Srovnal.

Autor je též velmi vděčen zesnulému zkušenému odborníku pro obráběcí stroje, vedoucímu konstruktéru Ing. V. Nouzákovi, za první popud k této práci a řediteli ústavu A. Kaňkovi za moudré usměrnění celé práce k praktickému cíli.

Autor děkuje technické sekci ČSAV, která se ujala vydání práce, a nakladatelství ČSAV, které ji s veškerou péčí v krátké době vydalo.

Autor.

ÚVOD

1. Zpřesnění názvu knihy

Při provozu obráběcích strojů se často setkáváme se škodlivým kmitáním. Jde buď o nucené kmity, nebo o samobuzené kmity. Samobuzené kmity v obráběcích strojích můžeme rozdělit na tři skupiny podle zdroje samobudící energie. Při pomalých posuvech vznikají u některých strojů samobuzené kmity (trhavý posuv), jejichž zdrojem je třecí proces — zvláštní charakter závislosti třecí síly na rychlosti klouzání. U kopírovacích systémů se zpětnou vazbou vznikají při vysoké citlivosti systému samobuzené kmity, jejichž zdrojem je na př. u hydraulických systémů zpoždění výchylky za silou, vyvolané pružností hydraulické části. Téměř u všech druhů obráběcích strojů se setkáme se samobuzenými kmity, jejichž zdroj je v samotném řezném procesu, v souvislosti velikosti řezné síly s relativním pohybem mezi nástrojem a obrobkem.

Tento posledně jmenovaný druh samobuzených kmitů je nejrozšířenější, nejškodlivější a nejsložitější a pouze jím se budeme v této knize zabývat. V tom smyslu je nutno zpřesnit název knihy. Krátký jednodušší název byl zvolen proto, že pod názvem samobuzených kmitů v obráběcích strojích se obvykle myslí právě ten druh, jehož zdrojem je řezný proces, zatím co ostatní druhy samobuzených kmitů se blíže označují. Tak i v dalším budeme mluvit krátce pouze o samobuzených kmitech.

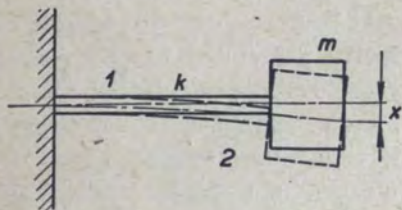
2. O pojmu samobuzených kmitů všeobecně

Řešení problému samobuzených kmitů je v dnešním stadiu vývoje obráběcích strojů jedním z nejdůležitějších úkolů, neboť tento zjev je hlavní překážkou v tom, aby se zvýšil výkon a přesnost obrábění kovů. Uvidíme v dalším, že jde o poměrně složitý zjev, projevující se ve velmi rozmanitých podmínkách. Uvidíme dále, že jeho podstatu lze vysvětlit na základě řešení kmitavého systému o dvou stupních volnosti s polohovou vazbou vyvolanou řeznou silou a že je nutno matematický popis rozšířit na systémy o více stupních volnosti. Pokládáme proto za užitečné zařadit předem do úvodu jednoduchý odstavec, v kterém se zmíníme o základních znacích, charakterisujících samobuzené kmitání vůbec. Činíme tak i proto, že nemáme u nás dosud žádného díla o mechanických kmitech a že zvláště se samobuzeným kmitáním je naše technická veřejnost málo seznámena. Omezíme se při tom na kmitavý systém o jednom stupni volnosti, i když

specificky náš vlastní problém samobuzených kmitů při obrábění se vztahuje k systému o nejméně dvou stupních volnosti.

Kmitavý systém o jednom stupni volnosti je tvořen hmotou m , připevněnou na pružině s tuhostí k (obr. 1). Tuhost pružiny je definována jako poměr mezi silou P , působící v místě těžiště hmoty směrem daného stupně volnosti, a výchylkou x , kterou tato síla vyvolá;

$$k = \frac{P}{x}.$$



Obr. 1.

Při vychýlení hmoty m z vodorovné polohy o hodnotu x_0 vzniká pohyb, popsaný silovou rovnicí

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (1)$$

kteřou řešíme návrhem

$$x = C \cdot e^{st}. \quad (2)$$

Obdržíme tak charakteristickou rovnici

$$mCs^2 e^{st} + kCe^{st} = 0,$$

kteřá platí v každém okamžiku pro jakoukoli hodnotu t . Její řešení je

$$s^2 = -\frac{k}{m},$$

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm j\omega. \quad (3)$$

Dosazením (3) do (1)

$$x = C_1 \cdot e^{j\omega t} + C_2 \cdot e^{-j\omega t}$$

a zavedením nových konstant A a B

$$x = A \cdot \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} + jB \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2},$$

$$x = A \cos \omega t + jB \sin \omega t.$$

Pro počáteční podmínku $t = 0, x = x_0$ obdržíme

$$A = x_0, \quad B = 0$$

a konečné řešení

$$x = x_0 \cos \omega t. \quad (4)$$

Toto řešení je všeobecně známo a vyjadřuje kmitavý harmonický pohyb s amplitudou x_0 a frekvencí

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

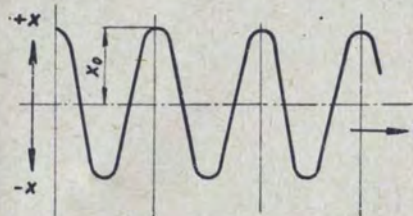
Jeho časové rozvinutí je graficky znázorněno na obr. 2.

Podrobné řešení jsme uvedli proto, že stejného postupu používáme dále i ve složitějších případech.

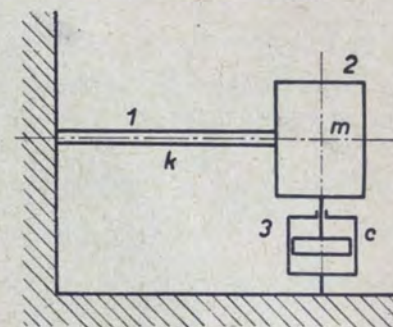
Uvedený harmonický pohyb nazýváme *vlastní kmitání*, a to v tomto případě vlastní kmitání netlumené. Kmitání se děje stále konstantní amplitudou. Energie systému je stálá. Její velikost obdržíme na př. jako velikost polohové energie pro okamžik $t = 0$

$$E = \frac{1}{2} kx_0^2. \quad (5)$$

Je tedy úměrná čtverci amplitudy kmitání.



Obr. 2.



Obr. 3.

Netlumené vlastní kmitání se ve skutečnosti nikdy nevyskytuje, neboť pohybu vždy odporuje tlumicí síla. Energie pohybu se maří tlumením a s časem se zmenšuje. Schematicky znázorníme jednoduchý kmitavý systém s tlumením na obr. 3, kde tlumení vyznačíme olejovým kataraktem. Nejjednodušší případ tlumených kmitů je takový, kdy tlumicí síla P_{tl} je úměrná rychlosti pohybu

$$P_{tl} = c \cdot \dot{x}. \quad (6)$$

Tlumení přesně této formy se nikdy nevyskytuje a nejvíce se mu blíží právě tlumení, které vzniká při pohybu desky v kapalině.

Přesto, že ve většině případů (též u součástí obráběcích strojů) má matematický výraz pro tlumicí sílu jiný tvar, poskytuje řešení při použití tvaru (6), který vede k lineární diferenciální rovnici, velmi cenný názor na praktické případy kmitání systémů s tlumením.

Pohybová rovnice vlastních kmitů kmitavého systému o jednom stupni volnosti s lineárním tlumením zní

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad (7)$$

Její řešení, analogické s řešením rovnice (1), při použití stejného návrhu

$$x = e^{st}$$

vede k charakteristické rovnici

$$ms^2 + c \cdot s + k = 0$$

s kořeny

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm j \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = -\lambda \pm j\omega.$$

V případě $\frac{k}{m} < \frac{c^2}{4m^2}$ jsou obě hodnoty s reálné a pro rovnici (7) obdržíme řešení

$$x = C_1 \cdot e^{s_1 t} + C_2 \cdot e^{s_2 t}, \quad (8)$$

kde $s_1 < 0, s_2 < 0$.

V tomto případě značí tedy (8) součet dvou exponenciálních křivek se záporným exponentem. Výsledný pohyb je *aperiodický*.

V případě $\frac{k}{m} > \frac{c^2}{4m^2}$ jsou hodnoty s komplexní sdružené a řešení

$$x = e^{-\lambda t} (C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t})$$

převědeme na

$$x = e^{-\lambda t} (A \cos \omega t + jB \sin \omega t).$$

Pro počáteční podmínky $x = x_0, t = t_0$ je

$$A = x_0, \quad B = -j \frac{\lambda}{\omega} \cdot x_0$$

a konečné řešení rovnice (7)

$$x = e^{-\lambda t} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega} \cdot x_0 \sin \omega t \right) \quad (9)$$

je *tlumený kmitavý pohyb* s frekvencí

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

a při časovém rozvinutí je obálka jeho krajních poloh exponenciála $x_0 \cdot e^{-\lambda t}$ (viz obr. 4).

Mezní případ aperiodického pohybu nastává pro

$$\omega^2 = 0$$

a hodnotu tlumicí konstanty

$$c = 2\sqrt{km} = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = c_k, \quad (9a)$$

kde c_k nazýváme kritickým tlumením.

Uvedli jsme, že netlumené kmitání vlastní ve skutečnosti nikdy neexistuje. Tlumené vlastní kmitání ve skutečnosti existuje. Je to však zjev přechodný, většinou velmi krátce trvající, a proto nemá v technické praxi velký význam.

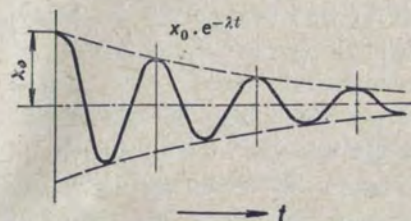
S kmitáním, které má ustálenou trvající amplitudu, se setkáváme v případě *nucených kmitů*. Nucené kmity vznikají tehdy, jestliže na daný kmitavý systém

působí periodicky proměnlivá síla. Předpokládejme pro jednoduchost sinusovou vynucující sílu $P = P_0 \sin \nu t$. Schematicky viz obr. 5. Sílová rovnice daného případu je

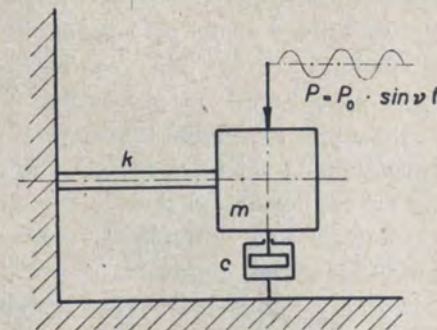
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \sin \nu t. \quad (10)$$

Její obecný integrál je shodný s rovnicí (8) a vyjadřuje opět rychle zanikající tlumené vlastní kmity. Partikulární integrál obdržíme návrhem

$$x = X \sin \nu t + Y \cos \nu t$$



Obr. 4.



Obr. 5.

Dosazením do (10) a řešením pro X a Y obdržíme

$$x = \frac{P_0}{(k - m\nu^2)^2 + c^2\nu^2} [(k - m\nu^2) \sin \nu t - c^2\nu^2 \cdot \cos \nu t].$$

Z výsledku je patrné, že vznikne kmitání s konstantní amplitudou a s frekvencí ν . Základním charakteristickým znakem nucených kmitů je, že se dějí frekvencí rovnou frekvenci vynucující síly.

V mnoha případech ve skutečnosti pozorujeme kmitání, jehož amplituda narůstá do určité hodnoty, na které se pak udržuje, a přesto nejde o nucené kmitání. Chybí tu periodicky proměnlivá síla té frekvence, kterou daný systém kmitá. Zjišťujeme naopak, že systém kmitá frekvencí velmi blízkou frekvenci vlastních kmitů.

Takové kmity se na př. často vyskytují v kmitavých systémech, u kterých je pohyb hmoty spojen se suchým třením. Jedním z nejnázornějších příkladů je kmitání struny na houslích při tahu smyčcem. Struna vydává tón téměř shodné frekvence s tónem, který vznikne při brnknutí o strunu. Při brnknutí vzniknou vlastní tlumené kmity. Při tahu smyčcem vzniká kmitání ustálené amplitudy. Nejde tu zřejmě o nucené kmitání, neboť na strunu nepůsobí periodicky proměnlivá vnější síla dané frekvence. Frekvence těchto ustálených kmitů se shoduje s frekvencí vlastních kmitů.

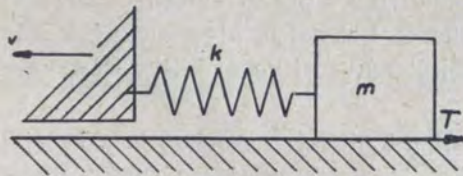
Protože daný kmitavý systém je tlumený, spotřebovává se při jeho kmitání tlumením energie. Protože amplituda kmitů neubývá, je zřejmé, že energie systé-

mu neubývá. Je tedy zřejmé, že systém načerpává energii z vnějšku — z pohybu smyčce, na úhradu energie ztracené tlumením.

Smyčec působí na strunu třecí silou. Velikost této třecí síly je závislá na relativní rychlosti mezi smyčcem a strunou tak, že při větší smykové rychlosti je třecí síla menší. V jedné polovině kmitu se pohybuje struna stejným směrem jako smyčec, v druhé polovině kmitu se pohybuje opačným směrem. V první polovině kmitu je relativní rychlost mezi smyčcem a strunou menší, a tedy třecí síla větší než v druhé polovině kmitu. V první polovině kmitu působí třecí síla na strunu ve směru její rychlosti a dodává jí proto energii, v druhé polovině kmitu působí třecí síla proti pohybu struny — odebírá jí energii. Protože třecí síla je v první polovině kmitu větší než v druhé, je i energie v první polovině kmitu dodaná větší než energie v druhé polovině kmitu odebraná. Za celý kmit obdrží tedy struna od smyčce energii jako rozdíl mezi energií v první polovině kmitu dodanou a v druhé polovině kmitu spotřebovanou. Tato energie nahrazuje energii ztracenou tlumením, a proto se udržuje konstantní amplituda kmitů.

Kmitavý systém zde svým kmitáním moduluje vnější sílu na něj působící (jinak neperiodického charakteru) tak, že vzniká periodicky proměnlivá síla. Prostřednictvím této síly odčerpává kmitající systém z vnějšího zdroje neperiodického charakteru energii. Na kmitající systém působí vnější periodická síla, která je kmitáním systému vyvolána a která existuje pouze tehdy, když systém kmitá. Proto tento druh kmitů nazýváme *kmitý samobuzené* (rusky avtokolebanija, anglicky self excited vibrations, německy selbsterregte Schwingungen).

Uvedený příklad samobuzených kmitů patří do skupiny případů, kde zdrojem je třecí proces. Tyto samobuzené kmitý se vyskytují v řadě dalších případů, jako je na př. vrzání dveří, kmitání kol kolejových vozidel, v obráběcích strojích je to na př. trhavý posuv stolu vodorovně vyvrtávačky při pomalých posuvech (při kterých tření po vedení nabývá charakteru suchého tření).



Obr. 6.

Abychom formálně porovnali samobuzené kmitání s dosud probranými typy kmitání, zvolíme schematickou, velmi zjednodušenou lineární závislost třecí síly na rychlosti kmitání. Předpokládejme, že kmitavý systém o jednom stupni volnosti je tažen tak, že jeho hmota klouže po podložce určitou střední rychlostí v (obr. 6).

Předpokládejme, že třecí síla má určitou střední hodnotu T , která při malé změně rychlosti, dané kmitavým pohybem hmoty, vzroste o hodnotu ΔT , úměrnou úbytku rychlosti:

$$\Delta T = a\dot{x}, \quad \text{kde} \quad a > 0.$$

Silová rovnice kmitavého pohybu systému je pak

$$m\ddot{x} + c\dot{x} - a\dot{x} + kx = T. \quad (11)$$

Konstantní síla T nemá vlivu na tvar kmitů, a proto ji neuvažujeme.

$$m\ddot{x} + (c - a)\dot{x} + kx = 0.$$

Jestliže $(c - a) > 0$, obdržíme případ obdobný případu (7) — tlumené vlastní kmitání.

Jestliže $a > c$, a tedy $(c - a) < 0$, bude reálná část kořenu charakteristické rovnice kladná a řešení

$$x = e^{\frac{a-c}{2m} \cdot t} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega} x_0 \sin \omega t \right),$$

kde

$$\frac{a-c}{2m} \cdot t > 0$$

představuje kmitavý pohyb se stále narůstající amplitudou (obr. 7) — lineární samobuzené kmitání.

Případy skutečných samobuzených kmitů se od tohoto případu liší tím, že amplituda kmitů nenarůstá do nekonečna, ale narůstá pouze z počátku a pak se ustálí na určité konečné hodnotě. I takový případ lze formálně popsat pro kmitavý systém o jednom stupni volnosti.

Je třeba předpokládat pro vnější sílu, vyvolanou kmitáním, nelineární závislost na rychlosti kmitání a obecně dále i na frekvenci kmitání. Tuto sílu budeme nazývat samobudící silou P_s .

$$P_s = \varphi(\dot{x}, \omega).$$

Nejjednodušeji na př.

$$P_s = a\dot{x} + b\dot{x}^3$$

nebo

$$P_s = \frac{a}{\omega} \dot{x} + \frac{b}{\omega} \dot{x}^3 \text{ atp.}$$

I tlumící P_{tl} síla může být nelineární

$$P_{tl} = \psi(\dot{x}, \omega),$$

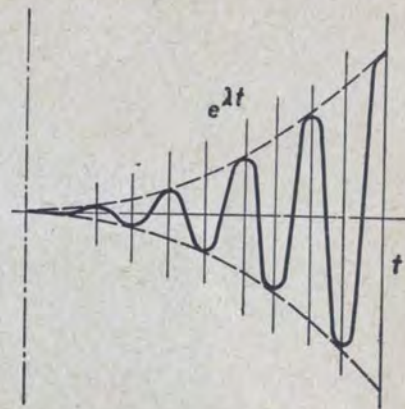
na př.

$$P_{tl} = c\dot{x} + d\dot{x}^3 \text{ atp.}$$

Pohybová rovnice má pak tvar

$$m\ddot{x} + \varphi(\dot{x}, \omega) + \psi(\dot{x}, \omega) + kx = 0. \quad (12)$$

Její úplné obecné řešení nelze provést. Za určitých předpokladů (na př. že samobudící a tlumící síly jsou proti setrvačným a pružným silám malé) se pro-



Obr. 7.

vádí řešení, které popisuje samobuzené kmitání, které se ustálí na určité amplitudě.

Samobuzené kmitání se v přírodě velmi často vyskytuje. Kmitání telegrafních drátů ve větru, kmitání ventilů v hydraulických potrubích, elektrické oscilátory, hodiny, atd. jsou různé druhy samobuzených kmitů. Jsou vázány na různé druhy kmitavých systémů a samobudicí síla má různý charakter — různý je princip, podle kterého kmitající systém načerpává energii. Tento princip byl dosud řádně vyřešen pro velmi málo druhů samobuzených kmitů. Zvláštní druh je i případ samobuzených kmitů, vznikajících při obrábění, jejichž řešení je věnována tato kniha.

3. Samobuzené kmity v obráběcích strojích

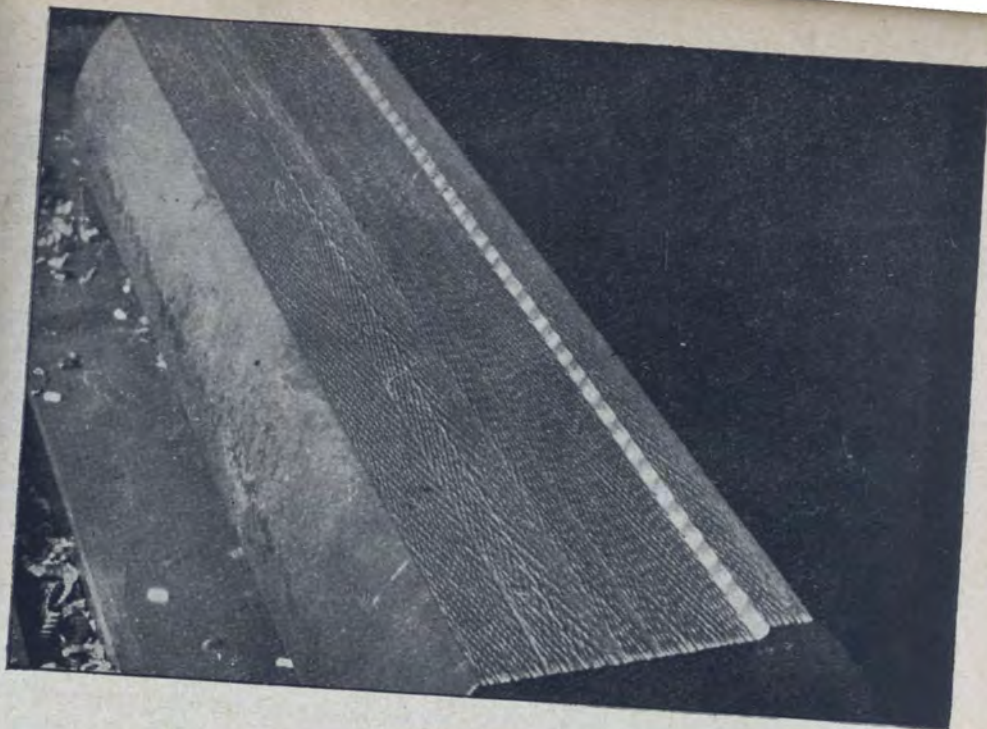
Při obrábění kovů vznikají v některých případech energické kmity, jejichž amplituda rychle narůstá. Pokud jde o méně intenzivní případy, pozorujeme, že se amplituda kmitů brzy ustálí na určité hodnotě. Ve většině případů je kmitání tak intenzivní, že je nutno obrábění přerušit, takže k ustálení amplitudy nedojde. Frekvence těchto kmitů je velmi blízká frekvenci některého z hlavních typů vlastních kmitů složeného kmitavého systému obráběcího stroje. Jde o samobuzené kmitání, při kterém kmitající systém načerpává energii z energie dodávané reznému procesu hlavním pohonem stroje.

Obráběcí stroj je kmitavý systém o mnoha stupních volnosti, kterým odpovídá mnoho typů vlastních kmitů a jim příslušných frekvencí.

Ze všech těchto typů vlastních kmitů je výrazný obvykle menší počet. Kmitání v každém z těchto výrazných typů vlastních kmitů se zúčastní největší měrou určitá část stroje. Mluvíme pak jednoduše o vlastních kmitech příslušné části stroje, o kmitavém systému příslušné části stroje.

Tak na př. na soustruhu rozeznáváme výrazný kmitavý systém, jehož hmotu tvoří převážně obrobek a jehož pružiny tvoří převážně upínací části, t. j. vřeteno, hroty, pinola, koník. Dále torsní kmitavý systém, jehož hmotu tvoří převážně vřeteno, skličidlo, obrobek a jehož pružiny tvoří převážně hřídele v převodové skříní. Na frézkách při čelním frézování nožovými hlavami vystupuje výrazně kmitavý systém nástroje, jehož hmotu tvoří převážně nástroj a pružinu upnutí nástroje. Při frézování válcovými frézami je nejvýraznějším kmitavým systémem kmitavý systém podpěrného ramena atd.

U jednotlivých typů obráběcích strojů vzniká většinou samobuzené kmitání, jehož frekvence je dána frekvencí vlastních kmitů určité části stroje, určitého výrazného kmitavého systému stroje. Tak na př. u soustruhu jde ve většině případů o samobuzené kmity, jejichž frekvence je dána frekvencí vlastních kmitů zmíněného systému obrobku. Takový kmitavý systém stroje nazýváme v dalším „nejzávažnější řídicí systém stroje“. U daného stroje ovšem



Obr. 8.



Obr. 9.

mohou vzniknout i samobuzené kmity dané jiným řídicím systémem nebo dvěma systémy současně. U soustruhu bývá takovým druhým závažným řídicím systémem nástroj.

Při samobuzeném kmitání se periodicky mění průřez třísky, vzniká periodicky proměnlivá řezná síla, na obráběném povrchu se objeví charakteristické stopy — obr. 8 (plocha hoblovaná na vodorovné obrážce). Odřezávaná tříska má výrazně proměnlivou tloušťku — obr. 9 (tříska z vodorovné obrážky), někdy

je i rozsekaná na jednotlivé úlomky — obr. 10 (tříska z odvalovací frézky). Škodlivost samobuzeného kmitání je dána jednak silně zvýšeným namáháním částí stroje, jednak silně zhoršenou jakostí obrobeneho povrchu. Prvně jmenované hledisko je důležitější, neboť samobuzené kmity vznikají většinou při hrubování. U některých druhů strojů (odvalovací frézky, vyvrtávačky) vzniká často samobuzené kmitání i při hlazení, a protože jde o stroje, u kterých se kladou vysoké požadavky na jakost obrobeneho povrchu, je tu rozhodujícím hledisko druhé.

Zvýšení namáhání částí stroje je u většiny případů samobuzeného kmitání tak značné, že nebezpečně ohrožuje pevnost stroje, a proto nelze při samobuzeném



Obr. 10.

kmitání obrábět. Je nutno pak volit natolik snížené řezné podmínky, aby samobuzené kmitání nevzniklo. Tím je často podstatně snížena produktivita výroby. Podrobnější vyjádření škodlivých účinků samobuzených kmitů uvádíme v kap. III.

Primární samobuzené kmitání při obrábění je téměř vždy spojeno a zesilováno rezonančním vynuceným kmitáním. Ve všech případech obrábění (s výjimkou zvláště uspořádaných případů) odebírá nástroj třísku z plochy, kterou vytvořil při předchozí otáčce nebo při předchozím zdvihu. Jestliže v určitém místě vzniklo samobuzené kmitání, objevila se vlnitost obrobeneho povrchu. Když pak při následující otáčce nebo zdvihu nástroj odřezává třísku z tohoto zvlněného povrchu, je hloubka řezu periodicky proměnlivá. Rovněž řezná síla je periodicky proměnlivá. Frekvence proměnlivosti řezné síly je shodná s frekvencí kmitání, které vyvolalo vlnitost povrchu, tedy s frekvencí samobuzeného

kmitání, a ta je dána frekvencí vlastních kmitů řídicího kmitavého systému stroje. Periodicky proměnlivá řezná síla jako vynucující síla vyvolává tedy rezonanční nucené kmity řídicího systému, které se sčítají s primárními samobuzenými kmity. Mezi vlnitostí povrchu vytvořeného při následujících po sobě otáčkách nebo zdvích vzniká pro rezonanci typický fázový posun 90° čili čtvrtinu vlnové délky. Stopy po jednotlivých otáčkách nebo zdvích jsou v tomto smyslu pravidelně seřazeny (viz obr. 8) a tvoří obraz charakteristický pro samobuzené kmitání při obrábění. V kap. IV stanovíme základní princip primárních samobuzených kmitů, princip „polohové vazby“. Ukážeme, že zmíněné rezonanční vynucené kmitání nejen zesiluje primární samobuzené kmity, ale může se samo stát zdrojem zvláštního druhu samobuzených kmitů.

Samobuzené kmity vznikají při obrábění na téměř všech druzích obráběcích strojů (s výjimkou brousících strojů, u kterých nebyly spolehlivě zjištěny). Setkáme se s nimi na soustruzích, frézkách, hoblovkách, vyvrtávačkách, obrážkách, karuselech, atd. S hlediska vzniku samobuzených kmitů lze obrábění rozdělit do dvou skupin: na případy, kdy samobuzené kmitání nevzniká — obrábění probíhá klidně — a na případy, kdy samobuzené kmitání vzniká. Samobuzené kmitání tedy není zjevem, který by se ve větším nebo menším měřítku projevoval ve všech případech obrábění, jako je tomu na př. u nucených kmitů, které, byť v sebemenším měřítku, lze ve stroji pozorovat vždycky (od nevyváženosti rotujících částí a pod.). Jestliže však vynucené kmitání ve většině případů (s výjimkou brousících strojů) je skutečně škodlivé až při poměrně velkých amplitudách (a to je v málo případech), je naproti tomu samobuzené kmitání prakticky pro obrábění nepřijatelné. Je proto přirozenou snahou nalézt takové podmínky, aby se samobuzené kmitání v plném rozsahu výkonu jednotlivých typů strojů a operací nevyskytovalo.

Podmínky, které jsou spojeny se vznikem samobuzených kmitů při obrábění a jejichž změnou překračujeme hranici vzniku samobuzeného kmitání, t. j. proměnné, s kterými musíme při řešení daného problému počítat, lze rozdělit do dvou skupin. První skupinu tvoří vlastnosti stroje, dané s vnějšího hlediska druhem stroje, jeho uspořádáním pro danou operaci, způsobem upnutí obrobku a s vnitřního hlediska tím, že stroj je složený kmitavý systém. Druhou skupinu tvoří podmínky řezu, technologické podmínky, t. j. druh obráběného materiálu, tvar nástroje daný jednotlivými úhly břítu, řezná rychlost, posuv, hloubka řezu, otupení nástroje, jeho nastavení atp. Proměnných, s kterými je nutno pracovat, je veliké množství. Proto lze problém rozřešit jedině na základě pochopení a vysvětlení základních vztahů ovládajících vznik samobuzeného kmitání při obrábění, platících obecně ve všech případech, na základě pochopení principu.

Hlavním obsahem předložené práce je řešení problému samobuzených kmitů s hlediska vlastností stroje, t. j. s hlediska veličin, které ho charakterizují jako kmitavý systém, a to na základě obecného principu. Technologické podmínky

shrnujeme při tom do jediné veličiny, t. zv. hloubkového koeficientu r , závislého určitým způsobem na jednotlivých technologických podmínkách.

Dříve než přikročíme k vybudování základního principu, budeme se zabývat studiem zjevu v jeho rozmanitosti a popisem vlivu jednotlivých podmínek. Tento vliv zjišťujeme experimentálně pokud možno v nejširším měřítku, t. j. na různých strojích za různých podmínek řezu. Tyto práce popisujeme v kapitole II. Při nich je použito co nejjednoduššího měření proto, aby bylo možno zkoušet velké množství případů. Z nich pak vybíráme typické případy, na kterých podrobněji měříme vznikající samobuzené kmitání. Při tom kvantitativně vyjadřujeme škodlivost samobuzeného kmitání (kapitola III).

Účel a užitek této práce je dvojitý. Předně získáváme přesnější znalost vlivu jednotlivých podmínek, zvláště technologických, na vznik samobuzených kmitů a můžeme udat směrnice pro jejich volbu s tohoto hlediska. Za druhé získáváme přesnější znalost zjevu samotného a můžeme lépe stanovit základní obecný princip, jehož správnost pak můžeme ověřit na získaných podkladech.

Theoretickému propracování základního principu, jeho experimentálnímu prověření, pomocným pracím potřebným pro aplikaci principu na řešení obráběcího stroje i aplikaci samotné jsou věnovány další kapitoly knihy.

4. Cizí práce na řešení problému samobuzených kmitů vznikajících při obrábění

Řešením problému samobuzených kmitů při obrábění se dosud zabývalo poměrně velmi málo vědeckých pracovníků. Literatura o tomto důležitém předmětu je tak chudá, že lze snadno provést její téměř úplný výčet. Teprve v poslední době je tomuto problému věnována zvýšená pozornost.

První měření kmitání nože při obrábění provedl Japonec Shizou Doi [1]. Z doby před dvaceti lety pocházejí stručné články a jednoduchá pozorování kmitání při obrábění. To bylo vysvětlováno jako kmitání vynucené periodicky proměnlivou silou, vznikající odlamováním jednotlivých částic třísky. V SSSR provedla řada autorů jednoduché zkoušky a pozorování kmitání při obrábění (I. S. Štejnberg 1936 [2], N. A. Drozdov 1937 [3], N. J. Reznikov 1935 [4]).

Od té doby všechny závažnější práce v daném oboru pocházejí od sovětských autorů. První širší práce, kde kmitání vznikající při obrábění je důsledně prohlášeno za samobuzené kmitání a toto tvrzení doloženo řadou experimentálních faktů, je práce A. J. Kaširina (1944) [5]. Je provedena řada měření, vztahujících se k soustružení a je vybudován theoreticky základní princip. Měření závislosti velikosti řezné síly na řezné rychlosti a theoretický rozbor této závislosti je základem principu samobuzení, který je matematicky propracován pro nelineární kmitavý systém o jednom stupni volnosti. Další základní práce provedl A. P. Sokolovskij (1946) [6]. I zde je provedena řada zkoušek a měření na

soustruhu a stanovena theorie vzniku samobuzených kmitů při obrábění. Ta opět vychází ze závislosti velikosti řezné síly na řezné rychlosti, i když fyzikální podstata této závislosti je vykládána jinak než u Kaširina. Opět je provedeno matematické propracování pro nelineární systém o jednom stupni volnosti. Obě uvedené práce přinesly mnoho nového a vytvořily základ, na kterém bylo možno dále pracovat. Podrobnější popis obou prací uvádíme v kap. IV a v dalším. Práci menšího rozsahu, založenou stejně na sledování závislosti řezné síly na řezné rychlosti provedl v Anglii Arnold [7].

Studiu vlivu jednotlivých podmínek, hlavně technologických, na vznik samobuzených kmitů při soustružení je věnována práce L. K. Kučmy (1948) [8] a G. A. Manžose (1951) [9]. Obě tyto práce přinášejí řadu kladných výsledků. Theorie vzniku samobuzených kmitů v nich není vypracována. Tyto práce se doplňují s naší prací, kterou uvádíme v kap. II. Obdrželi jsme je až po provedení většiny našich zkoušek, avšak přesto nedošlo k duplicitě, neboť naše zkoušky byly většinou prováděny na jiných druzích strojů než na soustruhu. Většina hlavních výsledků naší práce se s uvedenými pracemi shoduje. Stručný výtah z obou prací zařazujeme na počátek kap. II. Podrobnému měření kmitání v některých případech soustružení je věnována práce I. S. Amosova (1951) [10]. Doplnuje naše práce a v kapitole IV uvádíme některé její výsledky.

SAMOBUZENÉ KMITÁNÍ ZA RŮZNÝCH PODMÍNEK OBRÁBĚNÍ

5. Cizí práce

V kapitole I jsme se zmínili o tom, že sovětští vědečtí pracovníci L. K. Kučma a G. A. Manžos provedli řadu zkoušek obráběním na soustruhu, aby zjistili vliv různých podmínek obrábění na intenzitu kmitání vznikajícího při obrábění. Uvedeme zde stručně výsledky této práce. Obrázky, které v tomto oddílu uvádíme, jsou převzaty z originálních prací; přeloženy byly pouze nápisy.

Základní uspořádání zkoušek u obou autorů je stejné. Za určitých vhodně volených řezných podmínek bylo provedeno soustružení válcových obrobků, upnutých na obou koncích. V závislosti na změně některé z daných podmínek byla sledována změna intenzity kmitání, vyjádřené hloubkou vln, zbylých na obrobeném povrchu. Hloubka vlny byla měřena hodinkovým indikátorem. Další sledovaná veličina, charakterisující vzniklé kmitání, byla frekvence f kmitů. Byla počítána z délky l vln, zbylých na obrobeném povrchu, a z řezné rychlosti v

$$f = \frac{1000v}{60l}$$

v m/min, l mm, f c/s.

L. K. Kučma prováděl zkoušky na soustruhu o výšce hrotů 270 mm, s kluzným uložením vřetena, pro který udává základní hodnoty tuhosti. Tuhost suportu ve vodorovném směru 4,5 kg/ μ , tuhost konce vřetena ve vodorovném směru 6 až 7 kg/ μ , tuhost pinoly koníka ve vodorovném směru při vysunutí 35 mm 13 kg/ μ , při vysunutí 135 mm (polovina výšky hrotů) 7 kg/ μ . Zkoušky byly prováděny při vysunutí 35 mm.

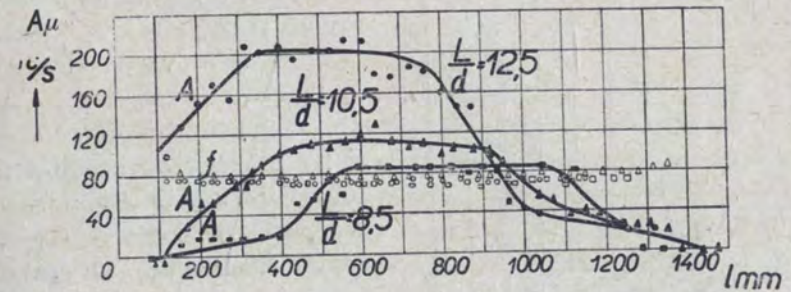
Soustružený materiál: chromová normalisovaná ocel 5140 (40CH). Rozměry soustružených obrobků: průměr 200 mm, délka 1500 mm. Upnutí ve skličidle a hrotu.

Použitý nástroj: soustružnický nůž s destičkou ze slinutého karbidu, průřez držáku 25 × 25 a 35 × 35 mm, vyložení nože 20 mm.

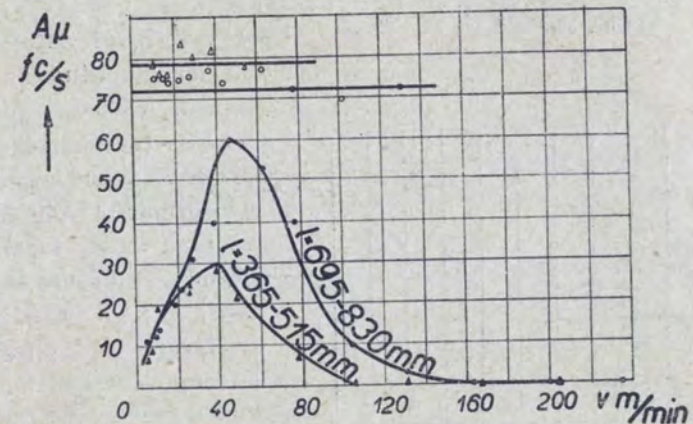
Základní geometrie nože a základní řezné podmínky zvoleny tak, aby vznikaly samobuzené kmity, ale aby jejich intenzita nebyla příliš velká, aby amplituda kmitů v směru kolmém k obráběnému povrchu nepřevýšila hloubku třísky. Pak by totiž nebylo možno posuzovat intenzitu kmitání podle hloubky vln na povrchu, která přirozeně nemůže být větší než dvojnásobná hloubka třísky (odpovídá dvojnásobně amplitudě kmitání).

Základní hodnoty byly zvoleny takto:

geometrie nože: $\gamma = 12^\circ$, $\alpha = 6^\circ$, $\kappa_1 = 30^\circ$, $\lambda = 0^\circ$, poloměr zaoblění špičky $r = 1$ mm; nebo druhá varianta: $\gamma = 4^\circ$, $\alpha = 10^\circ$, $\kappa_1 = 32,5^\circ$. Tato varianta



Obr. 11.



Obr. 12.

použita při studiu vlivu řezné rychlosti a vlivu polohy nože vzhledem ke koncům obrobku;

řezné podmínky: posuv na otáčku $s = 0,25$ mm, hloubka řezu $t = 2$ mm (tloušťka třísky 0,125 mm, šířka třísky 4 mm při $\kappa_1 = 30^\circ$), řezná rychlost v rozmezí $v = 35$ až 45 m/min.

V první řadě vyšetřoval autor, jak se mění hloubka vln a frekvence kmitů se změnou polohy nože podél obrobku. Při tom bylo použito 1500 mm dlouhých

obrobků tří různých průměrů 125, 150 a 185 mm, a tedy různého poměru $\frac{L}{D} = 12,5, 10,5, 8,5$.

Škodlivost samobuzených kmitů při obrábění je tedy dána tím, že při dosavadním provedení obráběcích strojů jsou ve velkém množství případů obrábění mezní řezné podmínky vzniku samobuzených kmitů takové, že je možno využít pouze části výkonu stroje. Jinými slovy, vznik samobuzených kmitů snižuje ve velkém množství případů produktivitu obrábění proti hodnotě, která by byla možná, kdyby samobuzené kmity v celém rozsahu výkonu stroje nevznikaly.

Tím je zjev samobuzených kmitů při obrábění jednou z hlavních překážek dalšího zvyšování produktivnosti obráběcích strojů.

Je celá řada operací, které na různých strojích nelze vůbec provádět, protože intenzita samobuzeného kmitání je i při nejnižších řezných podmínkách příliš velká. Je celá řada operací, které na různých strojích nelze provádět, i když jinak patří do rozsahu operací, pro které je stroj určen, protože vznikem samobuzeného kmitání je nepřipustně zhoršena jakost obrobeneho povrchu.

Možnosti zvýšení výkonu obrábění a udržení dobré jakosti obrobeneho povrchu dané vhodnou volbou řezných podmínek byly vyšetřeny v kap. II.

Je nyní nutno studovat, jakým způsobem lze změnit konstrukci obráběcího stroje, aby byly zvýšeny mezní řezné podmínky vzniku samobuzených kmitů při obrábění na daném stroji. Tímto úkolem se zabýváme v celé další části této knihy. Na počátku této práce je třeba stanovit základní principy vzniku samobuzených kmitů při obrábění.

ZÁKLADNÍ PRINCIPY VZNIKU SAMOBUZENÝCH KMITŮ PŘI OBRÁBĚNÍ

16. Cizí práce

V úvodu jsme uvedli, že významné práce, dosud věnované stanovení základního principu vzniku samobuzených kmitů, jsou práce A. I. Kaširina [5] a A. P. Sokolovského [6]. Zmíníme se pouze velmi stručně o hlavních zásadách a výsledcích těchto prací.

A. J. Kaširin provedl řadu měření frekvencí, amplitud a časového průběhu kmitání, vznikajícího při soustružení obrobků, upnutých na obou koncích. Na základě těchto měření prokázal, že jde o samobuzené kmitání nelineární. Aby vysvětlil vznik tohoto kmitání, vychází z dříve vysvětleného samobuzeného kmitání kmitavých systémů se „záporným třením“, t. j. z případů kmitavých systémů, na které při kmitání působí třecí síla, jejíž velikost klesá při zvýšení třecí rychlosti. Uvádí Van der Poolův model a tvar pohybové rovnice, kterou tento autor stanovil pro řadu případů samobuzených kmitů:

$$m\ddot{x} + [\beta + F(v_1)] \dot{x} + kx = 0, \quad (26)$$

kde m , β , k jsou kladné konstanty, v_1 je třecí rychlost. Rovnice (26) je nelineární diferenciální rovnice druhého řádu a „podmínka samobuzení“ je v podstatě:

$$\beta + F(v_1) < 0. \quad (27)$$

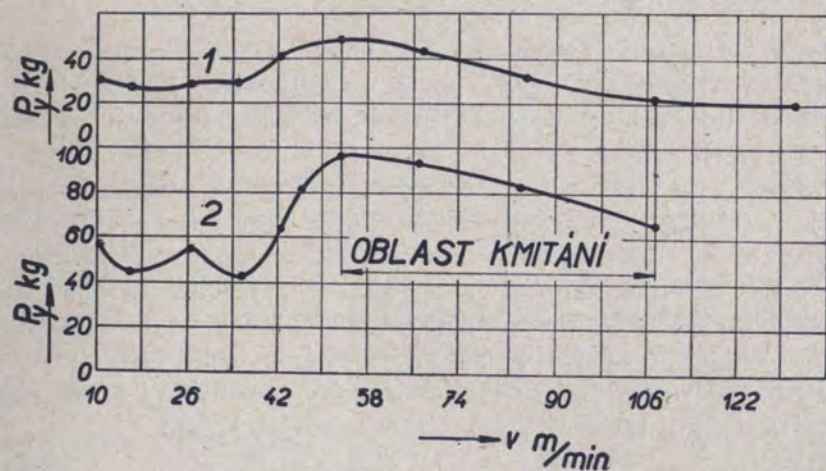
Autor uvádí dále, že tato podmínka vyjadřuje požadavek, že třecí síla při zvyšování třecí rychlosti klesá v oblasti rychlostí blízkých hodnotě v_1 .

Analogicky s popsaným případem zkoumá autor podrobně závislosti řezné síly na řezné rychlosti. Provádí měření s výsledky jako na obr. 65. V určitém rozsahu řezných rychlostí řezná síla klesá při zvyšování řezné rychlosti. Tento rozsah označuje autor jako „oblast kmitání“. Velmi podrobně se zabývá dále zkoumáním plastických deformací třísky, pozorovaných na mikrovýbrusu řezu třískou, a na základě rozboru těchto deformací stanovuje charakter třecích sil mezi třískou a nožem. Dochází k fyzikálnímu odůvodnění průběhu závislosti P , v a stanoví jako typický průběh charakteru, který je naznačen na obr. 65.

K této části práce je třeba kriticky připomenout, že dnes je s jistotou prokázáno, že samobuzené kmity vznikají i při řezných rychlostech, ležících pod oblastí řezných rychlostí, kterou Kaširin označil jako „oblast kmitání“, dokonce že vznikají zejména pod touto oblastí. Měření závislosti P , v , provedené různými autory, se liší a dnes není zcela jisté, zda průběh uvedený na obr. 65 je v podstatě správný či nikoli.

Pokles řezné síly při zvýšení relativní rychlosti mezi hřbetem nože a obráběným materiálem a zvýšení relativní rychlosti mezi čelem nože a třískou je podle autora forma závislosti určité malé části řezné síly na rychlosti kmitání.

Podobnou formu závislosti další malé části řezné síly na rychlosti kmitání odvozuje autor ze skutečnosti, že relativní úhel mezi čelem nože a zvlněným povrchem obráběného materiálu se v průběhu jednoho kmitu mění. Pro další malou část řezné síly odvozuje autor opět podobnou formu závislosti řezné síly



Obr. 65.

na rychlosti relativního kmitání mezi obrobkem a nástrojem na základě skutečnosti, že nástroj odřezává třísku proměnlivého průřezu z povrchu zvlněného při předchozí otáčce. Pro první otáčku, kdy nástroj odřezává třísku z povrchu ještě nezvlněného, je zdrojem samobuzení pouze závislost řezné síly na relativní řezné rychlosti, při dalších otáčkách se uplatňují všechny tři uvedené zdroje.

Relativní pohyb mezi nástrojem a obrobkem rozkládá autor do tří základních směrů x , y , z a zabývá se řešením pohybu vesměru y . Jde o podrobné řešení kmitání o jednom stupni volnosti na základě stanovených tvarů závislosti části řezné síly na rychlosti kmitání. Po úpravách a zjednodušení těchto závislostí na základě zanedbání malých členů vyšších řádů obdrží autor pohybovou rovnici tvaru

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -(B_1 + 2n)\dot{y} + B_2 \dot{y}^2 - B_3 \dot{y}^3 \quad (27)$$

(sr. [5] str. 68),

kde $(B_1 + 2n)$, B_2 , B_3 jsou kladné konstanty, jejichž zvláštní hodnoty autor neudává.

Jde tedy o nelineární diferenciální rovnici, kterou autor neřeší, ale vyjadřuje z ní výraz pro amplitudu, na které se kmitání ustálí. Výsledek rozebírá autor pouze obecně vzhledem k různým možným hodnotám jednotlivých konstant.

Autor ve své práci upozornil na řadu důležitých stránek daného problému, a tím podstatně usnadnil orientaci pro další práci na jeho řešení.

A. P. Sokolovskij se zabývá teorií vzniku samobuzených kmitů s omezením na případ, kdy nástroj obrábí stále nový povrch, nezvlněný při předchozí otáčce. Tento případ konkretisuje jako soustružení povrchu plochého závitu.

Další omezení stanoví v tom smyslu, že se zabývá pouze pohybem ve směru Y , kolmém k obráběnému povrchu, pohybem o jednom stupni volnosti.

Provedl současné měření průběhu síly P_y a dráhy kmitavého pohybu y při samobuzeném kmitání. Ukázal, že průběh síly při polovině kmitu směrem do materiálu se liší od průběhu síly při polovině kmitu směrem ven z materiálu (obr. 66). Ukázal, že řezná síla dodá za jeden cyklus kmitavého pohybu energii danou plochou uzavřené křivky P_y na obr. 66. Tim dokázal, že jde o samobuzené kmitání.

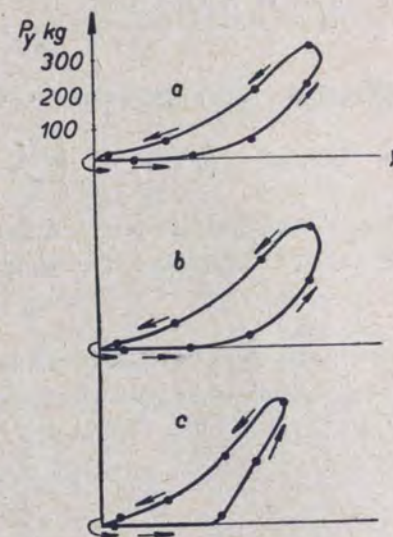
Podobně jako Kaširin zabývá se i Sokolovskij fyzikálním vysvětlením rozdílné hodnoty řezné síly v obou polovinách kmitu. Udává pak na základě rozboru, že nástroj při polovině kmitu směrem do materiálu vniká do plasticky předem nedeformovaných vrstev, a proto je řezná síla menší než při polovině kmitu ven z materiálu, kdy nástroj odřezává materiál plasticky předem deformovaný, a proto zpevněný.

Na základě tohoto rozboru stanoví autor, že část ΔP_y horizontální složky řezné síly P_y závisí na poměru $\frac{v'}{v}$ rychlosti kmitání k řezné rychlosti. Formu této závislosti volí autor podle měření, uvedeného na obr. 66 takto:

$$P_y = R - ry + \Delta P_y,$$

$$P_y = R - ry + aB \frac{y'}{v} + bB \frac{y'^2}{v^2} - cB \frac{y'^3}{v^3}, \quad (\text{sr. [6] str. 124}), \quad (28)$$

kde R je střední hodnota horizontální složky řezné síly, r je koeficient úměrnosti mezi změnou řezné síly a změnou tloušťky třísky („hloubkový koeficient“ odvozený v kap. II, 12d), a , b , c jsou kladné konstanty, závislé na druhu obráběného materiálu a geometrii nože, B je šířka třísky, v řezná rychlost.



Obr. 66.

Pro tlumicí sílu P_{tt} volí autor lineární tvar

$$P_{tt} = -hy' ; \quad (29)$$

při tom předpokládá, že hodnota koeficientu h závisí na zatížení pružin systému řeznou silou P_z

$$h = H_1 \cdot P_z^q, \quad \text{kde } 1 > q > 0.$$

Protože pak

$$P_z = C \cdot B^s s^q,$$

kde s je posuv, B šířka třísky je

$$h = H \cdot B^{s^q} s^{q^2}. \quad (30)$$

Na základě výrazů (28) a (29) píše autor pohybovou rovnici v směru Y :

$$my'' + (k + r)y - \left(\frac{aB}{v} - h\right)y' - bB \cdot \frac{y'^2}{v^2} + cB \cdot \frac{y'^3}{v^3} = 0. \quad (31)$$

Jde opět o nelineární rovnici. Autor předpokládá podle výsledků měření, že tvar kmitání se velmi málo liší od sinusoidy a navrhne řešení rovnice (31) ve tvaru

$$y = A \cdot \sin \omega t. \quad (32)$$

Výraz pro velikost ustálené amplitudy kmitání A odvodí pak z podmínky, že součet prací, které jednotlivé síly zastoupené v rovnici (31) vykonají za jeden cyklus, je roven nule. Obdrží pak

$$A = \frac{2}{\sqrt{3c}} \cdot \frac{v}{\omega} \sqrt{a - \frac{vh}{B}}. \quad (33)$$

Rozborem výrazu (33) dochází autor k závěrům:

a) Při zvyšování řezné rychlosti v amplituda A z počátku rychle roste do hodnoty $v = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{h} \cdot B$. Další zvýšení řezné rychlosti snižuje amplitudu kmitání.

Při $a - \frac{vh}{B} \leq 0$, t. j. při $v \geq \frac{a}{h} B$, je vznik kmitání nemožný.

b) Zvýšení kmitočtu $\omega = 2\pi f$ při zachování ostatních podmínek vede k zmenšení hodnoty amplitudy kmitání. Tak působí na příklad zvětšení tuhosti systému.

c) Zvětšení šířky třísky B zvětšuje amplitudu kmitání.

d) Koeficient útlumu h má silný vliv na amplitudu kmitání, kterou zmenšuje až při $h \geq \frac{a}{v} B$ znemožňuje vznik kmitání. Protože koeficient útlumu h závisí na zatížení systému a tím i na velikosti posuvu podle (30), obdrží autor výsledek, že amplituda kmitání je tím menší, čím větší je posuv s .

Závěry, které autor uvádí, shodují se dobře se zkušenosti. Tyto závěry vyplývají z předpokladů, které autor učinil.

V dalším se autor dotýká i problému kmitání systému o více stupních volnosti. Omezuje se však pouze na případy dvou stupňů volnosti, daných

- kmitáním systému obrobku a systému nástroje, obou v jediném směru Y ,
- kmitáním příčného systému obrobku ve směru Y a kmitáním kroutivého systému obrobku ve směru Z .

Při tom dostává výsledky, které se v podstatě neodlišují od výsledků získaných pro systém o jednom stupni volnosti.

17. Předpoklady obecného principu vzniku samobuzených kmitů při obrábění

I když se výsledky práce A. P. Sokolovského po mnoha stránkách shodují se zkušeností, zůstávají některé skutečnosti, pozorované při zkouškách, nevysvětleny. Nelze na př. vysvětlit, proč se u řady strojů podstatně změnila mezni řezné podmínky vzniku samobuzených kmitů, jestliže změním směr řezné síly ve stroji (na př. obrácením nože a soustružením s opačným směrem rotace obrobku), proč není tuhost řídicího systému a frekvence jeho vlastních kmitů jednoznačným hlediskem pro odolnost stroje proti vzniku samobuzených kmitů a proč některé stroje i při větší tuhosti a vyšší frekvenci vlastních kmitů řídicího systému, než mají jiné stroje, vykazují menší odolnost proti vzniku samobuzených kmitů. Tato skutečnost je velmi důležitá, neboť na základě poznání její příčiny by bylo možno zvyšovat odolnost obráběcích strojů i bez zvyšování jejich tuhosti (a tím i jejich váhy), které má svoje hospodárné meze.

A. P. Sokolovskij hledá závislost řezné síly na rychlosti kmitání, která jedině může vysvětlit vznik primárního samobuzeného kmitání, jestliže omezíme úvahu na kmitavý systém o jednom stupni volnosti. Existenci této závislosti odůvodňuje na základě úvahy o fyzikální podstatě procesu obrábění. Pak ji prokazuje měřením určitého případu. Je ovšem otázkou, zda tato poměrně slabá závislost, kvantitativně rozebrána, může být v praktických případech vážným zdrojem energického samobuzeného kmitání poměrně silně tlumených systémů.

V řadě měření případů energického samobuzeného kmitání při našich experimentech byla tato závislost neměřitelná. Definitivní rozhodnutí o její nezávažnosti podáváme v kap. VI a VII, kde ukazujeme, že všechny případy samobuzeného kmitání lze vyčerpávajícím způsobem, a to v mnoha případech, i velmi přibližně kvantitativně vysvětlit na základě výrazné závislosti velikosti řezné síly na tloušťce třísky. Je ovšem nutno pro primární samobuzené kmitání rozšířit řešení na kmitavý systém o nejméně dvou stupních volnosti.

Omezení na jeden stupeň volnosti je největší překážkou obecnosti principu, neboť při rovinném obrábění, které bylo předmětem studia, je nutno při nejmenším uvažovat aspoň dva stupně volnosti pohybu v dané rovině. Není pak

ovšem odůvodněno předpokládat, že dva základní tvary vlastních kmitů spadají do základních směrů Y a Z , do nichž obvykle rozkládáme rovinný proces obrábění.

Je třeba dále důsledně se zabývat skutečností, že nástroj při obvyklých způsobech obrábění odřezává vždy třísku s povrchu, který vytvořil při předchozí otáčce, a položit otázku, jak tato skutečnost souvisí se samobuzeným kmitáním, které při obrábění vzniká.

Shrneme základní předpoklady obecného principu vzniku samobuzených kmitů při obrábění.

a) Charakter samobuzeného kmitání, které vzniká při obrábění trojrozměrném, je shodný s charakterem samobuzeného kmitání, které vzniká při dvojrozměrném obrábění (na př. zapichování na soustruhu, frézování frézami s úhlem nastavení $\alpha_1 = 90^\circ$ atp.). Je proto možno omezit se na studium samobuzeného kmitání při dvojrozměrném obrábění. Princip jeho vzniku je možno přenést a rozšířit na trojrozměrné obrábění.

b) Samobuzené kmity při obrábění vznikají, narůstají a ustalují se na konečné hodnotě amplitudy. Je tedy nutno v celku je považovat za nelineární kmitání, zvláště pokud jde o to, určit velikost ustálené amplitudy. Časový průběh samobuzeného kmitání se velmi málo liší od sinusovky. Odchyłka tohoto kmitání od lineárního kmitání je tedy malá.

Pokud se omezíme pouze na počátek zjevu, není třeba jeho nelinearity vůbec uvažovat. I v theorii Sokolovského se uplatňují nelineární členy pohybové rovnice teprve při určité velikosti amplitudy.

Křivky závislosti samobudící energie na amplitudě nelineárního kmitání, uvedené na obr. 24 a 25 v kap. II, 6, kde byl probírán základní energetický obraz samobuzeného kmitání, lze pro velmi malé limitně nulové amplitudy kmitů nahradit s libovolnou přesností parabolou — křivkou platicí pro lineární kmitání.

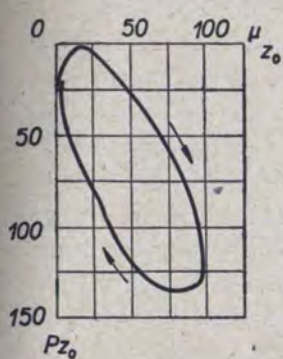
Pokud studujeme základní otázku, otázku podmínek vzniku samobuzeného kmitání při obrábění, můžeme s dostatečnou přesností pracovat s lineárními diferenciálními rovnicemi, můžeme zjev linearisovat.

c) Vzájemný vztah mezi relativním kmitáním obrobku a nástroje a velikostí řezné síly má základní stránku, danou závislostí velikosti řezné síly na průřezu třísky, která je experimentálně dostatečně prokázána.

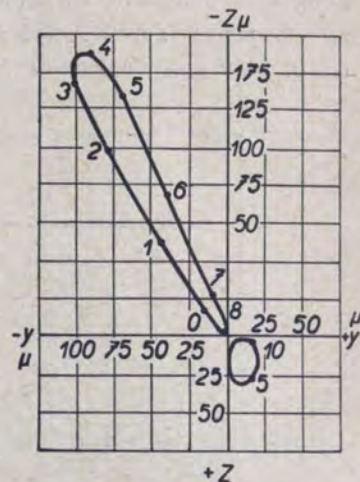
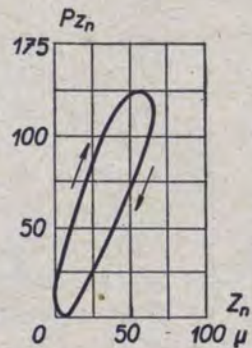
d) Ve všech obvyklých případech obrábění odřezává nástroj třísku, jejíž průřez je dán mimo jiné tvarem povrchu, obrobeného při předchozí otáčce nebo zdvihu, při předchozí třisce. I při zkouškách, při kterých obrábění bylo uspořádáno tak, aby nebyla tato podmínka splněna a nástroj odebíral třísku stále v místech, jejichž povrch nebyl vytvořen předchozí třiskou, vznikalo samobuzené kmitání. Je tedy prokázáno, že odřezávání třísky s povrchu vytvořeného za stejných podmínek při předchozí třisce není nutnou podmínkou vzniku samobuzených kmitů při obrábění, že existuje „primární samobuzené kmitání“. Je však nutno položit otázku, zda zvlnění povrchu, které může být vytvořeno

tlumeným vlastním kmitáním kmitavých systémů stroje po náhodné výchylce a které je zdrojem periodické proměnlivosti řezné síly, a tím i vynucených rezonančních kmitů při následující třisce, nemůže samo vést k postupnému narůstání amplitudy kmitů. Touto otázkou se zabýváme v kap. IV, 18.

e) Při studiu kmitání vznikajícího při dvourozměrném obrábění je nutno zabývat se rovinným kmitáním, které může být vytvořeno pouze kmitavým systémem o nejméně dvou stupních volnosti, nespádajících do jedné přímky. Je nutno počítat s obecnou polohou systému v dané rovině.



Obr. 67.



Obr. 68.

Měřením samobuzeného kmitání při obrábění bylo zjištěno, že složky kmitání ve dvou různých směrech mají určitý, nenulový vzájemný fázový posun. To se dokazuje i nesinusovým profilem vlnitosti povrchu (sr. obr. 17, obr. 40 a obr. 42).

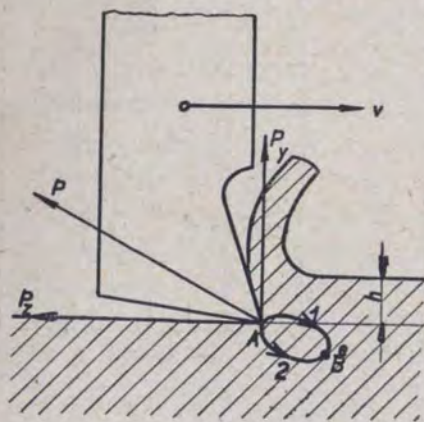
Rovinný (elipsovitý) tvar kmitání je popsán i v práci I. S. Amosova [10].

I. S. Amosov provedl velmi důkladná a pečlivá měření samobuzeného kmitání při soustružení. Měřil současně kmitání obrobku i nástroje v horizontálním i vertikálním směru, časový průběh horizontální i vertikální složky řezné síly. Zjistil, že obrobek kmitá podstatně větší amplitudou než nástroj, že obrobek i nástroj kmitají v obou základních směrech s určitým fázovým posunem, takže opisují uzavřenou křivku: fázový posun síly za výchylkou (obr. 67), dráha těžiště obrobku a břitu nástroje za jeden kmit (obr. 68). Udává podrobně amplitudu i fázi kmitání různých míst na suportu. Na základě současného měření kmitání a průběhu síly sestavuje diagramy síla — dráha, jejichž plocha udává kladnou práci, dodanou řezným procesem kmitajícímu systému za jeden kmit.

Svoje velmi důkladná měření však neporovnává s theoretickým řešením pohybu systému o dvou stupních volnosti. Jediným jeho závěrem je konstatace existence vzniku samobudící energie v řezném procesu.

f) Důsledné domyšlení procesu elipsovité formy relativního pohybu mezi nástrojem a obrobkem vede k novému principu vzniku samobuzených kmitů, principu, který podle formálního uspořádání pohybových rovnic dále nazýváme „principem polohové vazby“.

Základní úvaha vedoucí k jeho vypracování sleduje uspořádání podle obr. 69. Nástroj (nebo obrobek) se pohybuje rovnoměrnou řeznou rychlostí v a současně kmitá ve dvou směrech tak, že výsledný relativní pohyb mezi nástrojem a obrobkem, superponovaný na rovnoměrný pohyb rychlostí v , je dán uzavřenou křivkou (elipsou). Tento pohyb vykonává buď nástroj, nebo obrobek, nebo je to rozdíl mezi pohybem obou. Mysleme si ho jako pohyb nástroje.



Obr. 69.

Jestliže nástroj probíhá křivku směrem, který jsme v obrázku označili I , pak při pohybu z bodu A do bodu B působí řezná síla na nástroj proti směru jeho pohybu, a práce, kterou při tom vykoná, jde na úkor energie pohybu nástroje. Při druhé části pohybu, z bodu B do A , působí řezná síla na nástroj ve směru jeho pohybu a vykonanou práci zvyšuje energii pohybu. Pohyb z bodu B do A probíhá ve větší hloubce pod obráběným povrchem než pohyb z bodu A do B , řezná síla je proto větší po dráze $B \rightarrow A$ než po dráze $A \rightarrow B$. Proto i práce vykonaná po dráze $B \rightarrow A$, do daná kmitavému pohybu nástroje, je

větší než práce po dráze $A \rightarrow B$ kmitavému pohybu odebraná. Za jeden cyklus celkem řezná síla kmitavému pohybu určitou energii, danou rozdílem prací dodá v obou polovinách cyklu, a to je energie samobudící.

Kdyby pohyb nástroje v uzavřené křivce uvedeně na obrázku probíhal v směru označeném 2 , pak by naopak práce řeznou silou spotřebovaná byla větší než dodaná a kmitavému pohybu by vcelku za jeden cyklus byla energie řeznou silou odnímána.

Toto vysvětlení vzniku samobudící energie nepředpokládá závislost velikosti řezné síly na rychlosti kmitání, která, i kdyby byla prokázána, je slabá. Počítá pouze se závislostí velikosti řezné síly na hloubce řezu, která je výrazná a jednoznačně prokázána.

Je třeba matematickým zpracováním se přesvědčit o tom, zda může dojít k pohybu popsaného druhu a za jakých podmínek vede tento pohyb k samobuzení. Tím se zabýváme v kap. IV, 19.

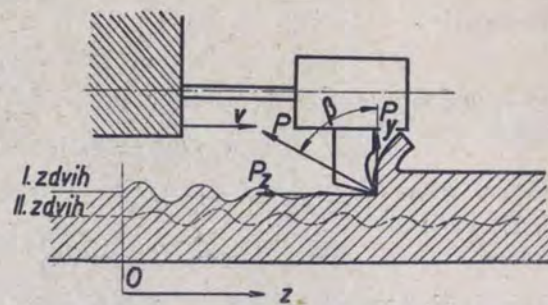
g) Obecný princip vzniku samobuzených kmitů musí vysvětlit nejen vliv

tuhosti a útlumu řidícího kmitavého systému na vznik samobuzených kmitů, ale i vliv jeho směrové orientace vzhledem ke směru řezné síly. Musí se zabývat vlivem všech vlastností, charakterisujících kmitavé systémy stroje.

18. Princip rezonančního kmitání, vynuceného vlnitostí povrchu, vzniklou při předchozí tříse

a) Vyjádření postupného rozkmitávání

Vlny na obrobeném povrchu při vzniku samobuzeného kmitání se řadí tak, že vlny vzniklé při třískách po sobě následujících jsou posunuty o čtvrtinu délky vlny. Kmity při odebrání třísek po sobě následujících jsou fázově posunuty o 90° . Uvedli jsme již dříve, že je tento zjev způsoben tím, že mimo primární samobuzené kmitání, které jsme zjistili i při takovém uspořádání, kdy nástroj stále obráběl povrch, který nevytvořil při předchozí tříse, vzniká při obvyklém obrábění, při kterém nástroj obrábí vždy povrch, který vytvořil při předchozí tříse, ještě sekundární rezonanční vynucené kmitání. Primární samobuzené kmitání existuje nezávisle na sekundárním vynuceném kmitání. Je možno položit otázku, zda zmíněné sekundární kmitání samo o sobě nemůže vést k narůstajícímu kmitání, jestliže při některé tříse dojde k náhodné výchylce kmitavého systému a k zvlnění povrchu, i když současně nejsou dány podmínky pro vznik primárního samobuzeného kmitání (na př. jde-li o systém o jednom stupni volnosti a nepředpokládáme-li „rychlostní závislost“).



Obr. 70.

Otázku vyšetříme při uspořádání podle obr. 70. Kmitavý systém o jednom stupni volnosti, daném pohybem ve směru Y , kolmém k obráběnému povrchu, pohybuje se řeznou rychlostí v a v místě O obdrží náhodnou výchylku. Tím vzniknou vlastní tlumené kmity systému. Nástroj vytvoří zvlněnou plochu, jejíž profil odpovídá časovému rozvinutí (čas můžeme měřit projetou dráhou z vzhledem ke konstantní rychlosti pohybu v) kmitů systému. Při následující tříse (II. zdvih) má nástroj od místa O odřezávat periodicky proměnlivou hloubku. Řezná síla P , a tím i její složka P_y , kolmá k obráběnému povrchu, je periodicky modulována frekvencí shodnou s frekvencí vlastních kmitů systému. Vznikne

rezonanční vynucené kmitání, jehož amplituda nejprve narůstá do určitého maxima a pak klesá a vytvoří se znovu zvlněný povrch. Tento proces se opakuje při další a další třísce. Ptáme se, zda konverguje řada, jejíž první člen je maximální amplituda kmitání při první třísce, t. j. amplituda první náhodné výchylky, druhý člen maximální amplituda kmitání, které vznikne při druhé třísce, třetí člen maximální amplituda kmitání, které vznikne při třetí třísce atd. Hledáme výraz, který popisuje kmitání systému při libovolné n -té třísce.

Čas počítáme pro každý zdvih od okamžiku, kdy nástroj projde polohou O , omezení délky pohybu v každém jednotlivém zdvihu zatím neuvažujeme. Daný kmitavý systém má hmotu m , tuhost pružiny k , tlumicí konstantu c .

Polohu břítu nástroje vzhledem ke střední poloze při prvním zdvihu označíme y_1 , při druhém zdvihu y_2 atd., v kladném smyslu vzhůru. Hloubka třísky v každém okamžiku při první třísce bude

$$h_1 = h_{st} - y_1,$$

při druhé třísce

$$h_2 = y_1 - y_2 + s,$$

kde s je hodnota posuvu do hloubky, při třetí třísce

$$h_3 = y_2 - y_3 + s \text{ atd.}$$

Závislost řezné síly píšeme s použitím „hloubkového koeficientu“ r (srov. kap. II, 12d):

$$P = r \cdot h.$$

Složka síly P_y , spadající do směru kmitání, je

$$P_y = P \cdot \cos \beta,$$

čili

$$P_y = r \cos \beta \cdot h$$

a označíme-li

$$r_y = r \cdot \cos \beta,$$

$$P_y = r_y \cdot h.$$

Silová rovnice pro pohyb v směru Y při první třísce je

$$m\ddot{y}_1 + c\dot{y}_1 + ky_1 = P_{y,st} - r_y \cdot y_1.$$

Konstantní síla $P_{y,st}$ neovlivní průběh kmitů, a proto ji vynecháme:

$$m\ddot{y}_1 + c\dot{y}_1 + (k + r_y)y_1 = 0. \quad (34)$$

Kořeny rovnice, obecně komplexní, označíme a, b , kde podle (7)

$$a = -\frac{c}{2m} + j \sqrt{\frac{k + r_y}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2},$$

$$b = -\frac{c}{2m} - j \sqrt{\frac{k + r_y}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}. \quad (35)$$

Označme dále

$$\left. \begin{aligned} + \frac{c}{2m} &= \lambda \\ \sqrt{\frac{k + r_y}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} &= \omega \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Obecný integrál rovnice (34) lze psát ve tvaru

$$y_1 = C_1 e^{at} + C_2 e^{bt} = e^{-\lambda t} (A \sin \omega t + B \cos \omega t)$$

Zavedením počátečních podmínek $t = 0, y_1 = 0, \dot{y}_1 = v_0$ obdržíme

$$y_1 = \frac{v_0}{\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t = A_0 e^{-\lambda t} \sin \omega t. \quad (37)$$

Ježto $\lambda > 0$, běží o pohyb tlumený (obr. 4).

S označením (35) lze rovnici (34) psát jednoduše

$$\ddot{y}_1 - (a + b) \cdot \dot{y}_1 + aby_1 = 0, \quad (38)$$

jejíž řešení zní

$$y_1 = A e^{at} + B e^{bt}. \quad (39)$$

Ponecháme-li vzhledem k použití operátorového způsobu řešení v dalším jen jedinou počáteční podmínku $y(0) = 0$, nabude toto řešení tvaru

$$y_1 = A(e^{at} - e^{bt}). \quad (40)$$

Veličina A musí být ryze imaginární, ježto vzhledem k (35)

$$a, b = -\lambda \pm j\omega,$$

je

$$y_1 = A \cdot e^{-\lambda t} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = 2jA \cdot e^{-\lambda t} \sin \omega t, \quad (41)$$

kde $A_0 = 2jA$ musí být reálné, je tedy $A = \frac{A_0}{2j} = \frac{v_0}{2j\omega}$.

Označme řešení pohybové rovnice pro I. třísku $F_1(t)$

$$y_1 = F_1(t),$$

kde

$$F_1(t) \equiv A(e^{at} - e^{bt}) = 2jA \cdot e^{-\lambda t} \sin \omega t. \quad (42)$$

Výrazy (37), resp. (40) popisují průběh kmitů, které vzniknou po náhodné výchylce při první třísce. Vzhledem k tomu, že

$$z = v \cdot t,$$

je možno psát

$$y_1 = 2jA \cdot e^{-\frac{\lambda}{v} \cdot z} \cdot \sin \frac{\omega z}{v}.$$

Tím jsme obdrželi výraz, udávající tvar zvlněné plochy při první třísce v souřadnicích y, z . Proměnlivá hloubka třísky při druhém zdvihu od místa 0 bude

$$h_2 = y_1 - y_2,$$

t. j.

$$h_2 = 2jA \cdot e^{-\frac{\lambda}{v} \cdot z} \cdot \sin \frac{\omega}{v} \cdot z - y_2.$$

Řezná síla se bude vzhledem k z měnit:

$$P_{v2} = r_y \left(2jA e^{-\frac{\lambda}{v} \cdot z} \cdot \sin \frac{\omega}{v} \cdot z - y_2 \right)$$

nebo vzhledem k času

$$P_{v2} = r_y (2jA \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sin \omega t - y_2).$$

Rovnice pro pohyb kmitavého systému během druhé tříscky je pak

$$m\ddot{y}_2 + c\dot{y}_2 + ky_2 = r_y 2jA e^{-\lambda t} \sin \omega t - ry_2,$$

čili

$$m\ddot{y}_2 + c\dot{y}_2 + (k + r_y) y_2 = r_y 2jA e^{-\lambda t} \sin \omega t$$

nebo vzhledem k (18) až (20)

$$\ddot{y}_2 - (a + b) \dot{y}_2 + aby_2 = \frac{r_y}{m} \cdot A \cdot (e^{at} - e^{bt}). \quad (43)$$

Při použití označení (21).

$$\ddot{y}_2 - (a + b) \dot{y}_2 + aby_2 = \frac{r_y}{m} \cdot F_1(t). \quad (44)$$

Rovnice pro kmitavý pohyb ve směru y během druhého řezu má takový tvar, že levá strana je shodná s levou stranou pohybové rovnice pro první řez a na pravé straně je integrál rovnice pro první řez, násobený $\frac{r_y}{m}$. Analogický bude i přechod od výrazu pro druhý řez k výrazu pro třetí řez atd.

b) Rovnice kmitání při n -té třísce

Matematicky je naše fyzikální úloha dána tak, že je třeba nalézt řešení pro libovolný člen posloupnosti rovnic, v níž všechny členy mají shodnou levou stranu

$$\ddot{y}_n - (a + b) \dot{y}_n + aby_n$$

a pravá strana je dána integrálem předcházejícího členu, násobeným $\frac{r_y}{m}$. Pohybová rovnice pro n -tý řez je tedy:

$$\ddot{y}_n - (a + b) \dot{y}_n + aby_n = \frac{r_y}{m} F_{(n-1)}(t) \quad (45)$$

Integrály F_n všech členů posloupnosti (až na F_1) musí vyhovovat počátečním podmínkám

$$y_n(0) = 0, \quad \dot{y}_n(0) = 0.$$

Řešení této úlohy provedeme operátorovým způsobem. Použijeme Laplaceovy transformace:

$$\left. \begin{aligned} L\{y(t)\} &= Y(p), \\ L\{\dot{y}(t)\} &= pY(p), \\ L\{\ddot{y}(t)\} &= p^2Y(p). \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{vzhledem k počátečním} \\ \text{podmínkám} \end{array}$$

Poněvadž je

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a},$$

nabude rovnice (43) tvaru

$$p^2Y(p) - pY(p) \cdot (a + b) + abY(p) = \frac{r_y}{m} A \left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-b} \right),$$

t. j.

$$(p-a)(p-b)Y(p) = \frac{r_y}{m} A \frac{a-b}{(p-a)(p-b)},$$

a tedy

$$Y(p) = \frac{r_y}{m} \frac{A(a-b)}{(p-a)^2(p-b)^2}. \quad (46)$$

Hledaným řešením rovnice (22) je tedy originál $y_2(t) = F_2(t)$ k obrazu $Y(p)$.

V dalším kroku budeme řešit rovnici

$$\ddot{y}_3 - (a + b) \dot{y}_3 + aby_3 = \frac{r_y}{m} \cdot F_2(t) \quad (47)$$

s počátečními podmínkami $y_3(0) = 0$, $\dot{y}_3(0) = 0$. Laplaceovou transformací obdržíme

$$(p-a)(p-b)Y = \frac{r_y}{m} L\{F_2(t)\} = \frac{r_y^2}{m^2} \cdot \frac{A(a-b)}{(p-a)^2(p-b)^2},$$

odkud

$$Y = \frac{r_y^2}{m^2} \cdot \frac{A(a-b)}{(p-a)^3(p-b)^3} \text{ atd.} \quad (48)$$

Obecně n -tý krok má řešení, jehož obrazem je

$$Y(p) = \frac{r_y^{n-1}}{m^{n-1}} \cdot \frac{A(a-b)}{(p-a)^n(p-b)^n}. \quad (49)$$

K tomuto obrazu hledáme předmět. Provedeme rozklad v parciální zlomky:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p-a)^n(p-b)^n} &= \frac{A_1}{p-a} + \frac{A_2}{(p-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(p-a)^n} + \\ &+ \frac{B_1}{(p-b)} + \frac{B_2}{(p-b)^2} + \dots + \frac{B_n}{(p-b)^n}; \end{aligned}$$

označíme-li

$$\frac{B_1}{p-b} + \frac{B_2}{(p-b)^2} + \dots + \frac{B_n}{(p-b)^n} = H(p),$$

obdržíme po vynásobení $(p - a)^n$ identitu:

$$\frac{1}{(p - b)^n} \equiv A_1(p - a)^{n-1} + A_2(p - a)^{n-2} + \dots + A_n + (p - a)^n H(p),$$

$$\frac{1}{(p - b)^n} \equiv (p - a)^n H(p) + \sum_{k=1}^n A_k(p - a)^{n-k}.$$

Derivujeme-li ji s -krát, obdržíme

$$(-n)(-n-1)\dots(-n-s+1)(p-b)^{-n-s} = \sum_{k=1}^n A(n-k)(n-k-1)\dots \\ \dots(n-k-s+1)(p-a)^{n-k-s} + [(p-a)^n H(p)]^s.$$

Pro $p = a$ zbude

$$(-1)^s \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+s-1)}{(a-b)^{n+s}} = A_{n-s} \cdot s!$$

Levou stranu této rovnice lze psát

$$\frac{(-1)^s}{(a-b)^{n+s}} \binom{n+s-1}{s} \cdot s!,$$

takže

$$A_{n-s} = \frac{(-1)^s}{(a-b)^{n+s}} \binom{n+s-1}{s}.$$

Analogicky

$$B_{n-s} = \frac{(-1)^s}{(b-a)^{n+s}} \binom{n+s-1}{s},$$

je tedy

$$\frac{1}{(p-a)^n (p-b)^n} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{A_{n-s}}{(p-a)^{n-s}} + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{B_{n-s}}{(p-b)^{n-s}} = \\ = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\binom{n+s-1}{s}}{(a-b)^{n+s}} \left[\frac{(-1)^s}{(p-a)^{n-s}} + \frac{(-1)^n}{(p-b)^{n-s}} \right].$$

Jelikož je

$$L\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}},$$

tedy

$$L = \{t^{n-s-1}\} e^{at} = \frac{(n-s-1)!}{(p-a)^{n-s}}$$

a hledaný originál

$$y_n(t) = \frac{r_y^{n-1}}{m^{n-1}} A(a-b) \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{(a-b)^{n+s}} \frac{\binom{n+s-1}{s}}{(n-s-1)!} t^{n-s-1} [(-1)^s e^{at} + \\ + (-1)^n e^{bt}]; \quad (50)$$

a poněvadž podle (35) je $a - b = 2j\omega$, můžeme psát

$$y_n = \frac{r_y^{n-1}}{m^{n-1}} \cdot A \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{(2j\omega)^{n+s-1}} \frac{\binom{n+s-1}{s}}{(n-s-1)!} t^{n-s-1} e^{-\lambda t} [(-1)^s e^{j\omega t} + (-1)^n e^{-j\omega t}]. \quad (51)$$

c) Podmínka nestability a podmínka stability

Výraz (51) popisuje obecně kmitavý pohyb, který vznikne při odebrání n -té třísy. Upravíme ho tak, že velikost výchylky porovnáme s počáteční výchylkou $A_0 = 2jA$:

$$\frac{y_n}{A_0} = \left(\frac{r_y}{m}\right)^{n-1} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{\omega^{n+s-1}} \cdot \frac{1}{2^{n+s-1}} \times \\ \times \frac{\binom{n+s-1}{s}}{(n+s-1)!} t^{n-s-1} e^{-\lambda t} \frac{(-1)^s \cdot e^{j\omega t} + (-1)^n e^{-j\omega t}}{2j^{n+s}}. \quad (52)$$

Hodnota ω , která se vyskytuje ve výrazu (52), značí kruhovou frekvenci kmitání, které vznikne při každé třísce. Je to zároveň frekvence vlastních tlumených kmitů daného systému v silovém poli třísy (určeném hodnotou r_y). Je dána výrazem (36). Pro zjednodušení dalšího postupu připustíme určitou, avšak vzhledem k běžným hodnotám útlumu naprosto zanedbatelnou nepřesnost,

a ve výrazu (36) zanedbáme velmi malý člen $\frac{c^2}{2m}$. Tím dosazujeme za ω kruhovou frekvenci netlumených vlastních kmitů místo kruhové frekvence tlumených vlastních kmitů. Obě tyto frekvence se v praxi velmi málo liší. Bude pak

$$\omega = \sqrt{\frac{k+r_y}{m}}, \\ \lambda = \frac{c}{2m} = \frac{c}{c_k} \cdot \omega,$$

kde $c_k = 2m\omega$ je kritické tlumení.

Zavedeme označení poměrné tuhosti \varkappa_y jako podíl mezi tuhostí pružiny systému a hloubkovým koeficientem r_y :

$$\varkappa_y = \frac{k}{r_y}$$

a přepíšeme výraz (52) na

$$\frac{y_n}{A_0} = \left(\frac{1}{1+\varkappa_y}\right)^{n-1} \cdot e^{-\frac{c}{c_k} \cdot \omega t} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{2^{n+s-1}} \cdot \frac{\binom{n+s-1}{s}}{(n-s-1)!} (\omega t)^{n-s-1} \times \\ \times \frac{(-1)^s e^{j\omega t} + (-1)^n e^{-j\omega t}}{2j^{n+s}}. \quad (53)$$

Hodnota času se ve výrazu (53) vyskytuje vždy ve spojení s kruhovou frekvencí kmitání ve formě součinu ωt . Tato hodnota je bezrozměrná a značí 2π násobný počet kmitů, vykonaných od počátku do okamžiku t .

Výraz (53) udává poměr výchylky kmitavého systému po určitém vykonaném počtu kmitů jako funkci hodnot systému k , $\frac{c}{c_k}$ a velikosti třisky, charakterizované hodnotou r_y .

Pro prvních šest třisek je průběh poměrné výchylky dán výrazy:

$$\begin{aligned} n = 1: \quad \frac{y_1}{A_0} &= e^{-\frac{c}{c_k} \cdot \omega t} \cdot \sin \omega t, \\ n = 2: \quad \frac{y_2}{A_0} &= \frac{1}{1 + \kappa_y} \cdot e^{-\frac{c}{c_k} \cdot \omega t} [0,5 \sin \omega t - 0,5 \omega t \cos \omega t], \\ n = 3: \quad \frac{y_3}{A_0} &= \left(\frac{1}{1 + \kappa_y} \right)^2 \cdot e^{-\frac{c}{c_k} \cdot \omega t} [0,375 \sin \omega t - 0,375 \omega t \cos \omega t - \\ &\quad - 0,125 (\omega t)^2 \sin \omega t], \\ n = 4: \quad \frac{y_4}{A_0} &= \left(\frac{1}{1 + \kappa_y} \right)^3 \cdot e^{-\frac{c}{c_k} \cdot \omega t} [0,312 \sin \omega t - 0,312 \omega t \cos \omega t - \\ &\quad - 0,125 (\omega t)^2 \sin \omega t + 0,0204 (\omega t)^3 \cos \omega t], \\ n = 5: \quad \frac{y_5}{A_0} &= \left(\frac{1}{1 + \kappa_y} \right)^4 \cdot e^{-\frac{c}{c_k} \cdot \omega t} [0,274 \sin \omega t - 0,274 \omega t \cos \omega t - \\ &\quad - 0,117 (\omega t)^2 \sin \omega t + 0,0252 (\omega t)^3 \cos \omega t + 0,0026 (\omega t)^4 \sin \omega t], \\ n = 6: \quad \frac{y_6}{A_0} &= \left(\frac{1}{1 + \kappa_y} \right)^5 \cdot e^{-\frac{c}{c_k} \cdot \omega t} [0,246 \sin \omega t - 0,246 \omega t \cos \omega t - \\ &\quad - 0,1095 (\omega t)^2 \sin \omega t + 0,0274 (\omega t)^3 \cos \omega t + 0,0026 (\omega t)^4 \sin \omega t - \\ &\quad - 0,00026 (\omega t)^5 \cos \omega t]. \end{aligned} \quad (54)$$

Označme

$$Y_n(t) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{2^{n+s-1}} \cdot \frac{(n+s-1)!}{s!(n-s-1)!} (\omega t)^{n-s-1} \cdot \frac{(-1)^s e^{j\omega t} + (-1)^n \cdot e^{-j\omega t}}{2j^{n+s}}. \quad (54)$$

Z uvedeného příkladu (54) vidíme, že funkce Y_n obsahuje n členů se stoupajícími mocninami základu ωt , s klesajícími koeficienty a že ji lze rozdělit na dva mnohočleny $B_n \cdot \sin \omega t$, $C_n \cos \omega t$, které mají střídavá znaménka jednotlivých členů. Průběh funkce Y_n s časem je kmitavý s periodou $\frac{2\pi}{\omega}$. Zajímá nás pouze obálka Y_{0n} amplitud této funkce, a nikoli její podrobný průběh během jedné periody. Y_{0n} je opět funkcí času a je dána

$$Y_{0n}(t) = \sqrt{B_n^2 + C_n^2}. \quad (56)$$

Hodnota Y_{0n} s časem stále narůstá. Poměrná výchylka $\frac{y_n}{A_0}$ má rovněž kmitavý průběh a její obálka je dána výrazem

$$\frac{y_{0n}}{A_0} = \left(\frac{1}{1 + \kappa_y} \right)^{n-1} \cdot e^{-\frac{c}{c_k} \cdot \omega t} \cdot Y_{0n}. \quad (57)$$

Obálka amplitud $\frac{y_{0n}}{A_0}$ s časem nejprve narůstá, pro určitý čas nabývá maxima a pak opět klesá.

Tak na př. pro druhou třisku je poměrná amplituda kmitů

$$\frac{y_{02}}{A_0} = \frac{1}{1 + \kappa_y} \cdot e^{-\frac{c}{c_k} \cdot \omega t} \cdot 0,5 \sqrt{1 + (\omega t)^2}. \quad (58)$$

Najdeme hodnotu $(\omega t)_{\max}$, pro kterou $\frac{y_{02}}{A_0}$ nabývá maxima:

$$-\frac{c}{c_k} \cdot e^{-\frac{c}{c_k} \cdot (\omega t)_{\max}} \cdot \sqrt{1 + (\omega t)_{\max}^2} + e^{-\frac{c}{c_k} \cdot (\omega t)_{\max}} \cdot \frac{(\omega t)_{\max}}{\sqrt{1 + (\omega t)_{\max}^2}} = 0.$$

Odtud

$$(\omega t)_{\max, 2} = \frac{1}{2 \frac{c}{c_k}} \pm \frac{1}{2 \frac{c}{c_k}} \sqrt{1 - 4 \left(\frac{c}{c_k} \right)^2} = \frac{1}{\frac{c}{c_k}}. \quad (59)$$

Ve výrazu (59) jsme zanedbali veličinu $4 \left(\frac{c}{c_k} \right)^2$ jako velmi malou. Dosazením (59) do (58) obdržíme maximální výchylku při druhé třisce

$$\frac{y_{02\max}}{A_0} = \frac{1}{1 + \kappa_y} \cdot e^{-1} \cdot 0,5 \frac{1}{\frac{c}{c_k}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{c}{c_k} \right)^2}.$$

Pro běžné hodnoty $\frac{c}{c_k}$ můžeme s dostatečnou přibližností napsat:

$$\frac{y_{02\max}}{A_0} = \frac{0,184}{(1 + \kappa_y) \cdot \frac{c}{c_k}}. \quad (60)$$

Stanovíme nyní požadavek, aby amplituda kmitání při obrábění druhou třiskou narostla na hodnotu původní náhodné výchylky při první třisce A_0 nebo na hodnotu vyšší:

$$\frac{y_{02\max}}{A_0} \geq 1,$$

t. j.

$$(1 + \kappa_y) \cdot \frac{c}{c_k} \leq 0,184. \quad (61)$$

Rozvedeme-li opět označení κ_y , přepíšeme (61) na

$$r_y \geq \frac{k \cdot \frac{c}{c_k}}{0,184 - \frac{c}{c_k}} \quad (62)$$

Při určitých hodnotách tuhosti k pružiny systému, jeho poměrného tlumení $\frac{c}{c_k}$ a při určitých řezných podmínkách, charakterisovaných hodnotou hloubkového koeficientu r_y , může tedy při druhé třísece vzniknout kmitání, které dosáhne stejné nebo větší amplitudy, než byla náhodná výchylka při první třísece.

Zvětšením hloubkového koeficientu r_y , t. j. zvýšením řezných podmínek (na př. zvětšením šířky třísky), zvyšuje se stupeň reprodukce $\frac{y_{02max}}{A_0}$, zvětšením tuhosti k nebo poměrného tlumení $\frac{c}{c_k}$ systému se stupeň reprodukce snižuje.

Z (62) vyplývá, že pro poměrné tlumení $\frac{c}{c_k}$

$$\frac{c}{c_k} > 0,184$$

nemůže kmitání při druhé třísece dosáhnout vůbec stejně veliké amplitudy, jako byla počáteční amplituda tlumeného kmitání při první třísece.

Průběh obálky amplitud kmitání daný výrazem (54) pro $n = 2$ je jiný než průběh obálky amplitud při první třísece. Ukážeme, že i v případě, kdy maximální amplituda kmitání při druhé třísece dosáhne pouze právě hodnoty A_0 , je délkový rozsah zvlnění, které má větší amplitudu než libovolně zvolená hodnota A (menší než A_0), větší při druhé třísece než při první třísece.

Tato skutečnost vede pak k tomu, že reprodukce kmitání s druhé třísky na třetí má větší hodnotu než reprodukce kmitání s první třísky na druhou. I když počáteční výchylka tlumeného vlastního kmitání při první třísece byla A_0 a maximální výchylka vynuceného kmitání při druhé třísece y_{02} — byla také právě A_0 , naroste pak maximální výchylka kmitání při třetí třísece y_{03max} na hodnotu větší než A_0 .

Zvolíme takové hodnoty κ_y a $\frac{c}{c_k}$, pro které je (61) splněna jako rovnice. Tak na př. pro poměrné tlumení

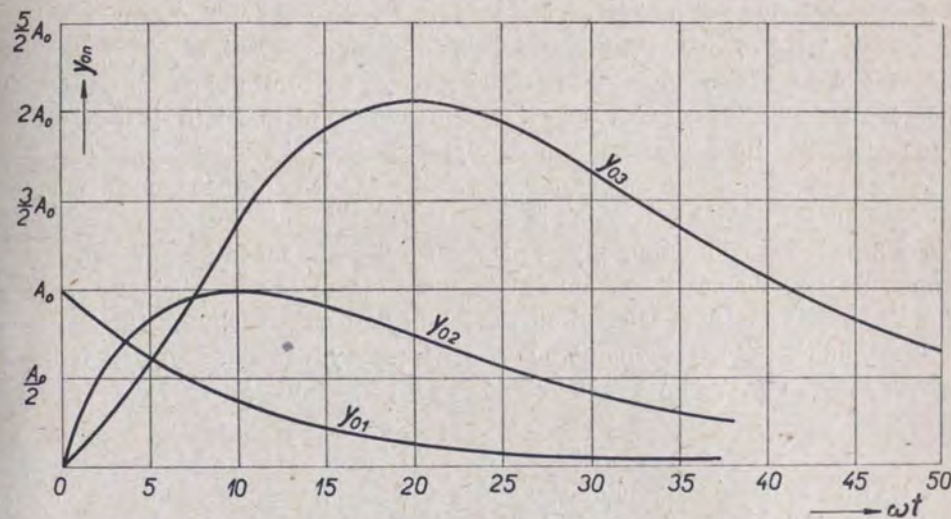
$$\frac{c}{c_k} = 0,1 \text{ obdržíme } \kappa_y = 0,84.$$

Obálka amplitud kmitání při druhé třísece je pak

$$y_{02} = A_0 \cdot \frac{1}{1,84} \cdot e^{-0,1\omega t} \cdot 0,5 \sqrt{1 + (\omega t)^2}.$$

Její průběh v porovnání s průběhem obálky amplitud při první třísece $y_{01} = A_0 \cdot e^{-0,1\omega t}$ je znázorněn na obr. 71.

Vidíme, že proti první třísece je tu zvlněna část povrchu ještě před dosažením amplitudy A_0 a že potom amplituda zvlnění pomaleji ubývá. Jestliže pak obrábíme třetí třískou, působí periodicky proměnlivá část řezné síly jako vynucující síla na kmitavý systém již před dosažením maxima a potom působí na systém periodicky proměnlivá síla větší amplitudy než působila síla vyvolaná zvlněním



Obr. 71.

vzniklým při první třísece na systém při obrábění druhé třísky. Zcela přirozeným je pak důsledek, že při obrábění třetí třísky narůstá amplituda kmitů větší, než byla maximální amplituda kmitů při druhé třísece.

Na obr. 71 je uveden průběh obálky kmitání při třetí třísece y_{03} , vypočtený z (54) pro $n = 3$, při použití hodnot κ_y a $\frac{c}{c_k}$ našeho příkladu. Vidíme, že při třetí třísece dosáhne amplituda kmitů hodnoty $2,05 A_0$.

Při čtvrté, páté třísece atd., t. j. při všech dalších třískách, maximální amplituda kmitání $(y_{0n})_{max}$ stále narůstá a délkový rozsah kmitání s amplitudou větší než určitá libovolně zvolená hodnota se stále zvětšuje.

Stanovíme-li požadavek, aby maximální amplituda kmitání při n -té třísece dosáhla hodnoty stejně veliké, jako byla hodnota náhodné výchylky A_0 při první třísece, není zřejmě nutné, aby této hodnoty dosáhla již maximální amplituda kmitání při druhé třísece.

Takový případ, při kterém dosáhne popsaným postupným způsobem rezonančního rozkmitávání maximální amplituda kmitů po libovolně velkém počtu

třísek n hodnoty prvotní výchylky A_0 , označíme jako případ nestabilní. Opačný případ, při kterém ani po nekonečně velkém počtu třísek nedosáhne amplituda vynuceného kmitání hodnoty A_0 , označíme jako stabilní.

Z uvedeného vyplývá, že sice všechny případy, které splňují podmínku (61) nebo (62), jsou nestabilní, že však mohou být nestabilní i případy, pro které je na př. hodnota r_y poněkud menší, než udává (62). Nesplnění podmínky (62) neznamená tedy vždy stabilitu. Podmínku (62) můžeme prohlásit za minorisovanou podmínku nestability.

Jestliže se při určité n -té třisce hodnota $(y_{0n})_{\max}$ blíží hodnotě A_0 a n je dostatečně velké, liší se velikost amplitud y_{0n} ve velkém okolí hodnoty $(y_{0n})_{\max}$ velmi málo od této hodnoty. Zvlnění obrobené plochy je v tomto okolí téměř rovnoměrné a na kmitavý systém působí v tomto okolí při další $(n+1)$ -té třisce vynucující síla téměř konstantní amplitudy.

Majorisujeme pro stanovení podmínky stability uvedený průběh tím, že budeme předpokládat, že obráběná plocha je zvlněná s konstantní hloubkou vln po celé délce. Stanovíme podmínku, aby se při následující třisce ustálilo kmitání, jehož amplituda nebude větší než amplituda vln rovnoměrně zvlněného povrchu. Tím stanovíme požadovanou podmínku stability s určitou bezpečností.

Amplitudu vlnitosti rovnoměrně zvlněné plochy označíme y_{0n} . Pořadnice tohoto povrchu vzhledem k rovnoměrně se pohybujícímu nástroji je

$$y_n = y_{0n} \sin \omega t.$$

Výchylku kmitavého systému spojeného s nástrojem při obrábění uvedeného povrchu značíme y_{n+1} . Střídavá složka ΔP_y řezné síly v směru Y je

$$\Delta P_y = r_y(y_n - y_{n+1})$$

a rovnice kmitavého pohybu y_{n+1}

$$m\ddot{y}_{n+1} + c\dot{y}_{n+1} + ky_{n+1} = r_y(y_n - y_{n+1}),$$

čili

$$m\ddot{y}_{n+1} + c\dot{y}_{n+1} + (k + r_y)y_{n+1} = r_y \cdot y_{0n} \cdot \sin \omega t.$$

Jestliže opět přibližně položíme $\omega = \frac{k + r_y}{m}$, je pak známé řešení amplitudy $y_{0,n+1}$ ustáleného kmitání y_{n+1} :

$$y_{0,n+1} = \frac{r_y \cdot y_{0n}}{c \sqrt{\frac{k + r_y}{m}}}.$$

Zavedeme-li hodnotu poměrného tlumení $c_k = 2\sqrt{(k + r_y) \cdot m}$, obdržíme

$$y_{0,n+1} = y_{0n} \cdot \frac{r_y}{2 \frac{c}{c_k} (k + r_y)} = y_{0n} \cdot \frac{1}{2 \frac{c}{c_k} (\kappa_y + 1)}$$

Odtud pak podmínka stability

$$y_{0,n+1} \leq y_{0n}$$

čili

$$(1 + \kappa_y) \cdot \frac{c}{c_k} \geq 0,5 \quad (63)$$

nebo též

$$r_y \leq \frac{k \cdot \frac{c}{c_k}}{0,5 - \frac{c}{c_k}}. \quad (64)$$

Všechny případy, které splňují podmínku (63), (64), jsou stabilní. Vzhledem k tomu, že jsme skutečný průběh řezné síly majorisovali, jsou stabilní i některé případy, které tyto podmínky nesplňují.

Mez stability, která odděluje stabilní případy od nestabilních, je zřejmě opět dána ve tvaru

$$(1 + \kappa_y) \frac{c}{c_k} = K;$$

přítom hodnota K je větší než 0,184 — sr. (61) — a menší nebo rovna 0,5 — sr. (63). Její přesné stanovení je však obtížné a rozsah, ve kterém stabilitu neurčíme, daný rozdílem mezi podmínkami (61) a (63), je poměrně malý, takže se s uvedenými podmínkami spokojíme.

Vidíme, že o stabilitě případu rozhoduje tuhost k pružiny systému, jeho poměrné tlumení $\frac{c}{c_k}$ a řezné podmínky zastoupené hodnotou r_y .

Vidíme, že se stabilita případu nemění, t. j. případ zůstává stabilní, jestliže při zvýšení řezných podmínek zvětšíme tuhost k pružiny systému tolikrát, kolikrát se zvětšila hodnota hloubkového koeficientu r_y (t. j. na př. kolikrát se zvětšila šířka třísky). Kolikrát tužší pružinu má systém, tolikrát vyšší řezné podmínky možno volit, aniž vznikne postupně narůstající kmitání.

Vidíme, že zvyšováním poměrného tlumení systému podstatně zvyšujeme stabilitu systému, t. j. zvyšujeme řezné podmínky, při kterých se obrábění stává nestabilní. Při poměrném tlumení

$$\frac{c}{c_k} > 0,5$$

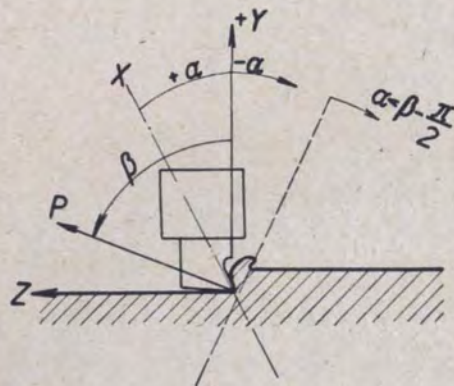
je systém stabilní při obrábění za jakýchkoliv řezných podmínek.

d) Stabilita systému různě směrově orientovaného

Až dosud jsme předpokládali, že daný stupeň volnosti kmitavého systému připouští kmitání ve směru Y , kolmém k obráběnému povrchu. Vyšetříme

aspoň přibližně, jak se změní podmínka stability, jestliže směr kmitání v daném stupni volnosti je odchýlen od směru $+Y$ o úhel α (obr. 72). Kmitání se děje ve směru X .

Předpokládáme při první třísce náhodný vznik tlumeného kmitání



Obr. 72.

Tím se vytvoří zvlněný povrch, jehož profil není sinusový, neboť kmitání ve směru X se rozkládá jak do směru Y , tak do směru Z . Relativní dráha nástroje proti obrobku v směru Z je dána rozdílem dráhy proběhnuté řeznou rychlostí a dráhy proběhnuté při kmitavém pohybu. Proto pak část profilu vlny, spadající dovnitř obráběného materiálu je pro $\alpha > 0$ větší než část profilu vlny vystupující směrem ven z obráběného materiálu.

Pro přibližné vyšetření tuto nesymetrii profilu vln na obrobeném povrchu zanedbáme a píšeme

$$y_1 = A_0 \cdot \cos \alpha \cdot e^{-\frac{c}{c_k} \omega t} \cos \omega t.$$

Hloubkový koeficient r byl definován jako koeficient úměrnosti mezi silou P ve směru β a tloušťkou třísky. Při druhé třísce, při které vzniká kmitání x_2 s průmětem y_2 do směru Y , je tedy řezná síla:

$$P = P_{st} + r(y_1 - y_2),$$

$$P = P_{st} + r \cos \alpha (x_1 - x_2).$$

Její složka, spadající do směru kmitání X , je

$$P_x = P_{st} \cdot \cos(\beta - \alpha) + r \cdot \cos \alpha \cos(\beta - \alpha) (x_1 - x_2). \quad (65)$$

Rovnice kmitavého pohybu x_2 je pak při vynechání konstantní síly P_{st} , která u předpokládaného lineárního systému kmitavý pohyb neovlivňuje:

$$m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2 = r \cos \alpha \cos(\beta - \alpha) (x_1 - x_2),$$

čili

$$m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + [k + r \cos \alpha \cos(\beta - \alpha)] x_2 = r \cos \alpha \cos(\beta - \alpha) A_0 e^{-\frac{c}{c_k} \omega t} \cos \omega t. \quad (66)$$

Při porovnání (66) a (44) vidíme, že rozdíl mezi oběma úlohami je pouze v tom, že místo hodnoty

$$r_y = r \cos \beta,$$

použité v rovnici (44), používáme v rovnici (66) hodnoty

$$r \cos \alpha \cos(\beta - \alpha).$$

Analogicky bude pak pro náš případ podmínka stability (64) platit v tvaru

$$r \cdot \cos \alpha \cos(\beta - \alpha) \leq \frac{k \cdot \frac{c}{c_k}}{0,5 - \frac{c}{c_k}}. \quad (67)$$

Veličina r je dána řeznými podmínkami. Vidíme, že nyní o stabilitě systému rozhodují nejen hodnoty r , k , $\frac{c}{c_k}$, ale i směrová orientace systému, daná hodnotou α .

Vyšetříme její vliv na stabilitu postupného rozkmitávání.

Označme

$$b = \cos \alpha \cos(\beta - \alpha). \quad (68)$$

Můžeme psát též

$$b = \frac{\cos(2\alpha - \beta) + \cos \beta}{2}. \quad (68a)$$

Odtud vidíme, že hodnota b je maximální kladná pro hodnotu:

$$\alpha = \frac{\beta}{2}.$$

Systém se směrovou orientací $\alpha = \frac{\beta}{2}$ je nejméně stabilní, neboť přestává být stabilní při nejmenší hodnotě r , t. j. při nejnižších řezných podmínkách.

Z (68) plyne dále, že pro

$$\beta - \alpha \geq \frac{\pi}{2},$$

čili

$$\alpha \geq \beta - \frac{\pi}{2} \quad \text{je} \quad b \geq 0. \quad (69)$$

Je-li podmínka (69) splněna, je systém stabilní pro každou hodnotu r , čili pro jakékoli řezné podmínky. Oblast směrů kmitání, pro které je systém vždy s hlediska postupného rozkmitávání stabilní, je vyznačena na obr. 72.

e) Závěr

Theoretické vyšetření ukázalo, že sama skutečnost postupného obrábění povrchu vytvořeného při předchozí třísce může za určitých podmínek vést k narůstajícímu kmitání, jehož frekvence je dána frekvencí vlastních kmitů řídicího systému. Vyšetření bylo provedeno pro řídicí kmitavý systém o jednom stupni volnosti.

Ukázalo se, že uvedenému postupnému narůstání lze zabránit (nebo že aspoň lze zvýšit řezné podmínky, při kterých vzniká) tím, že zvýšíme poměrné tlumení a tuhost pružiny řídicího systému.

Přibližné vyšetření dále ukázalo, že stabilitu systému silně ovlivňuje jeho směrová orientace.

Při vyšetřování byla předpokládána závislost řezné síly na tloušťce třísky, která je nejvýraznějším určovatelem velikosti řezné síly. Tím je dána závažnost vyšetřeného principu vzniku narůstajícího kmitání při obrábění.

Narůstající kmitání, řídicí se uvedeným principem, zařazujeme do skupiny samobuzených kmitů, neboť není vynucováno periodicky proměnlivou silou, nezávislou na kmitání samotném. Jde ovšem o zvláštní druh samobuzeného kmitání, neboť podmínky pro vznik periodicky proměnlivé síly, která udržuje a dává narůstat kmitání systému, jsou dány časově odděleně od jejího vzniku.

Závažnost tohoto zvláštního druhu samobuzeného kmitání je zvýšena tím, že jeho účinek je kombinován s účinkem primárního samobuzeného kmitání, které vzniká při obrábění i tehdy, jestliže je zvoleno takové uspořádání, při němž neobrábíme povrch vytvořený při předchozí tříse.

Účinek samobudícího mechanismu na kmitavý systém lze formálně vyjádřit tak, jako by samobudící pochod měnil pozitivní tlumení systému na negativní. Ukázali jsme význačnou úlohu velikosti pozitivního tlumení, jakou má při stanovení stability postupného rozkmitávání. Je-li pak tlumení systému sníženo primárním samobudícím pochodem, je postupné rozkmitávání tím intenzivnější.

Princip postupného rozkmitávání byl vyšetřen pro nejjednodušší případ, pro který existuje, t. j. pro kmitavý systém o jednom stupni volnosti.

U kmitavého systému o dvou a více stupních volnosti může vzniknout, jak dále ukážeme, primární nestabilita na základě jiného závažného principu samobuzeného kmitání, který jsme nazvali principem polohové vazby. Vypracování principu postupného rozkmitávání pro tyto složitější systémy by proto bylo vhodné provést v kombinaci s principem polohové vazby. Řešení takového kombinovaného principu je dosti složité a v této knize se jím nezabýváme. Provádíme řešení každého z obou uvedených principů zvlášť. Účinek jejich kombinace studujeme pak pouze experimentálně.

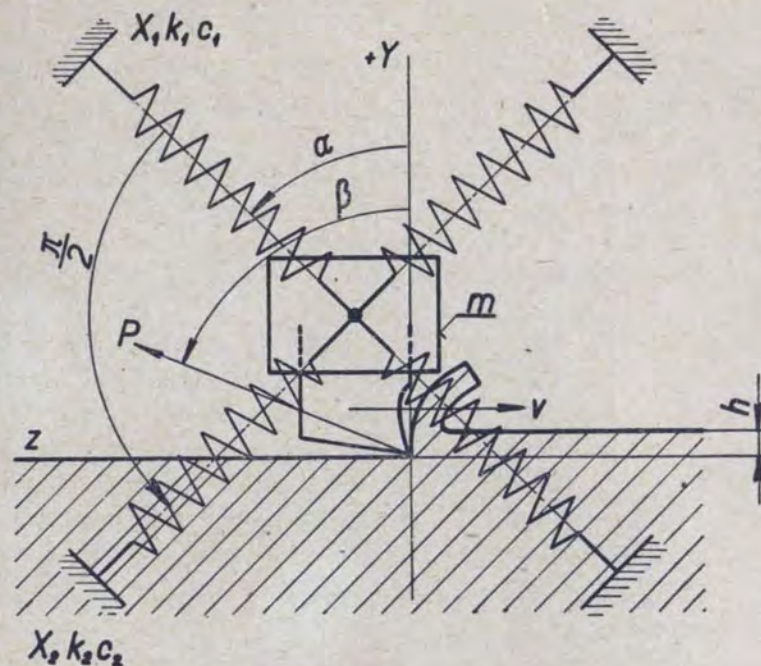
19. Princip polohové vazby — Kmitavý systém se dvěma na sebe kolmými pružinami a tlumením

a) Rovnice pohybu a její řešení

Vypracování principu polohové vazby, t. j. theoretické řešení otázek položených v kap. IV, 17 a vztahujících se k pohybu předpokládanému podle obr. 65, provedeme pro nejjednodušší případ kmitavého systému o dvou stupních vol-

nosti daný tím, že hmota systému je upevněna na dvou na sebe kolmých pružinách.

Řešení se bude vztahovat na dvojrozměrné, rovinné obrábění. Systém budeme na základě odůvodnění uvedeného v kap. IV, 17 považovat za lineární. Schema kmitavého systému, na který se naše řešení vztahuje, je uvedeno na obr. 73. Řídicí kmitavý systém si myslíme spojen s nástrojem. Obrobek v tomto případě



Obr. 73.

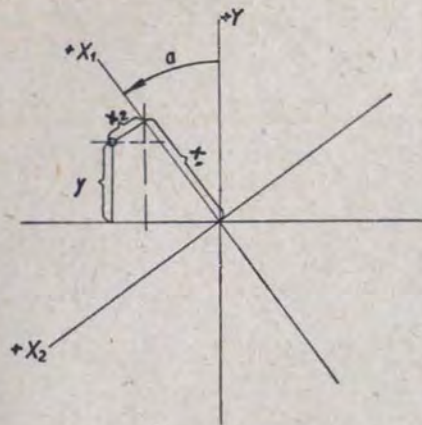
považujeme za dokonale tuhý. Stejně dobře by bylo možno kmitavý systém spojit s obrobkem a považovat nástroj za dokonale tuhý.

S nástrojem je spojena hmota m systému, která je zavěšena na dvou pružinách na sebe kolmých. Přímkou procházející břitem nástroje kolmo k obráběnému povrchu označíme Y . Řezná síla P , působící na nástroj, a tím na hmotu kmitavého systému, je odkloněna o úhel β od osy Y . Směr řezné síly předpokládáme konstantní. Směr, v němž leží pružina systému, která je v kvadrantu $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

označíme X_1 , směr druhé pružiny systému (ležící v kvadrantu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$) označíme X_2 . Tuhost pružiny ležící ve směru X_1 označíme k_1 , její tlumicí konstantu c_1 , tuhost pružiny ležící ve směru X_2 označíme k_2 a její tlumicí konstantu c_2 .

Nástroj se pohybuje rovnoměrnou rychlostí v . Budeme se zabývat pouze kmitavým pohybem nástroje, superponovaným na rovnoměrný pohyb rychlostí v .

Střední poloha nástroje, odpovídající stabilnímu obrábění, je dána hloubkou h pod obráběným povrchem. Při této poloze nástroje je těžiště systému v poloze O . Střední poloze nástroje odpovídá velikost řezné síly P_{stf} . Jestliže se poloha nástroje, a tedy i poloha těžiště systému, změní o hodnotu y (v kladném smyslu, t. j. hloubka řezu se zmenší), zmenší se velikost řezné síly o hodnotu ΔP na hodnotu P .



Obr. 74.

$$P = P_{stf} + \Delta P.$$

Změnu řezné síly pokládáme za úměrnou velikosti výchylky y s koeficientem úměrnosti r . Tento koeficient jsme v kap. II, 12d nazvali hloubkovým koeficientem řezné síly.

$$\begin{aligned} \Delta P &= -r \cdot y, \\ P &= P_{stf} - ry. \end{aligned} \quad (70)$$

Pohyb systému budeme popisovat vzhledem k souřadným osám X_1, X_2 , t. j. souřadnicemi x_1, x_2 . Řeznou sílu máme stanovenou jako funkci výchylky ve směru Y . Vyjádříme ji na základě převodu, znázorněného na obr. 74 jako funkci výchylek x_1 a x_2 :

$$y = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, \quad (71)$$

$$P = P_{stf} - rx_1 \cos \alpha + rx_2 \sin \alpha. \quad (72)$$

Napišeme pohybové rovnice pro směr x_1 a x_2 :

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 &= P_{stf} \cdot \cos(\beta - \alpha) - rx_1 \cos \alpha \cos(\beta - \alpha) + \\ &+ rx_2 \sin \alpha \cos(\beta - \alpha), \\ m\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 &= P_{stf} \cdot \sin(\beta - \alpha) - rx_1 \cos \alpha \sin(\beta - \alpha) + \\ &+ rx_2 \sin \alpha \sin(\beta - \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Konstantní sílu na pravé straně obou rovnic, která neovlivňuje kmitání systému, vypustíme a upravíme je:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + [k_1 + r \cos \alpha \cos(\beta - \alpha)] \cdot x_1 - r \sin \alpha \cos(\beta - \alpha) x_2 &= 0 \\ m\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + [k_2 - r \sin \alpha \sin(\beta - \alpha)] \cdot x_2 + r \cos \alpha \cos(\beta - \alpha) x_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (73a)$$

Vidíme, že v rovnici pro pohyb ve směru X_1 jsou obsaženy členy závislé na poloze, rychlosti a zrychlení ve směru X_1 a také člen závislý na poloze systému ve směru X_2 . Podobně rovnice pohybu ve směru X_2 obsahuje také člen závislý na poloze systému ve směru X_1 . Oba stupně volnosti jsou navzájem vázány

svými polohami. Proto jsme princip vycházející z rovnic (73a) nazvali principem polohové vazby. Sám o sobě název není zcela přesný, neboť simultánní rovnice vázané polohami nemusí vyjadřovat samobuzené kmitání; to záleží na formě této vazby. Náš princip je tedy principem zvláštní polohové vazby.

Řešení systému rovnic (73a) provedeme tak, že navrhneme řešení tvaru

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \xi_1 \cdot e^{st} \\ x_2 &= \xi_2 \cdot e^{st} \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

a dosadíme (74) do (73a):

$$\left. \begin{aligned} [ms^2 + c_1s + k_1 + r \cos \alpha \cos(\beta - \alpha)] \xi_1 - r \sin \alpha \cos(\beta - \alpha) \cdot \xi_2 &= 0 \\ [ms^2 + c_2s + k_2 - r \sin \alpha \sin(\beta - \alpha)] \xi_2 + r \cos \alpha \cos(\beta - \alpha) \cdot \xi_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Systém (75) homogenních rovnic pro ξ_1 a ξ_2 má nenulové řešení pouze tehdy, je-li determinant soustavy roven nule:

$$\begin{vmatrix} ms^2 + c_1s + k_1 + r \cos \alpha \cos(\beta - \alpha), & -r \sin \alpha \cos(\beta - \alpha) \\ r \cos \alpha \sin(\beta - \alpha), & ms^2 + c_2s + k_2 - r \sin \alpha \sin(\beta - \alpha) \end{vmatrix} = 0 \quad (76)$$

Rozepsáním (76) obdržíme rovnici pro s — charakteristickou rovnici soustavy (73a):

$$\begin{aligned} m^2s^4 + & \\ + ms^3(c_1 + c_2) + & \\ + s^2\{m[k_1 + k_2 - r \sin \alpha \sin(\beta - \alpha) + r \cos \alpha \cos(\beta - \alpha)] + c_1c_2\} + & \\ + s\{c_1[k_2 - r \sin \alpha \sin(\beta - \alpha)] + c_2[k_1 + r \cos \alpha \cos(\beta - \alpha)]\} + & \\ + k_1k_2 - k_1r \sin \alpha \sin(\beta - \alpha) + k_2r \cos \alpha \cos(\beta - \alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Rovnice (77) má čtyři kořeny s_1, s_2, s_3, s_4 , které mohou být buď všechny reálné,

nebo dva reálné a dva komplexní sdružené,
nebo dvě dvojice komplexních sdružených kořenů.

Dosazením těchto kořenů do (74) obdržíme řešení pohybové rovnice (73a):

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= C_1e^{s_1t} + C_2e^{s_2t} + C_3e^{s_3t} + C_4e^{s_4t}, \\ x_2 &= D_1e^{s_1t} + D_2e^{s_2t} + D_3e^{s_3t} + D_4e^{s_4t}. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

b) Význam kořenů charakteristické rovnice (77)

Reálné kořeny

Ty členy řešení (78), do kterých dosadíme reálné kořeny s_1, s_2, s_3, s_4 nebo s_1, s_2 , představují výchylky exponenciálně s časem

klesající pro $s < 0$

nebo

narůstající pro $s > 0$.

Jde tedy o nekmitavý pohyb stabilní nebo nestabilní. Větší význam pro náš problém mají kořeny komplexní.

Komplexní kořeny

Máme buď dva kořeny komplexní sdružené

$$\begin{aligned} s_3 &= \lambda_3 + j\omega_3, \\ s_4 &= \lambda_3 - j\omega_3, \end{aligned}$$

nebo všechny čtyři kořeny komplexní, dva a dva sdružené

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \lambda_1 + j\omega_1, \\ s_2 &= \lambda_1 - j\omega_1, \\ s_3 &= \lambda_2 + j\omega_2, \\ s_4 &= \lambda_2 - j\omega_2. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Ty členy řešení, do kterých dosadíme komplexní hodnoty s , představují kmitavý pohyb s kruhovou frekvencí ω , a to pohyb s amplitudou

klesající, jestliže $\lambda < 0$ — tlumené kmity, případ dynamicky stabilní, nebo narůstající, jestliže $\lambda > 0$ — samobuzené kmity, případ dynamicky nestabilní.

Náš problém se týká pouze kmitavého pohybu daného systému, a proto se budeme zabývat dále pouze komplexními kořeny charakteristických rovnic.

Uvidíme v dalším, že daný systém má nejvýše dva kořeny komplexní s kladnou reálnou částí λ_1 , které vedou na samobuzené kmitání.

c) Poměr amplitud a fázový vztah kmitů v obou hlavních směrech

Úplné řešení (78) závisí na počátečních podmínkách. Avšak i bez ohledu na počáteční podmínky lze určit vzájemný vztah pohybu v obou hlavních směrech. Tento vztah nás zajímá ovšem pouze pro případ dynamicky nestabilní (samobuzené kmitání), neboť bližší vyšetření kmitání stabilního případu (tlumené kmity) nemá praktického významu. Nestabilní případ je dán kořeny

$$s_{1,2} = \lambda_1 \pm j\omega_1,$$

kde

$$\lambda_1 > 0.$$

Základní rovnici (73a) musí vyhovovat i částečné její řešení

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}, \\ x_2 &= D_1 e^{s_1 t} + D_2 e^{s_2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Toto řešení můžeme psát také:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= e^{\lambda_1 t} A_1 \sin \omega_1 t, \\ x_2 &= e^{\lambda_1 t} \cdot \xi A_1 \sin (\omega_1 t + \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

kde jsme označili ξ poměr amplitud kmitů x_1 a x_2 ,

$$\xi = \frac{A_2}{A_1},$$

které obojí narůstají se stejným exponentem λ_1 a φ je konstantní fázový posun kmitů x_2 za x_1 , které mají obojí frekvenci $f = \frac{\omega_1}{2\pi}$. Pišme dále (81) takto

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= e^{\lambda_1 t} \cdot A_1 \cdot e^{j\omega_1 t}, \\ x_2 &= e^{\lambda_1 t} \cdot \xi \cdot A_2 \cdot e^{j(\omega_1 t + \varphi)} \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

a dosazením (82) do (73a) obdržíme:

$$\left. \begin{aligned} ms_1^2 + c_1 s_1 + [k_1 + r \cos \alpha \cos (\beta - \alpha)] - r \sin \alpha \cos (\beta - \alpha) \cdot \xi \cdot e^{j\varphi} &= 0 \\ ms_1^2 \cdot \xi e^{j\varphi} + c_2 s_1 \xi e^{j\varphi} + [k_2 - r \sin \alpha \sin (\beta - \alpha)] \cdot \xi \cdot e^{j\varphi} + &+ r \cos \alpha \cos (\beta - \alpha) \quad 0. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Obě rovnice (83) dávají stejné řešení pro součin $\xi \cdot e^{j\varphi}$, který vyjádříme

$$\begin{aligned} \xi e^{j\varphi} &= \frac{ms_1^2 + c_1 s_1 + k_1 + r \cos \alpha \cos (\beta - \alpha)}{r \sin \alpha \cos (\beta - \alpha)} = \\ &= \frac{m(\lambda_1^2 - \omega_1^2) + c_1 \lambda_1 + k_1 + r \cos \alpha \cos (\beta - \alpha) + j\omega_1(2\lambda_1 + 1)}{r \sin \alpha \cos (\beta - \alpha)} = \\ &= u + jv \end{aligned} \quad (84)$$

čili

$$\xi \cos \varphi + j\xi \sin \varphi = u + jv$$

a

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{u}, \quad \xi = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (85)$$

d) Podmínka stability

Obecné řešení charakteristické rovnice (77) jakožto rovnice čtvrtého stupně je příliš komplikované a prakticky nepoužitelné, neboť tvar výsledku je nepřehledný. Proto je v dalším provedeno její řešení pouze pro zvláštní numericky dané případy, t. j. pro zcela určité hodnoty $k_1, k_2, m, c_1, c_2, \alpha, \beta$. Pro tyto případy je vypočteno $\lambda_1, \omega_1, \xi, \varphi$.

Abychom odpověděli na základní otázku, za kterých podmínek (při kterých hodnotách daných parametrů) vzniknou samobuzené kmity, nepotřebujeme znát úplné řešení charakteristické rovnice. Postačí sestavit z jejich koeficientů t. zv. podmínky stability (Hurwitzovy podmínky), které udávají, kdy má nebo nemá charakteristická rovnice nějaký kořen s kladnou reálnou částí λ .

Předem provedeme úpravu charakteristické rovnice (77) a zavedeme bezrozměrné parametry.

Označíme

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha \cdot \sin (\beta - \alpha) &= \frac{\cos (2\alpha - \beta) - \cos \beta}{2} = a, \\ \cos \alpha \cdot \cos (\beta - \alpha) &= \frac{\cos (2\alpha - \beta) + \cos \beta}{2} = b, \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

pak také $\cos \beta = b - a$, $\cos (2\alpha - \beta) = a + b$.

Rovnici (77) krátíme r^2 a označíme

$$\sqrt{\frac{s}{r}} = z \quad (87)$$

Rovnici (77) s touto úpravou přepíšeme na

$$\begin{aligned} & z^4 + \\ & + z^4 \cdot \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{r \cdot m}} + \\ & + z^2 \left(\frac{k_1 + k_2}{r} + \frac{c_1 c_2}{r m} + \cos \beta \right) + \\ & + z \left[\frac{c_1}{\sqrt{r m}} \cdot \left(\frac{k_2}{r} - a \right) + \frac{c_2}{\sqrt{r m}} \left(\frac{k_1}{r} + b \right) \right] + \\ & + \frac{k_1 k_2}{r^2} - \frac{k_1}{r} a + \frac{k_2}{r} b = 0. \end{aligned} \quad (88)$$

Vzhledem k (87), kde r i m jsou vždy kladné, má rovnice (77) komplexní kořen s reálnou částí kladnou pouze tehdy, jestliže rovnice (88) má některý z kořenů komplexní s reálnou částí kladnou. Podmínky stability rovnice (88) jsou totožné s podmínkami stability rovnice (77).

Zavedeme bezrozměrné parametry:

$$\frac{k_1}{r} = \varkappa_1, \quad \frac{k_2}{r} = \varkappa_2 \quad (89)$$

jako poměr mezi tuhostí pružin a hloubkovým koeficientem r , který zastupuje souhrn řezných podmínek,

$$a \frac{c_1}{c_{1k}} = \gamma_1, \quad \frac{c_2}{c_{2k}} = \gamma_2 \quad (90)$$

jako poměr mezi tlumicími konstantami systému a kritickými tlumicími konstantami systému, které podle (9a) jsou

$$c_{1k} = 2m \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad c_{2k} = 2m \sqrt{\frac{k_2}{m}}.$$

Pak je

$$\frac{c_1}{\sqrt{r m}} = 2\gamma_1 \sqrt{\varkappa_1}, \quad \frac{c_2}{\sqrt{r m}} = 2\gamma_2 \sqrt{\varkappa_2}.$$

Rovnice (88) obdrží nyní tvar

$$\begin{aligned} & z^4 + \\ & + z^3 \cdot 2(\gamma_1 \sqrt{\varkappa_1} + \gamma_2 \sqrt{\varkappa_2}) + \\ & + z^2 \cdot (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cos \beta + 4\gamma_1 \gamma_2 \sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}) + \\ & + z \cdot 2[\gamma_1 \sqrt{\varkappa_1}(\varkappa_2 - a) + \gamma_2 \sqrt{\varkappa_2}(\varkappa_1 + b)] + \\ & + \varkappa_1 \varkappa_2 - a \varkappa_1 + b \varkappa_2 = 0. \end{aligned} \quad (91)$$

Napišeme-li rovnici (91) s označením koeficientů:

$$z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0 = 0,$$

pak jsou *podmínky stability*, t. j. podmínky, při jejichž splnění nemá žádný z kořenů rovnice (91) reálnou část kladnou $\lambda > 0$, dány nerovnicemi:

$$\left. \begin{aligned} & \text{I } A_0 > 0, \\ & \text{II } A_1 > 0, \\ & \text{III } A_2 > 0, \\ & \text{IV } A_3 > 0, \\ & \text{V } A_1 A_2 A_3 > A_1^2 + A_3^2 A_0. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Dosazením koeficientů rovnice (91) obdržíme:

$$\left. \begin{aligned} & \text{I } \varkappa_1 \varkappa_2 - a \varkappa_1 + b \varkappa_2 > 0, \\ & \text{II } \gamma_1 \sqrt{\varkappa_1}(\varkappa_2 - a) + \gamma_2 \sqrt{\varkappa_2}(\varkappa_1 + b) > 0, \\ & \text{III } \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cos \beta + 4\gamma_1 \gamma_2 \sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2} > 0, \\ & \text{IV } \gamma_1 \sqrt{\varkappa_1} + \gamma_2 \sqrt{\varkappa_2} > 0, \\ & \text{V } [\gamma_1 \sqrt{\varkappa_1}(\varkappa_2 - a) + \gamma_2 \sqrt{\varkappa_2}(\varkappa_1 + b)] [\varkappa_1 + \varkappa_2 + b - a + \\ & + 4\gamma_1 \gamma_2 \sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}] [\gamma_1 \sqrt{\varkappa_1} + \gamma_2 \sqrt{\varkappa_2}] > [\gamma_1 \sqrt{\varkappa_1}(\varkappa_2 - a) + \gamma_2 \sqrt{\varkappa_2}(\varkappa_1 + b)]^2 + \\ & + (\gamma_1 \sqrt{\varkappa_1} + \gamma_2 \sqrt{\varkappa_2})^2 \cdot (\varkappa_1 \varkappa_2 - a \varkappa_1 + b \varkappa_2). \end{aligned} \right\} \quad (92a)$$

Aby daný případ byl stabilní, t. j. aby žádný z kořenů charakteristické rovnice neměl kladnou reálnou část, musí být splněny všechny uvedené podmínky. Jestliže jediná z nich není splněna, není daný případ stabilní.

Podmínky III a IV jsou zřejmě vždy splněny, neboť všechny členy na levé straně nerovnic jsou kladné a nenulové. Protože koeficienty A_2 a A_3 jsou vždy kladné, je v případě nesplnění podmínky II nesplněna též podmínka V. Stačí tedy vyšetřovat pouze podmínku V nebo podmínku I. Avšak v podmínce I není obsaženo tlumení γ . Není-li tato podmínka splněna, vznikne nestabilita, bez ohledu na velikost tlumení; jde tedy zřejmě o nekmitavou nestabilitu. Kmitavá, dynamická nestabilita (samobuzené kmity) je potom dána pouze nesplněním podmínky V. Tu budeme dále vyšetřovat.

Nerovninu (92a) — V upravíme na:

$$4\gamma_1^2\gamma_2^2\sqrt{\kappa_1}\sqrt{\kappa_2}(\kappa_1 + \kappa_2 + \cos \beta) + 4\gamma_1\gamma_2[\gamma_1^2\kappa_1(\kappa_2 - a) + \gamma_2^2\kappa_2(\kappa_1 + b)] - ab\left(\gamma_1^2\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} + \gamma_2^2\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right) + \gamma_1\gamma_2[(\kappa_1 + b)^2 + (\kappa_2 - a)^2 - 2(\kappa_1\kappa_2 - \kappa_1a + \kappa_2b)] > 0. \quad (93)$$

Kdybychom v nerovnině (93) zaměnili znaménko nerovnosti znaménkem rovnosti, obdrželi bychom místo podmínky stability rovnici *meze stability*. Obdrželi bychom vztah mezi danými proměnnými κ_1 , κ_2 , γ_1 , γ_2 , a , b , resp. k_1 , k_2 , r , m , c_1 , c_2 , α . Takový souhrn jejich hodnot, při kterém by rovnice meze stability byla splněna, představuje případ obrábění, při kterém malou změnou některé z proměnných obdržíme buď stabilní, nebo nestabilní obrábění. Jestliže pak změna určitého druhu (na př. zvětšení) některé z proměnných vede jednoznačně k určitému druhu změny mezního stavu (na př. k stabilitě), rozděluje rovnice meze stability možné soubory proměnných na soubory stabilní a nestabilní. Vhodné znázornění mezni podmínky poskytne názor na vliv jednotlivých proměnných na stabilitu obrábění. Tvar (93) je příliš složitý a nepřehledný. Pro získání přehlednosti se ukazuje užitečným zavést označení

$$g = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad (94)$$

jako poměr poměrných útlumů v obou základních směrech a parametr

$$d = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \quad (95)$$

jako poměr poměrných tuhostí v obou základních směrech. Zavedení parametru d umožní vyšetření vlivu tuhosti pružin systému na stabilitu případu, neboť sníží stupeň, v kterém je poměrná tuhost v podmínce stability obsažena. Tento vliv zavedení parametru d na formální zjednodušení matematického popisu souvisí s jeho zvláštním fyzikálním významem.

Fyzikální význam parametru d

Takový soubor proměnných, které charakterisují řezné podmínky a vlastnosti kmitavého systému, v němž při změně jednotlivých proměnných zůstává zachována hodnota parametru d , je fyzikálně dán dvěma různými možnostmi:

1. Obráběním s určitými řeznými podmínkami, dávajícími určitou konstantní hodnotu hloubkového koeficientu r , a to na různých kmitavých systémech, které všechny mají stejný poměr tuhostí pružin v obou základních směrech

$$\frac{k_2}{k_1} = d.$$

2. Obráběním na určitém kmitavém systému s poměrem tuhostí v obou hlav-

ních směrech $\frac{k_2}{k_1} = d$; při tom se mění řezné podmínky, a tím i hodnota hloubkového koeficientu r . Hodnota parametru d se při tom nemění, neboť

$$d = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \frac{\frac{k_2}{r}}{\frac{k_1}{r}} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Podmínka $d = \text{konst}$ popisuje tedy obrábění na určitém kmitavém systému.

Zavedeme parametry (94) a (95) do podmínky stability (93) a uspořádáme ji podle mocnin κ_1 :

$$g\gamma_1^2\left\{\kappa_1^2[(d-1)^2 + 4\gamma_1^2(1+g\sqrt{d})(d+g\sqrt{d})] - 2\kappa_1[(b+a)(d-1) - 2\gamma_1^2(1+g\sqrt{d})(bg\sqrt{d}-a)] + a^2 + b^2 - ab\left(\frac{1}{g\sqrt{d}} + g\sqrt{d}\right)\right\} > 0. \quad (96)$$

Jestliže budeme v dalším předpokládat vždy určitou hodnotu (kladnou) tlumení γ_1 , jinak libovolnou, tedy i libovolně malou, nikoli však nulovou, můžeme nerovninu (96) krátit hodnotou $g\gamma_1^2$. Zaměníme-li znaménko nerovnosti za znaménko rovnosti, obdržíme rovnici mezni stability, která je pro poměrnou tuhost κ_1 (v tomto případě mezni poměrnou tuhost $\kappa_{1\text{mez}}$) stupně druhého. Ve spojení s rovnicí (95) tvoří parametrické rovnice pro mezni κ_1 , κ_2 :

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1^2[(d-1)^2 + 4\gamma_1^2(1+g\sqrt{d})(d+g\sqrt{d})] - 2\kappa_1[(b+a)(d-1) - 2\gamma_1^2(1+g\sqrt{d})(bg\sqrt{d}-a)] + a^2 + b^2 - ab\left(\frac{1}{g\sqrt{d}} + g\sqrt{d}\right) = 0, \\ \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = d. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Z rovnic (97) můžeme pro zvolené hodnoty tlumení c_1 , c_2 a zvolenou hodnotu natočení systému α vypočítat postupným dosazováním různých hodnot parametru d libovolný počet dvojic $\kappa_{1\text{mez}}$, $\kappa_{2\text{mez}}$ a zakreslit mezni čáry stability v diagramu se souřadnicemi κ_1 , κ_2 .

Volbu provedeme nejprve tak, že předpokládáme stejně veliké poměrné tlumení v obou základních směrech:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, \quad g = 1.$$

Hodnotu poměrného tlumení volíme velmi malou, téměř nulovou.

e) Podmínky stability systému s velmi malým poměrným tlumením

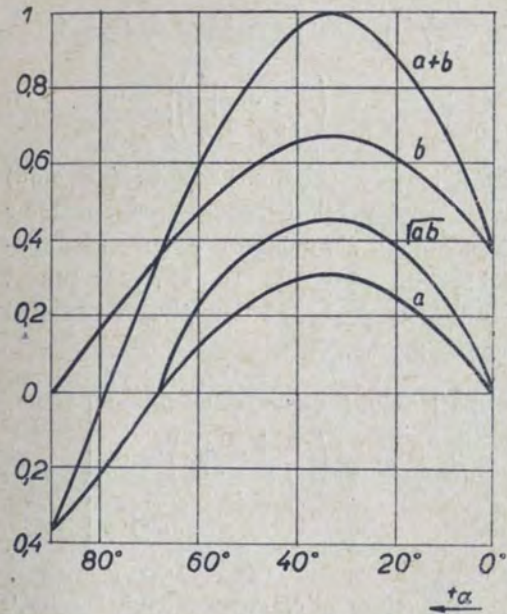
Pro tento případ dosadíme do rovnice mezni stability (97) $g = 1$ a členy s koeficientem γ_1^2 zanedbáme jako řádově velmi malé.

Obdržíme:

$$\kappa_1^2(d-1)^2 - 2\kappa_1(b+a)(d-1) + a^2 + b^2 - ab\left(\frac{1}{\sqrt{d}} + \sqrt{d}\right) = 0$$

a po úpravě

$$\left. \begin{aligned} (\kappa_{1mez})_{1,2} &= \frac{1}{d-1} \left(a + b \pm \sqrt{ab} \frac{1 + \sqrt{d}}{\sqrt{d}} \right), \\ (\kappa_{2mez})_{1,2} &= \frac{d}{d-1} \left(a + b \pm \sqrt{ab} \frac{1 + \sqrt{d}}{\sqrt{d}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (98)$$



Obr. 75.

Jak vyplývá z (98), obdržíme obecně dvě meze stability dané hodnotami $(\kappa_{1mez}, \kappa_{2mez})_1$ a $(\kappa_{1mez}, \kappa_{2mez})_2$, které označíme jako horní a dolní mez stability. Porovnáním výsledku s podmínkou stability vidíme ihned, že hodnoty κ_1, κ_2 , ležící mezi dvěma mezemi, patří do nestabilního pole. Hodnoty κ_1, κ_2 větší než horní mez a menší než dolní mez leží ve stabilním poli.

Vliv směrové orientace (α) a naladění (d) systému na stabilitu obrábění

Z řešení (98) je možno učinit několik důležitých závěrů. Zavedeme zpět funkce úhlu α , který

určuje směrovou orientaci systému vzhledem ke kolmici k obráběnému povrchu — sr. (18):

$$\begin{aligned} a &= \sin \alpha \sin (\beta - \alpha), \\ b &= \cos \alpha \cos (\beta - \alpha), \\ a + b &= \cos (2\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Konkrétní vyšetření budeme provádět vždy pro určitou hodnotu úhlu β udávajícího směr řezné síly. Volíme takovou hodnotu, při které poměr tangenciální a radiální složky řezné síly $\frac{P_z}{P_v} = \operatorname{tg} \beta = 2,5$. Odtud $\beta = 68^\circ 10'$, $\cos \beta = 0,372$, $\sin \beta = 0,93$.

Připomínáme znovu, že úhel α v našem značení je úhel mezi kolmicí Y k obráběnému povrchu (viz obr. 73) a směrem té pružiny systému, která leží v prvním kvadrantu od směru Y . Lze tedy uvažovat pouze hodnoty α v rozmezí

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Hodnoty a, b ($a + b$) a \sqrt{ab} pro tento rozsah hodnot úhlu α a zvolenou hodnotu úhlu β jsou vyznačeny v obr. 75.

1. Z řešení (98) vyplývá, že reálné meze stability existují pouze pro

$$ab > 0,$$

t. j.

$$\sin \alpha \sin (\beta - \alpha) \cos \beta \cos (\beta - \alpha) > 0,$$

t. j.

$$\alpha < \beta. \quad (99)$$

V případech, kdy $\beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, neexistuje reálná mez stability. Tyto případy jsou tedy bez ohledu na velikost κ_1, κ_2 buď všechny stabilní, nebo všechny nestabilní. Dosazením určitého případu se přesvědčujeme, že jsou stabilní. Nestabilita může tedy nastat pouze u systému se směrovou orientací danou nerovninou (99).

2. Pro $0 < \alpha < \beta$ jsou hodnoty $\kappa_{1mez}, \kappa_{2mez}$ dané vztahem (98) reálné. Podle definice κ je nutno dále, aby byly kladné. Záporné κ_{mez} nespádá do možných hodnot κ .

Při posuzování z tohoto hlediska je rozhodující veličinou parametr d , který budeme nazývat „naladění“, neboť udává poměr čtverců frekvencí vlastních kmitů daného systému v obou základních směrech.

Hodnota $(a + b)$ je v daném rozmezí hodnot α vždy kladná.

Pak pro $d > 1$ je vždy horní mezni κ_1 a κ_2 reálné kladné

$$(\kappa_{1mez})_1 = \frac{1}{d-1} \left(a + b + \sqrt{ab} \cdot \frac{1 + \sqrt{d}}{\sqrt{d}} \right), \quad (\kappa_{2mez})_1 = \frac{d}{d-1} \kappa_{1mez}.$$

Pro hodnoty $\kappa_1 > (\kappa_{1mez})_1$ a $\kappa_2 > (\kappa_{2mez})_1$ je obrábění stabilní, pro hodnoty $\kappa_1 < (\kappa_{1mez})_1$ a $\kappa_2 < (\kappa_{2mez})_1$ je v určitém rozsahu κ obrábění nestabilní.

Dolní mezni κ_1 a κ_2

$$(\kappa_{1mez})_2 = \frac{1}{d-1} \left(a + b - \sqrt{ab} \frac{1 + \sqrt{d}}{\sqrt{d}} \right), \quad (\kappa_{mez})_2 = \frac{d}{d-1} \kappa_{1mez}$$

je kladné pouze tehdy, je-li

$$\sqrt{ab} \frac{1 + \sqrt{d}}{\sqrt{d}} < a + b. \quad (100)$$

Není-li nerovnice (100) splněna, jsou nestabilní všechny případy, pro které je $\kappa_1 < (\kappa_{1\text{mez}})_1$ a $\kappa_2 < (\kappa_{2\text{mez}})_1$.

Pro $d < 1$ existuje kladná mez stability, a to jediná, pouze tehdy, je-li nerovnice (100) nespĺněna:

$$a + b < \sqrt[4]{ab} \frac{1 + \sqrt{d}}{\sqrt[4]{d}},$$

čili

$$\frac{a + b}{\sqrt[4]{ab}} < \frac{1 + \sqrt{d}}{\sqrt[4]{d}}. \quad (101)$$

Poměr

$$\frac{a + b}{\sqrt[4]{ab}} = \frac{2 \cos(2\alpha - \beta)}{\sqrt{\cos^2(2\alpha - \beta) - \cos^2\beta}} = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2\beta}{\cos^2(2\alpha - \beta)}}}$$

je nejmenší pro $\alpha = \frac{\beta}{2}$

$$\text{a je } \left(\frac{a + b}{\sqrt[4]{ab}}\right)_{\min} = \frac{2}{\sin\beta}.$$

Přepíšeme-li nerovnici (101) na rovnici pro $\alpha = \frac{\beta}{2}$, udá mezní hodnoty d , pro které může nastat nestabilita v případech $d < 1$.

$$\frac{2}{\sin\beta} = \frac{1 + \sqrt{d}}{\sqrt[4]{d}},$$

$$(\sqrt[4]{d})^2 - \frac{2}{\sin\beta} \sqrt[4]{d} + 1 = 0,$$

$$(\sqrt[4]{d})_{1,2} = \frac{1 \pm \cos\beta}{\sin\beta}$$

a pro zvolenou hodnotu $\beta = 68^\circ 10'$

$$d_1 = 4,71,$$

$$d_2 = 0,21.$$

V našem případě $d < 1$ vyhovuje pouze $d_2 = 0,21$. Jak se snadno dosazením určité hodnoty přesvědčíme, může nestabilita nastat pouze pro hodnoty

$$d < 0,21. \quad (102)$$

Jak uvidíme v dalším, je nestabilní pole hodnot κ_1, κ_2 , dané podmínkou (102), málo významné.

Co do vlivu naladění d na stabilitu obrábění, můžeme v podstatě prohlásit, že významná nestabilita vzniká pouze pro $d > 1$, čili pro případy, kdy v prvním kvadrantu ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ a dále vzhledem k omezení (99) pouze pro $0 < \alpha < \beta$) je pružina menší tuhosti než pružina na ni kolmá.

3. Jak vyplývá z (98), nastává nestabilita pro určité naladění d ($d > 1$) při maximálních hodnotách horních mezních κ_1, κ_2 tehdy, je-li hodnota ab maximální. $\sqrt[4]{ab} = \frac{1}{2} \sqrt{\cos^2(2\alpha - \beta) - \cos^2\beta}$ je maximální, je-li $\cos^2(2\alpha - \beta)$ maximální, a to je pro $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

Zvolíme-li určité naladění d systému, pak pro tuto jeho směrovou orientaci musí mít systém pro zachování stability obrábění nejvyšší poměrné tuhosti pružin κ_1, κ_2 .

Jinak řečeno:

Máme-li systém s určitými hodnotami tuhosti pružin k_1, k_2 , vzniká pro uvedenou směrovou orientaci $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ systému nestabilita obrábění při nejmenší hodnotě hloubkového koeficientu r , při „nejnižších mezních řezných podmínkách“ (na př. při určitých ostatních řezných podmínkách při nejmenší šířce třísky).

Příklad

Zvolíme tuhosti pružin systému $k_1 = 1 \text{ kg}/\mu$, $k_2 = 3 \text{ kg}/\mu$, tedy $d = 3$. Systém realizujeme na příklad hmotou m , upevněnou na konci tyče (rovnoběžně s obráběným povrchem a kolmé k směru řezné rychlosti) obdélníkového průřezu F s poměrem stran obdélníka $1 : \sqrt[3]{3} = 1 : 1,44$ obr. (76). Směry obou pružin podle schematu obr. 73 jsou dány osami A a B průřezu tyče. Uvedené naladění $d = 3$ platí podle definice pouze tehdy, jestliže osa A průřezu tyče spadá do prvního kvadrantu.

Otočíme-li tyč tak, že osa průřezu A spadne do druhého kvadrantu, počítáme úhel α k ose B , která spadá do prvního kvadrantu, a pro daný případ platí $d = \frac{1}{3}$ $k_1 = 3 \text{ kg}/\mu$, $k_2 = 1 \text{ kg}/\mu$.

Daný kmitavý systém můžeme natáčet v rozsahu úhlu α' , počítaného k určité přímce, spojené se systémem

$$0 < \alpha' < \pi$$

Při tom procházíme hodnotami úhlu α v rozsahu $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ při určitém označení naladění d a znovu hodnotami α v rozsahu $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ při naladění $\frac{1}{d}$.

Podle předchozího nastane pro $d = 3 > 1$ ($0 < \alpha' < \frac{\pi}{2}$) nestabilita pouze v rozsahu natočení α systému

$$0 < \alpha < \beta.$$

Pro $d = \frac{1}{3} < 1$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$) nenastane nestabilita vůbec, neboť pro $d < 1$ nastává nestabilita pouze pro $d < 0,21$.

V celém rozsahu možného natočení tyče, která tvoří pružiny daného systému, měřeného úhlem α' mezi kolmicí Y k obráběnému povrchu a osou A (ve směru pružiny menší tuhosti), nastane nestabilita pouze v rozsahu natočení

$$0 < \alpha' < \beta.$$

Pro $\alpha' > \beta$ je obrábění stabilní pro jakkoli velkou hodnotu hloubkového koeficientu r (jakékoliv řezné podmínky).

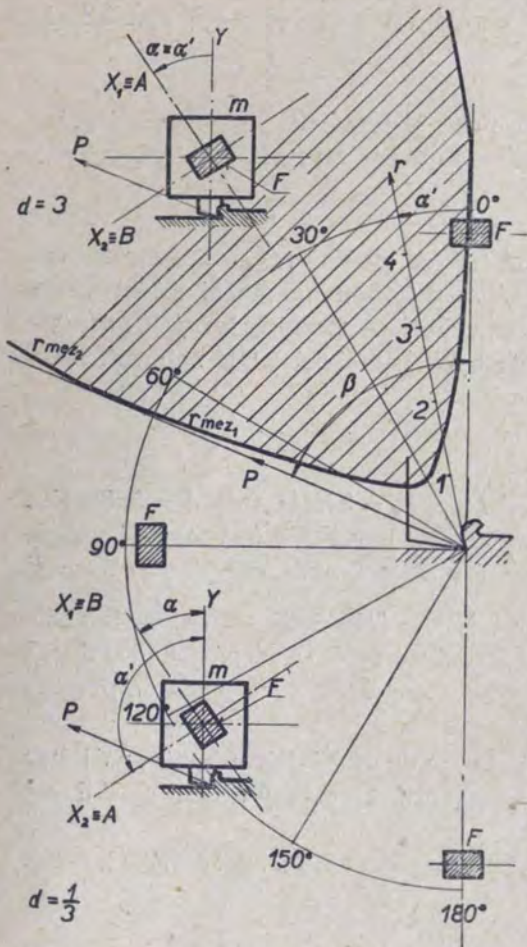
V rozsahu natočení $0 < \alpha' < \beta$ vznikne při obrábění samobuzené kmitání, jestliže hloubkový koeficient r dosáhne hodnot uvedených v polárním diagramu r, α' na obr. 76, daných vztahem

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} [\cos(2\alpha' - \beta) \pm \pm 1,038 \sqrt{\cos^2(2\alpha' - \beta) - \cos^2 \beta}],$$

který obdržíme dosazením daných hodnot do (98).

V diagramu jsou dvě mezní čáry r_{mez1} a r_{mez2} , které odpovídají hodnotám $(\kappa_{1mez})_1, (\kappa_{1mez})_2$. Tyto čáry oddělují pole nestabilních případů (α', r) — šrafováno, od stabilních polí (α', r). Rozhodující je čára r_{mez1} , udávající hodnoty r , při kterých při postupném zvyšování řezných podmínek začne vznikat samobuzené kmitání. Samobuzené kmitání vzniká při dostatečně veliké hodnotě r v rozsahu natočení $0 < \alpha' < \beta$. Obrábíme-li za nízkých řezných podmínek (na př. s malou šířkou třísky), kterým odpovídá malá hodnota r , samobuzené kmitání ani v tomto rozsahu nevzniká. Při zvyšování řezných podmínek — zvyšování hodnoty r , dostaneme se na mez stability r_{mez1} a pak dále do pole nestabilních případů.

Jak je patrné z diagramu, je hodnota řezných podmínek r_{mez1} , při které začne



Obr. 76.

vznikat samobuzené kmitání, silně závislá na směrové orientaci α řídicího kmitavého systému. Zvětšujeme-li natočení α systému od $\alpha = 0$ do $\alpha = \frac{1}{2}\beta$, mezní řezné podmínky se stále snižují a dosahují pro $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ minima. Toto minimum je pro hodnoty uvedeného příkladu $r_{mez1} \doteq 1 \text{ kg}/\mu$.

Tato hodnota hloubkového koeficientu odpovídá na př. zhruba zapichování nožem šířky 4 mm při běžně používaných hodnotách posuvu a ostatních řezných podmínek (počítáme-li specifický řezný odpor asi $200 \text{ kg}/\text{mm}^2$).

Při dalším zvětšování natočení α' systému hodnota mezních řezných podmínek roste až při natočení $\alpha' > \frac{1}{2}\beta$ samobuzené kmitání nevznikají.

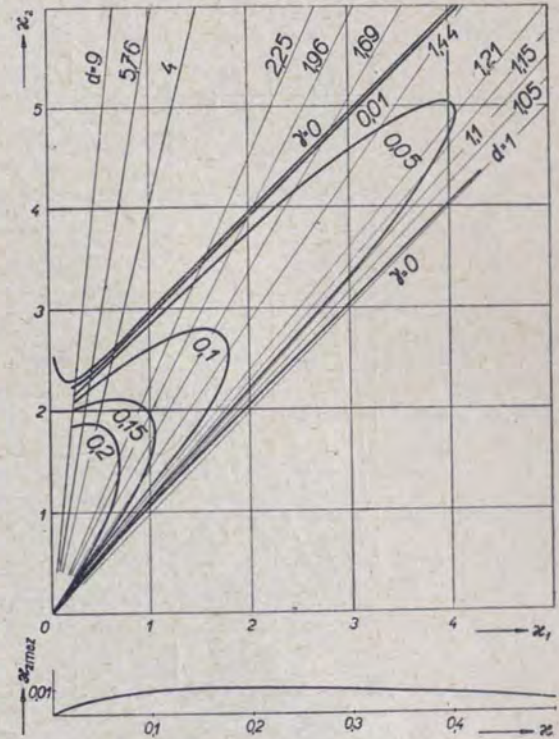
Na diagramu uvedená horní hranice pole nestability r_{mez2} znamená, že při velmi vysokých řezných podmínkách by nastalo opět stabilní obrábění. Praktický význam této možnosti je malý. Jednak při tak vysokých řezných podmínkách ve všech obvyklých případech kmitání nastává již nestabilita vlivem rozkmitávání rezonančními nucenými kmity, vyvolanými zvlněním obrobeneho povrchu při předchozí tříске, jednak při dané statické tuhosti systému (vypočtené r_{mez} se vztahuje k hodnotám k_1 a k_2 uvedeným v příkladě; s jejich zvyšováním hodnota r_{mez} úměrně roste) nejsou tak vysoké řezné podmínky přípustné s hlediska deformačního (přesnost obrobku) a většinou i pevnostního.

Na diagramu jsou pro názornost u některých hodnot natočení řídicího systému vyznačeny odpovídající polohy pružin systému — průřezu F tyče, na které je upevněna hmota m systému.

Z diagramu je patrný dříve uvedený obecný závěr, že nestabilita vzniká pro systém s danou tuhostí pružin při nejnižších řezných podmínkách při směrové orientaci systému, dané hodnotou úhlu α ,

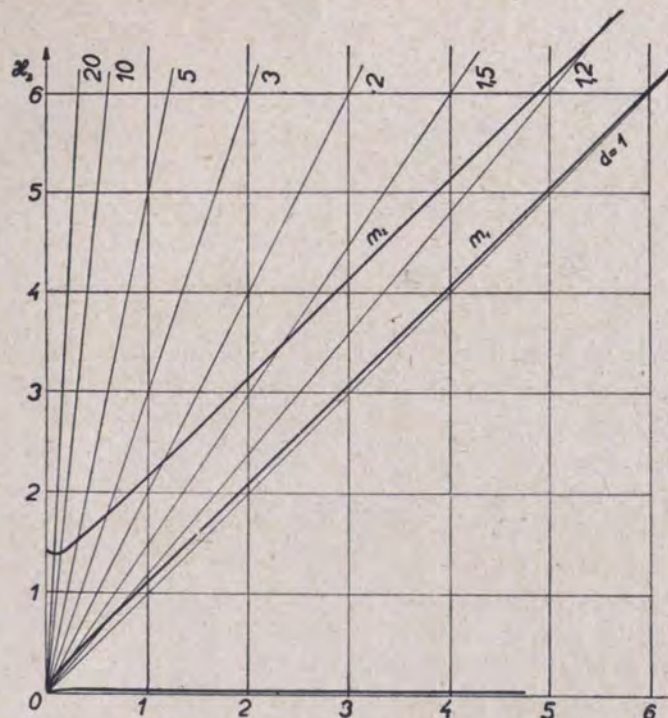
$$\alpha = \frac{1}{2}\beta.$$

Tato směrová orientace je s hlediska stability nejméně příznivá.



Obr. 77.

Pro nejnepříznivější směrovou orientaci systému $\alpha = \frac{1}{2}\beta = 34^\circ 5'$ byly vypočteny pro různé hodnoty parametru d hodnoty mezních poměrných tuhostí κ_1 a κ_2 ze vztahu (98) a sestaven diagram v souřadnicích κ_1, κ_2 (obr. 77), kde pro případ velmi malého tlumení platí mezní čáry stability označené $\gamma = 0$. Pole mezi oběma mezními čarami je pole nestabilních případů. Toto pole je v diagramu



Obr. 78.

κ_1, κ_2 právě pro směrovou orientaci $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ nejširší. Podobný diagram byl sestaven pro směrovou orientaci systému $\alpha = 59^\circ$ (obr. 78). Mezní čáry nestability, ohraničující nestabilní pole, jsou zde kresleny pouze pro případ velmi malého tlumení a jsou označeny m_1, m_2 . Vidíme, že pole nestability se zužuje pro hodnotu α vzdalující se od $\alpha = \frac{1}{2}\beta$. Pro $\alpha = 0$ nebo $\alpha = \beta$ obě meze splývají a pole nestability přechází v čáru — vymizí.

f) Stabilita systému s tlumením určité velikosti

V případě směrové orientace $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ byly dále pro různé hodnoty parametru d vypočteny hodnoty mezních poměrných tuhostí κ_1, κ_2 pro systémy s různou hodnotou poměrného tlumení γ . Nejprve provedeno zpracování za předpokladu

stejného poměrného tlumení v obou hlavních směrech X_1 a X_2 ; $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Výsledek zpracování je zanesen v diagramu obr. 77.

Pole diagramu je rozděleno přímkou $\kappa_1 = \kappa_2$ na dvě poloviny. Horní polovina diagramu odpovídá případům $d > 1$, t. j. případům, kdy ve směru $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ leží ta pružina systému, která z obou pružin má menší tuhost.

Spodní polovina diagramu odpovídá případům $d < 1$, t. j. případům, kdy ve směru $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ leží pružina systému, která má větší tuhost. Body na přímce $\kappa_1 = \kappa_2$ odpovídají případům takových systémů, které mají tuhost obou pružin stejnou $k_1 = k_2$. Tyto systémy mají pak ve všech směrech stejně velikou tuhost (konkrétně na př. jde o hmotu upevněnou obdobně jako v uvedeném příkladu na tyči, avšak čtvercového nebo kruhového průřezu), a nelze u nich vlastně vůbec mluvit o směrové orientaci.

Hlavní pole nestability pro jednotlivé hodnoty tlumení γ leží v horní polovině diagramu, v které $d > 1$.

V předchozím oddílu jsme uvedli, že i v případech $d < 1$, a to pro $d < 0,21$, existuje pro určité hodnoty κ_1, κ_2 nestabilita. Odpovídající pole nestability je velmi úzké. Je vyznačeno v obr. 77b v měřítku pro κ_2 dvacetkrát větším než v hlavním diagramu obr. 77a a pro κ_1 v měřítku pětkrát větším, a to pouze pro tlumení γ blížíci se k nule (označeno $\gamma = 0$). Vidíme, že toto pole nestability je velmi málo významné, neboť existuje pouze pro hodnoty poměrné tuhosti $\kappa_2 < 0,01$ (při hodnotě $r = 1$, uvedené v předchozím příkladě, tuhost pružiny $k_2 < 0,01 \text{ kg}/\mu$), a proto se jím v dalším rozboru nebudeme zabývat. Prohlásíme s dostatečnou přibližností, že samobuzené kmity vznikají pouze pro naladění $d > 1$ (v prvním kvadrantu pružina menší tuhosti); to odpovídá v diagramu obr. 77 hlavnímu poli nestability, ležícímu uvnitř čar označených příslušnou hodnotou poměrného tlumení $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$.

Diagram je kreslen v souřadnicích poměrných tuhostí κ_1, κ_2 a platí pro směrovou orientaci řídicího systému danou hodnotou úhlu $\alpha = \frac{1}{2}\beta = 34^\circ 5'$. Můžeme si dále představit, že je průmětem trojrozměrného diagramu, kdy třetí souřadnice, vynesena na osu kolmou k ploše papíru, je poměrné tlumení $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Každý bod v tomto trojrozměrném diagramu přísluší určitým hodnotám $\kappa_1, \kappa_2, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ a danému α . Při určité hodnotě řezných podmínek r odpovídá každý bod zcela určitému řídicímu kmitavému systému.

V trojrozměrném diagramu můžeme nyní mluvit o „prostoru nestability“ a „prostoru stability“. Prostor nestability je omezen mezní plochou, která je v diagramu určena řezy rovinami $\gamma = \text{konst}$ pro různé hodnoty γ , tedy vrstevnicemi. Pro přesnost uvádíme znovu, že řez označený stručně $\gamma = 0$ odpovídá tlumení ne dokonale nulovému, nýbrž velmi malému a leží v trojrozměrném diagramu velmi nízko nad rovinou papíru, nikoli však v rovině papíru. Mezní plocha stability odděluje body přiřazené kmitavým systémům nestabilním od bodů přiřazených stabilním kmitavým systémům.

Protože je diagram kreslen pro poměrné tuhosti $\kappa_1 = \frac{k_1}{r}$, $\kappa_2 = \frac{k_2}{r}$, lze jej nejlépe studovat při představě obrábění zcela určitými řeznými podmínkami, zcela určité hodnoty hloubkového koeficientu r , na př. $r = 1$. Pak hodnoty vyznačené pro κ_1 , κ_2 platí současně pro hodnoty tuhosti pružin systému k_1 , k_2 . Popíšeme stručně hlavní znaky prostoru nestability.

A. Vidíme, že mezni plocha stability má tvar jakési klenby, jejíž hřbet leží pro větší hodnoty κ_1 , κ_2 zhruba v rovině $\kappa_2 = \kappa_1 + 1$ a zvyšuje se při zmenšování poměrných tuhostí pružin systému čím dále tím strměji. Pro velmi malé hodnoty poměrné tuhosti κ_1 pružiny ležící v prvním kvadrantu se mezni plocha náhle rozšiřuje směrem zvyšování tuhosti κ_2 , zatím co pro hodnoty $\kappa_1 > 0,2$ je zhruba symetrická podle roviny $\kappa_2 = \kappa_1 + 1$, kolmé k ploše papíru.

Pro velmi malé tlumení existují nestabilní systémy s libovolně velkými poměrnými tuhostmi pružin κ_1 , κ_2 . Tlumené systémy jsou bez ohledu na poměr tuhostí obou pružin (naladění) stabilní, je-li poměrná tuhost κ_1 nebo (nepřipustíme-li velmi malé hodnoty tuhosti κ_1) κ_2 dostatečně veliká. Na příklad pro hodnotu poměrného tlumení $\gamma = 0,05$ je systém stabilní, je-li poměrná tuhost $\kappa_1 > 4,2$ nebo je-li poměrná tuhost $\kappa_2 > 5,1$. Čím větší tlumení, tím menší poměrné tuhosti pružin systému stačí, aby byl stabilní. Pro tlumení $\gamma = 0,2$ je systém stabilní pro $\kappa_1 > 0,7$ nebo $\kappa_2 > 1,9$ atd.

Polé nestabilních případů (κ_1 , κ_2) v jednotlivých řezech $\gamma = \text{konst}$ se zmenšuje při zvětšování tlumení γ .

Systém s určitými hodnotami poměrných tuhostí pružin κ_1 , κ_2 se stane stabilním, zvětšíme-li jeho tlumení nad určitou hodnotu tak, aby jemu odpovídající bod ležel v uvedeném trojrozměrném diagramu nad mezni plochou stability. Na příklad systém s pružinami poměrných tuhostí $\kappa_1 = 1,9$, $\kappa_2 = 2,5$ se stane stabilním, zvětšíme-li jeho tlumení nad $\gamma = 0,1$. Čím menší jsou hodnoty poměrných tuhostí pružin, tím většího tlumení je třeba, aby se systém stal stabilním.

Prostor nestability je bez ohledu na velikost tlumení zhruba mezi rovinami $\kappa_1 = \kappa_2$ a $\kappa_2 = \kappa_1 + 2$ (s výjimkou případů velmi malých poměrných tuhostí $\kappa_1 < 0,2$). Nestabilní systém, na př. s pružinami tuhostí $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 3$, může se stát stabilním změnou tuhosti jedné z obou pružin, a to jak jejím zvětšením, tak zmenšením, na př. zvětšením tuhosti κ_1 nad hodnotu $\kappa_1 = 3$ nebo jejím zmenšením pod hodnotu $\kappa_1 = 1$ při zachování $\kappa_2 = 3$ nebo zvětšením tuhosti κ_2 nad hodnotu $\kappa_2 = 4$ nebo jejím zmenšením pod hodnotu $\kappa_2 = 2$ při zachování $\kappa_1 = 2$.

Důležitým činitelem je naladění systému, dané poměrem tuhostí jeho pružin

$$d = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \frac{k_2}{k_1}$$

Systémy s naladěním $d < 1$ jsou stabilní. Systémy s naladěním $d > 1$ jsou

stabilní pouze pro dostatečně veliké hodnoty tuhostí pružin. Nejnejpriznivější naladění jsou pro $d > 1$ a blízká hodnotě $d = 1$.

Při zachování takového naladění, t. j. při současném úměrném zvyšování tuhosti obou pružin (na př. $d = 1,15$), je nutno zvyšovat tuhosti pružin systému do vysokých hodnot, aby se systém stal stabilním. Naopak pro hodnoty naladění $d > 1$, vzdálené od hodnoty $d = 1$, stačí malé zvětšení tuhosti pružin (viz na př. naladění $d = 4$), aby se systém stal stabilním.

Význam naladění systému lépe vynikne při opačné interpretaci významu hodnot κ_1 , κ_2 , než kterou jsme dosud použili při popisu diagramu. Dosud jsme přijali představu konstantních řezných podmínek, konstantní hodnoty hloubkového koeficientu r , společně pro všechny body diagramu.

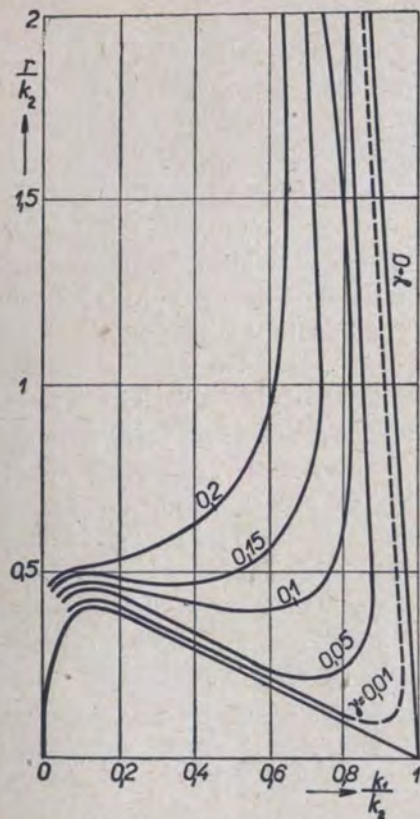
B. Přijmeme-li nyní představu zcela určitého řídicího kmitavého systému a proměnlivých řezných podmínek, je jejich změna dána opět změnou hodnot κ_1 , κ_2 . Vzhledem k tomu, že obě poměrné tuhosti κ_1 , κ_2 obsahují hodnotu r , odpovídá změně řezných podmínek současná úměrná změna obou hodnot κ_1 i κ_2 . Případy různých řezných podmínek obrábění s určitým řídicím kmitavým systémem jsou v diagramu obr. 77 dány čarami $d = \text{konst}$ pro naladění d , příslušné danému kmitavému systému. Každý bod na čáře $d = \text{konst}$ odpovídá určitým řezným podmínkám, určité hodnotě hloubkového koeficientu r . Velmi nízkým hodnotám r odpovídají body vzdálené od počátku 0, t. j. body vysokých hodnot κ_1 , κ_2 . Zvyšování řezných podmínek odpovídá pohyb po přímce $d = \text{konst}$ směrem k počátku 0. Na př. obrábění kmitavým systémem o tuhosti pružin $k_1 = 2 \text{ kg}/\mu$, $k_2 = 8 \text{ kg}/\mu$ odpovídá v diagramu čára $d = 4$. Obrábění nízkými řeznými podmínkami s malou hodnotou r odpovídající body ležící v horním stabilním poli diagramu. Při zvyšování řezných podmínek, t. j. při zvětšování hodnoty r , postupujeme v diagramu v horním stabilním poli po čáře $d = 4$ směrem k počátku, až při určité velikosti řezných podmínek dosáhneme meze stability a začne vznikat samobuzené kmitání. Má-li daný systém tlumení $\gamma = 0,05$, jsou mezni řezné podmínky dány hodnotami $\kappa_{1\text{mez}} = 0,625$, $\kappa_{2\text{mez}} = 2,5$ a vzhledem k daným k_1 , k_2 je $r_{\text{mez}} = 3,2 \text{ kg}/\mu$.

Řídicím kmitavým systémům s hodnotou naladění $d > 1$, málo větší než $d = 1$ odpovídají velmi nízké mezni řezné podmínky. Na příklad při zvětšení tuhosti k_1 uvedeného systému na $k_1 = 6,66 \text{ kg}/\mu$, t. j. naladění $d = 1,2$, sníží se mezni řezné podmínky — mezni hodnota r na $r_{\text{mez}} = 1,6 \text{ kg}/\mu$. Při zmenšení tuhosti k_2 uvedeného systému na $k_2 = 2,4 \text{ kg}/\mu$, t. j. opět naladění $d = 1,2$, sníží se mezni hodnota r na $r_{\text{mez}} = 0,48 \text{ kg}/\mu$.

Nejnejpriznivější naladění d systému je závislé na poměrném útlumu γ . Z diagramu je patrné, že pro systémy s poměrnými útlumem $\gamma = 0,2$ jsou nejnejpriznivější naladění v rozmezí asi $d = 2,5$ až $d = 4$, pro systémy s poměrným útlumem $\gamma = 0,1$ v rozmezí $d = 1,4$ až $1,8$ atd. Pro systémy s velmi malým útlumem je naladění tím nejpriznivější, čím se při $d > 1$ více blíží hodnotě $d = 1$.

Vliv řezných podmínek vyjádřených hloubkovým koeficientem r a vliv tuhosti každé z pružin systému zvlášť na stabilitu obrábění je znovu zachycen v diagramech obr. 79 a obr. 80, které jsou překresleny z diagramu obr. 77.

C. Diagram obr. 79 vyjadřuje vliv velikosti hloubkového koeficientu r a tuhosti pružiny k_1 , ležící ve směru $\alpha = \frac{1}{2}\beta$, na stabilitu obrábění. Je kreslen v souřadnicích $\frac{r}{k_2}$ a $\frac{k_1}{k_2}$. Nejvhodnější jeho interpretace je za představy konstantní tuhosti pružiny k_2 , kolmé na směr $\alpha = \frac{1}{2}\beta$. Nestabilita může nastat pouze pro tuhost $k_1 < k_2$ pro systém s velmi malým tlumením, pro tuhost $k_1 < 0,7 k_2$ pro systém s tlumením $\gamma = 0,15$, pro tuhost $k_1 < 0,65 k_2$ pro systém s tlumením $\gamma = 0,2$ atd. Pro velmi malé tlumení systému je obrábění pro $k_1 < k_2$, avšak blíží se k hodnotě $k_1 = k_2$ při malých hodnotách r nestabilní, avšak při zvětšení r překračujeme horní mez stabilního pole a obrábění je opět stabilní. Jakmile se pro tyto malé hodnoty tlumení systému zmenší tuhost k_1 pod hodnoty $k_1 = 0,95$ až $0,9 k_2$, zvyšuje se horní mez stability, a nelze ji využívat, neboť nastává v obvyklých případech rozkmitávání vlivem vln na obrobeném povrchu, vzniklých při předchozí třisce. Hledíme-li tedy pouze k spodní mezi stabilního pole, můžeme říci, že nestabilní obrábění může vzniknout pouze pro hodnoty $k_1 < k_2$, a to tím menší, čím větší je tlumení systému.



Obr. 79.

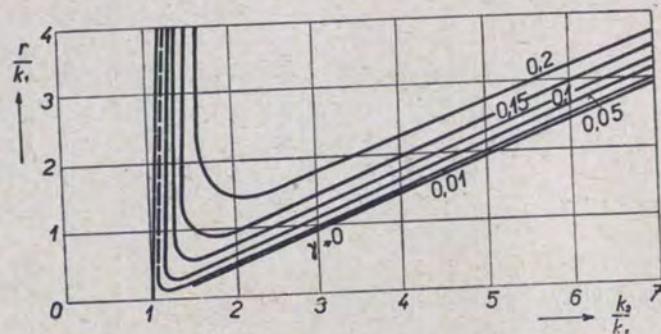
Při dalším snižování tuhosti pružiny k_1 vzniká samobuzené kmitání. Pro systémy s malým tlumením se při snižování tuhosti k_1 mezní hodnota r zvětšuje, pro systémy s velkým tlumením se při snižování tuhosti k_1 mezní hodnota r zmenšuje. Při středních hodnotách tlumení zůstává hodnota mezního r zhruba nezávislá na velikosti tuhosti k_1 a je rovna zhruba polovině tuhosti k_2 .

Souhrnně možno říci, že pro středně tlumené systémy může vzniknout nestabilita pouze pro tuhost pružiny v prvním kvadrantu $k_1 < 0,8 k_2$, a to při $r_{mez} \doteq 0,4$ až $0,5 k_2$.

D. Na diagramu obr. 80 jsou uvedeny mezní čáry stability v souřadnicích

$\frac{k_2}{k_1}$ a $\frac{r}{k_1}$. Interpretujeme ho za představy konstantní tuhosti pružiny k_1 ležící ve směru $\alpha = \frac{1}{2}\beta$. Z diagramu je patrné, že samobuzené kmitání nemůže vzniknout, jestliže je tuhost pružiny k_2 :

- $k_2 < k_1$ pro systém s velmi malým tlumením
- $k_2 < 1,25 k_1$ pro systém s tlumením $\gamma = 0,1$
- $k_2 < 1,5 k_1$ pro systém s tlumením $\gamma = 0,2$ atd.



Obr. 80.

Aby vznikly samobuzené kmity, musí tuhost pružiny k_2 být větší než tuhost pružiny k_1 o malou hodnotu. Tato malá hodnota je tím větší, čím větší je tlumení systému.

Jakmile se zvýší tuhost k_2 natolik, že je vznik samobuzeného kmitání možný, je mezní hodnota hloubkového koeficientu r

- $r_{mez} \doteq 0,2 k_1$ pro $\gamma = 0,01$,
- $r_{mez} \doteq 0,4 k_1$ pro $\gamma = 0,05$,
- $r_{mez} \doteq 0,6 k_1$ pro $\gamma = 0,1$,
- $r_{mez} \doteq 1 k_1$ pro $\gamma = 0,15$,
- $r_{mez} \doteq 1,5 k_1$ pro $\gamma = 0,2$ atd.

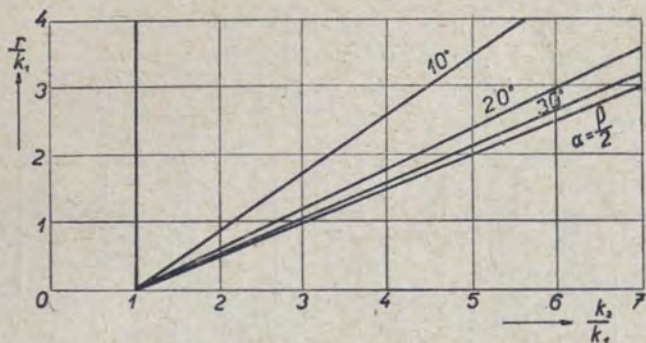
Při dalším zvyšování tuhosti pružiny k_2 vznikají samobuzené kmity při vyšších mezních podmínkách, daných zhruba vztahem

$$r_{mez} = 0,5 k_2.$$

Mezní čáry stability pro $\gamma \rightarrow 0$ a jiné hodnoty α než $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ jsou uvedeny na obr. 80a.

E. Pro všechny uvedené výklady je společný význam poměrné tuhosti z jako jednoho z bezrozměrných parametrů, určujících stabilitu obrábění a mez této stability. Pro fyzikálně podobné řídicí kmitavé systémy, t. j. pro řídicí systémy se stejnou směrovou orientací α , stejným poměrným tlumením γ a stejným

naladěním d , jsou mezní řezné podmínky, vyjádřené hodnotou hloubkového koeficientu r_{mez} , tolikrát vyšší, kolikrát větší jsou tuhosti k_1 a k_2 pružin řídicího kmitavého systému.



Obr. 80a.

g) Útlum v poli stability

Až dosud jsme prováděli vyšetření pouze kvalitativní, t. j. pokud se týkalo otázky, za kterých podmínek je případ stabilní nebo nestabilní. Nalezená pole nestability je možno blíže kvantitativně vyšetřit tím, že určíme rychlost narůstání nebo útlumu amplitudy kmitání jejich jednotlivých bodů, t. j. hodnotu koeficientu λ , v exponentu jednotlivých částečných řešení $x_0 \cdot e^{\lambda t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. Prozatím provedeme vyšetření hodnoty λ pro některé body ve stabilním poli diagramu obr. 77. Zatím co bodům nestabilního pole odpovídají kladné hodnoty λ , odpovídají bodům stabilního pole záporné hodnoty λ . Kvantitativně budeme rozlišovat jednotlivé stabilní případy tak, že za stabilnější budeme pokládat ty případy, kterým přísluší absolutně větší hodnota záporného λ .

Hodnotu λ získáme jako reálnou část komplexního kořene charakteristické rovnice. Uvedli jsme, že obecné řešení nelze prakticky provádět. Vyšetření provedeme tak, že vypočítáme kořeny charakteristické rovnice pro řadu numericky zvolených případů. Pro všechny případy volíme stejnou hodnotu $\frac{r}{m} = 1$ a počítáme kořeny redukované charakteristické rovnice (88), které se takto shodují s kořeny původní charakteristické rovnice (77). Pro všechny případy volíme $\alpha = \frac{1}{2}\beta = 35^\circ$, t. j. $a = 0,314$, $b = 0,686$ a poměrné tlumení $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,1$.

Vyšetření provedeme pro body 1 až 11 vyznačené v diagramu obr. 81. Jim odpovídající hodnoty κ_1, κ_2 , charakteristické rovnice a kořeny charakteristické rovnice jsou:

$$\text{bod 1: } \kappa_1 = 5, \kappa_2 = 5,$$

charakteristická rovnice zní

$$z^4 + 0,89442 z^3 + 10,572 z^2 + 4,6384 z + 26,860 = 0,$$

řešení:

$$z_{1,2} = -0,224 \pm j 2,26 \quad z_{3,4} = -0,223 \pm j 2,25;$$

bod 2: $\kappa_1 = 5,5 \quad \kappa_2 = 5$,

$$z^4 + 0,9162 z^3 + 11,082 z^2 + 4,9642 z + 29,203 = 0,$$

$$z_{1,2} = -0,237 \pm j 2,43 \quad z_{3,4} = -2,21 \pm j 2,20;$$

bod 3: $\kappa_1 = 6, \quad \kappa_2 = 5$,

$$z^4 + 0,9370 z^3 + 11,591 z^2 + 5,285 z + 31,546 = 0,$$

$$z_{1,2} = -0,247 \pm j 2,54 \quad z_{3,4} = -0,221 \pm j 2,19;$$

bod 4: $\kappa_1 = 9, \quad \kappa_2 = 5$,

$$z^4 + 1,0472 z^3 + 14,640 z^2 + 7,1432 z + 45,604 = 0,$$

$$z_{1,2} = -0,301 \pm j 3,1 \quad z_{3,4} = -0,222 \pm j 2,15;$$

bod 5: $\kappa_1 = 16, \quad \kappa_2 = 5$,

$$z^4 + 1,2472 z^3 + 21,730 z^2 + 11,211 z + 78,406 = 0,$$

$$z_{1,2} = -0,399 \pm j 4,07 \quad z_{3,4} = -0,224 \pm j 2,13;$$

bod 6: $\kappa_1 = 6, \quad \kappa_2 = 6$,

$$z^4 + 0,9796 z^3 + 12,612 z^2 + 6,060 z + 38,232 = 0,$$

$$z_{1,2} = -0,245 \pm j 2,48 \quad z_{3,4} = -0,2448 \pm j 2,48;$$

bod 7: $\kappa_1 = 6, \quad \kappa_2 = 5,5$,

$$z^4 + 0,9855 z^3 + 12,102 z^2 + 5,676 z + 34,889 = 0,$$

$$z_{1,2} = -0,246 \pm j 2,54 \quad z_{3,4} = -0,2329 \pm j 2,30;$$

bod 8: $\kappa_1 = 6, \quad \kappa_2 = 3$,

$$z^4 + 0,8362 z^3 + 9,542 z^2 + 3,632 z + 18,174 = 0,$$

$$z_{1,2} = -0,25 \pm j 2,53 \quad z_{3,4} = -0,168 \pm j 1,7;$$

bod 9: $\kappa_1 = 6, \quad \kappa_2 = 1$,

$$z^4 + 0,6898 z^3 + 7,470 z^2 + 1,673 z + 4,802 = 0,$$

$$z_{1,2} = -0,245 \pm j 2,57 \quad z_{3,4} = -0,10 \pm j 0,8;$$

bod 10: $\kappa_1 = 5,5, \quad \kappa_2 = 5,5$,

$$z^4 + 0,9380 z^3 + 11,592 z^2 + 5,333 z + 32,296 = 0,$$

$$z_{1,2} = -0,2345 \pm j 2,38 \quad z_{3,4} = -0,2345 \pm j 2,38;$$

bod 11: $\kappa_1 = 8, \quad \kappa_2 = 3$,

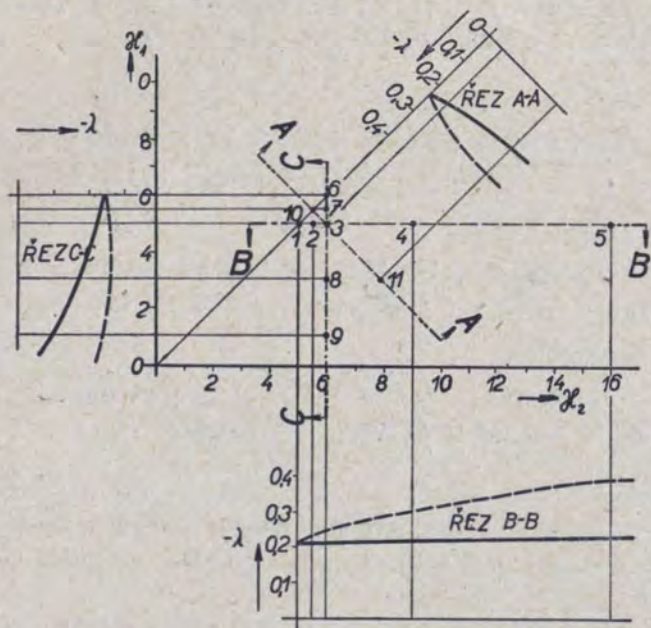
$$z^4 + 0,912 z^3 + 11,568 z^2 + 4,528 z + 23,546 = 0,$$

$$z_{1,2} = -0,2835 \pm j 2,93 \quad z_{3,4} = -0,1725 \pm j 1,64.$$

Pro jednotlivé případy dostáváme dvě hodnoty výsledné frekvence kmitání ω_1, ω_2 a dvě hodnoty koeficientu útlumu λ_1, λ_2 , vyplývající z tvaru kořenů

$$z_{1,2} = \lambda_1 \pm j\omega_1, \quad z_{3,4} = \lambda_2 \pm j\omega_2.$$

Hodnoty λ_1, λ_2 , nalezené v jednotlivých případech, jsou vyznačeny v diagramu obr. 81. Za kvantitativní měřítko stability volíme tu z obou hodnot $-\lambda_1, -\lambda_2$, která je absolutně menší.



Obr. 81.

Při rozboru nalezených hodnot docházíme k výsledku, že odpovídají danému poměrnému útlumu a nalezeným frekvencím kmitání, které přímo souvisí s hodnotami tuhostí k_1, k_2 . Odtud pak soudíme, že ve stabilním poli se výsledný tvar pohybu rozpadá na dva samostatné kmitavé pohyby se vzájemným nulovým fázovým posunem a útlumem odpovídajícím jejich frekvencím vlastních kmitů a poměrnému tlumení γ .

Z výsledku dále plyne, že při stejném poměrném tlumení jsou kvantitativně stabilnější ty případy, ve kterých hodnota tuhosti méně tuhé pružiny je větší. Lze dále obecně říci, že kvantitativně nejstabilnější jsou případy ležící na přímce $\kappa_1 = \kappa_2$.

h) Stručný souhrn výsledků matematického vyšetření stability kmitavého systému se dvěma pružinami navzájem kolmými

Pohybové rovnice pro kmitavý pohyb nástroje při obrábění, spojeného s kmitavým systémem o dvou stupních volnosti s tlumením, vedou na charakteristic-

kou rovnicí úplnou čtvrtého stupně. Její obecné řešení nebylo provedeno. Byl naznačen tvar kořenů charakteristické rovnice, tvar řešení pohybové rovnice a postup pro určení tvaru kmitání systému daného numerickými hodnotami jednotlivých parametrů.

Obecně byly dále vyšetřovány pouze podmínky stability. Tak byla hledána odpověď na nejdůležitější otázku daného problému, jaký je vliv jednotlivých parametrů na vznik samobuzených kmitů.

Z parametrů, určujících vlastnosti řídicího kmitavého systému a hodnotu rezných podmínek, byly sestaveny bezrozměrné parametry. Tím byl položen základ k obecnému řešení otázky, neboť každý soubor bezrozměrných parametrů se vztahuje na celou řadu fyzikálně podobných případů obrábění.

Bezrozměrné parametry, určující jednotlivé případy, jsou: směrová orientace systému, měřená úhlem α mezi kolmicí Y k obráběnému povrchu a směrem té pružiny systému, která prochází prvním kvadrantem, dále poměrné tuhosti obou pružin κ_1, κ_2 , poměrná tlumení v obou základních směrech γ_1, γ_2 a další složený parametr $d = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$, nazvaný naladění systému.

Vyšetření ukázalo, že v souhrnu možných případů existují případy stabilní a případy nestabilní. Theoreticky bylo prokázáno, že vznik samobuzených kmitů lze vysvětlit i bez předpokladu závislosti rezné síly na rychlosti ze skutečnosti, že rezná síla závisí na relativní poloze nástroje a obrobku.

Byl vyšetřen vliv jednotlivých parametrů na stabilitu případů.

Ukazuje se, že nejdůležitějším parametrem s tohoto hlediska je směrová orientace daná hodnotou α . V určitých rozmezech hodnot α jsou všechny případy stabilní, bez ohledu na velikost ostatních parametrů $\kappa_1, \kappa_2, \gamma$.

Dalším důležitým parametrem je naladění $d = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$. Ukazuje se, že pro $d < 1$ jsou prakticky všechny případy stabilní. Pro $d > 1$ závisí stabilita případu na hodnotách poměrných tuhostí κ_1, κ_2 a tlumení γ .

Nestabilita může nastat při velmi malém tlumení a naladění $d > 1$, blízkém hodnotě $d = 1$ při velmi vysokých hodnotách poměrných tuhostí κ_1, κ_2 . Nestabilní případy přecházejí ve stabilní zvětšováním obou poměrných tuhostí κ_1, κ_2 anebo zmenšením nebo zvětšením jedné z nich (změna naladění d) anebo zvětšením tlumení.

Vliv tlumení na stabilitu případů byl vyšetřován pouze za předpokladu stejné velikého poměrného tlumení v obou hlavních směrech, a to v rozsahu od velmi malého (limitně nulového) tlumení do maximálních prakticky se vyskytujících hodnot tlumení. Pro nulové tlumení nebylo vyšetření provedeno. Ukazuje se, že čím vyšší je tlumení, tím menší je rozsah nestabilních případů. Zásadní vliv nejdůležitějších parametrů α a d na stabilitu případů je však v podstatě na tlumení nezávislý.

Na základě této skutečnosti se rozhodujeme provést vyšetření znovu, a to pro tlumení dokonale nulové, abychom se přesvědčili, zda i v tomto případě zůstane základní charakter celého principu polohové vazby zachován. Budou-li odchylky od výsledků získaných pro tlumený systém malé, bude mít řešení systému bez tlumení výhodu formální jednoduchosti a bude možno jednak vyšetřit další podrobnosti principu polohové vazby, jednak provést řešení složitějších systémů.

20. Princip polohové vazby pro kmitavý systém o dvou pružinách bez tlumení

a) Podmínka stability

Vyšetření provedeme podle stejného schématu jako v předchozím oddílu, uvedeného na obr. 73.

Poloha řídicího kmitavého systému je určena hodnotou úhlu α , měřeného od kolmice Y k obráběnému povrchu ke směru X_1 , pružiny ležící v prvním kvadrantu, hmotou m a tuhostí obou pružin k_1, k_2 . Tlumení v obou hlavních směrech $c_{1,2} = 0$. Řezná síla závisí opět stejným způsobem na výchylce ve směru Y

$$P = -ry$$

a má směr odchýlený od směru Y o úhel β .

Základní pohybové rovnice obdržíme dosazením $c_1 = 0, c_2 = 0$ do (73):

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 + [k_1 + r \cos \alpha \cos(\beta - \alpha)] x_1 - r \sin \alpha \cos(\beta - \alpha) x_2 &= 0, \\ m\ddot{x}_2 + [k_2 - r \sin \alpha \sin(\beta - \alpha)] x_2 + r \cos \alpha \cos(\beta - \alpha) x_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Z nich pak za předpokladu

$$x_1 = \xi_1 \cdot e^{st}, \quad x_2 = \xi e^{st} \quad (103a)$$

obdržíme charakteristickou rovnici

$$m^2 s^4 + ms^2[k_1 + k_2 - r \sin \alpha \sin(\beta - \alpha) + r \cos \alpha \cos(\beta - \alpha)] + k_1 k_2 - k_1 r \sin \alpha \sin(\beta - \alpha) + k_2 r \cos \alpha \cos(\beta - \alpha) = 0. \quad (104)$$

Dělením r^2 a zavedením označení

$$z = \frac{s}{\sqrt{\frac{r}{m}}} \quad (104a)$$

a dále zavedením označení jako dříve

$$\alpha_1 = \frac{k_1}{r}, \quad \alpha_2 = \frac{k_2}{r}, \quad a = \sin \alpha \sin(\beta - \alpha), \quad b = \cos \alpha \cos(\beta - \alpha)$$

obdržíme redukovanou charakteristickou rovnici

$$z^4 + z^2(\alpha_1 + \alpha_2 + b - a) + \alpha_1 \alpha_2 - a \alpha_1 + b \alpha_2 = 0. \quad (105)$$

Kořeny z rovnice (105) je nutno násobit $\sqrt{\frac{r}{m}}$, abychom obdrželi kořeny rovnice (104).

Hloubkový koeficient r má rozměr tuhosti. Závislost proměnlivé složky řezné síly na výchylce ve směru Y vystupuje v celém řešení pohybu řídicího systému jako vlastnost zvláštní pružiny, která při vychýlení ve směru Y dává sílu $-ry$, úměrnou výchylce. Na rozdíl od obvyklé pružiny nespádá síla výchylkou vyvolaná do směru výchylky (v opačném smyslu než výchylka), nýbrž je od něho

uchýlena o úhel β . Výraz $\sqrt{\frac{r}{m}}$ má rozměr kruhové frekvence jako by uvedená zvláštní pružina, charakterisující závislost proměnlivé složky řezné síly na výchylce y , tvořila s hmotou m zvláštní kmitavý systém.

Redukovaná charakteristická rovnice (105) je opět čtvrtého stupně jako u systému s tlumením, avšak neobsahuje členy s lichými mocninami z , a můžeme proto provést obecné řešení tak, že nejprve nalezneme kořeny $(z^2)_{1,2}$ rovnice (105) a jejich odmocněním kořeny z_1, z_2, z_3, z_4 .

$$(z^2)_{1,2} = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + b - a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + b - a}{2}\right)^2 - (\alpha_1 \alpha_2 - a \alpha_1 + b \alpha_2)}. \quad (106)$$

Označíme

$$A = +\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + (b - a)}{2}, \quad D = A^2 - (\alpha_1 \alpha_2 - a \alpha_1 + b \alpha_2), \quad (106a)$$

takže

$$(z^2)_{1,3} = -A \pm \sqrt{D} \quad (107)$$

a vzhledem k (104a) obdržíme pro kořeny původní charakteristické rovnice:

$$(s^2)_{1,2} = \frac{r}{m} \left(-A \pm \sqrt{D} \right). \quad (108)$$

Z fyzikálního významu plyne, že je vždy

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad b - a = \cos \beta > 0.$$

Proto je také vždy

$$A > 0$$

Pro $(s^2)_{1,2}$ a dále pro kořeny $s_{1,2,3,4}$ charakteristické rovnice plynou pak tyto možnosti

$$1. \quad D > 0, \quad A > \sqrt{D} \\ (s^2)_1 < 0, \quad (s^2)_2 < 0, \quad \text{oba kvadratické kořeny jsou reálné, záporné.}$$

Pak kořeny

$$s_{1,2} = \pm j\omega_1, \quad s_{3,4} = \pm j\omega_2, \quad \text{t. j. dvě dvojice ryze imaginární,}$$

dosazeny do (103a) dávají dva současné pohyby kmitavé s konstantní amplitudou a s frekvencemi ω_1, ω_2 .

$$2. \quad D < 0, \quad A < \sqrt{D};$$

$(s^2)_1 > 0, (s^2)_2 < 0$; oba kvadratické kořeny jsou reálné, jeden záporný a jeden kladný.

Pak obdržíme

$$s_{1,2} = \pm j\omega,$$

jednu dvojici ryze imaginárních kořenů, která vede na kmitavý pohyb netlumený o frekvenci ω , a

$$s_{3,4} = \pm \lambda,$$

jednu dvojici reálných kořenů.

Jeden z nich vede na nekmitavý pohyb tlumený, druhý na nekmitavý pohyb exponenciálně s časem narůstající — nekmitavá nestabilita.

3. $D < 0$

$$s^{(2)}_{1,2} = \lambda^2 - \omega^2 \pm 2j\lambda\omega. \quad (109)$$

Kvadratické kořeny jsou komplexní sdružené.

Pak obdržíme dvě dvojice komplexních sdružených kořenů s:

$s_{1,2} = +\lambda \pm j\omega$ — samobuzené kmitání s koeficientem narůstání velikosti λ a s frekvencí ω ,

$s_{3,4} = -\lambda \pm j\omega$ — tlumený kmitavý pohyb s koeficientem útlumu velikosti λ a s frekvencí ω .

Tento případ je pro naši úlohu nejdůležitější.

4. $D = 0$

$$(s^2)_1 = (s^2)_2 = -A.$$

Oba kvadratické kořeny splývají ve dvojný kořen.

Tento případ je mezní mezi případy 1, 2 a 3 a značí *mez stability*. Možnosti 1 a 2 jako případy pohybu nekmitavého nebo kmitavého s konstantní amplitudou odpovídají stabilním případům tlumeného systému. Případ 3, který vede k samobuzenému kmitání, odpovídá nestabilním případům systému s tlumením.

Případ 4 vyjadřuje *podmínku meze stability*. Dosadíme-li podle (106a), obdržíme:

$$\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2 + b - a}{2}\right)^2 = \kappa_1\kappa_2 - a\kappa_1 + b\kappa_2. \quad (110)$$

Upravíme na

$$(\kappa_2 - \kappa_1)^2 - 2(\kappa_2 - \kappa_1)(a + b) + (a + b)^2 = 4ab$$

a odmocněním

$$(\kappa_2 - \kappa_1)_{1,2} = a + b \pm 2\sqrt{ab} \quad (111)$$

nebo po dosazení za úhlové funkce a, b :

$$(\kappa_2 - \kappa_1)_{1,2} = \cos(2\alpha - \beta) \pm \sqrt{\cos^2(2\alpha - \beta) - \cos^2\beta}. \quad (111a)$$

Z rovnice (111) vyplývá, že v podmínce stability jsou hodnoty poměrných tuhostí pružin řídicího kmitavého systému zastoupeny pouze jako rozdíl $(\kappa_2 - \kappa_1)$. Z toho plyne dále důležitý závěr, že stabilita systému bez tlumení se nemění, jestliže poměrné tuhosti κ_1, κ_2 obou pružin systému současně zvětšíme nebo zmenšíme o stejnou hodnotu.

b) *Vliv směrové orientace a naladění na stabilitu*

Vliv tlumení na stabilitu

Z podmínky meze stability (111) je zřejmé, že reálné meze stability mohou existovat pouze tehdy, je-li \sqrt{ab} reálná, čili je-li $ab > 0$. To je podle (99) pouze pro

$$\alpha < \beta. \quad (112)$$

Dále podle (111a) a jelikož je vždy

$$\cos(2\alpha - \beta) > \sqrt{\cos^2(2\alpha - \beta) - \cos^2\beta}, \quad (113)$$

vyplývá, že meze stability jsou vždy dvě. Uvnitř těchto dvou mezí jsou obsaženy případy nestabilní, vně případy stabilní.

Vzhledem k (113) a dále proto, že

$$\cos(2\alpha - \beta) > 0,$$

může být rovnice meze stability (111a) splněna pouze pro

$$\kappa_2 > \kappa_1, \quad \text{čili} \quad d > 1. \quad (114)$$

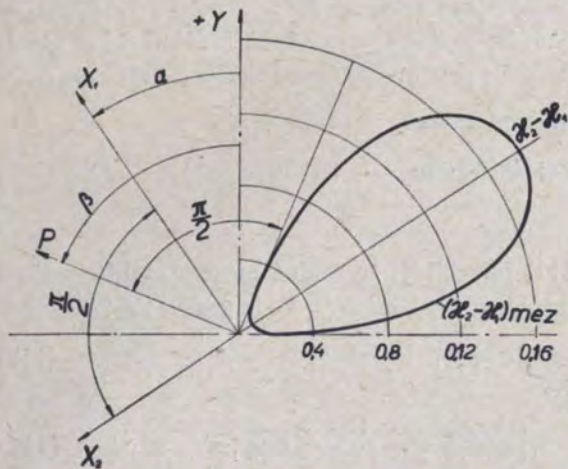
Podmínky (112) a (114) tedy stanoví, že nestabilní může být pouze takový řídicí systém, u kterého směr pružiny menší tuhosti spadá mezi kolmici Y k obráběnému povrchu a směr řezné síly (daný úhlem β). Všechny ostatní řídicí systémy jsou stabilní, bez ohledu na velikost tuhosti pružin a bez ohledu na řezné podmínky.

Mezní podmínka stability (111a) je v případě netlumeného systému se dvěma pružinami navzájem kolmými dána dvěma hodnotami

$$(\kappa_2 - \kappa_1) \text{ a } \alpha.$$

Lze ji nejlépe graficky znázornit v polárním diagramu obr. 82, kde jsou vyneseny obě mezní hodnoty rozdílu $(\kappa_2 - \kappa_1)$ ve směru pružiny větší tuhosti, t. j. ve směru X_2 pružiny s tuhostí k_2 (neboť pouze pro $k_2 > k_1$ existuje nestabilita) v závislosti na natočení řídicího systému, měřeném úhlem α mezi směrem Y a $X_1 \perp X_2$. Z diagramu je patrný rozsah směru X_2 a v něm rozsah rozdílu $(\kappa_2 - \kappa_1)$, pro který vzniká samobuzené kmitání. Vidíme, že největší šířka pole nestability je dána směrovou orientací systému $\alpha = \beta \frac{1}{2}$.

Analogicky s diagramem obr. 76, uvedeným pro tlumený řídicí systém, překreslujeme obr. 82 do souřadnic hloubkový koeficient r — směrová orientace α a uvádíme čáry r_{mez1} , r_{mez2} pro různé hodnoty rozdílu tuhostí obou pružin systému



Obr. 82.

($k_2 - k_1$) (obr. 83). Hodnoty r_{mez} vynášíme opět do směru X_1 pružiny menší tuhosti, na rozdíl od obr. 82. Vidíme, že průběh závislosti r_{mez} na α v obr. 83 pro hodnotu $k_2 - k_1 = 2$, která odpovídá příkladu znázorněnému v obr. 76, je téměř shodný s průběhem závislosti r_{mez} na α v obr. 76.

Analogicky s diagramem obr. 77 kreslíme pro netlumený systém mezní čáry v souřadnicích κ_1 , κ_2 v obr. 84, v kterém jsou slabě vytaženy mezní čáry pro tlumení $\gamma = 0$

a silně mezní čáry, zjištěné v diagramu 77 pro $\gamma \rightarrow 0$. Diagram platí pro směrovou orientaci $\alpha = \frac{1}{2}\beta = 34^\circ 5'$.

Mezní čáry netlumeného systému jsou podle (111a) přímky

$$\kappa_2 = \kappa_1 + \cos(2\alpha - \beta) \pm \sqrt{\cos^2(2\alpha - \beta) - \cos^2 \beta}. \quad (115)$$

t. j. pro $\alpha = \frac{1}{2}\beta$:

$$\kappa_2 = \kappa_1 + 1 \pm \sin \beta, \quad (116)$$

t. j. pro $\beta = 68^\circ 10'$:

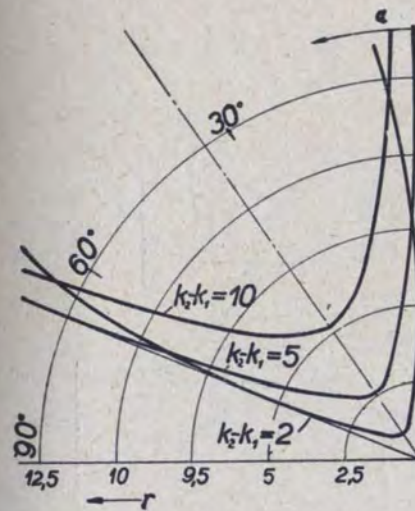
$$\kappa_2 = \kappa_1 + 1 \pm 0,93.$$

V obrázku je vyšrafován rozdíl v polích nestability pro systém s nulovým tlumením a s tlumením velmi malým. V protikladu ke skutečnosti, zjištěné při vyšetřování systému s tlumením, že zvyšování tlumení zužuje pole nestability, zjišťujeme, že přechodem od nulového tlumení k tlumení nenulovému se rozšiřuje pole nestability v některých částech, daných velmi malou hodnotou tuhosti pružiny ležící ve směru X_1 . Při vyšetřování systému s tlumením jsme zjistili velmi úzké pole nestability i pro případ $d < 1$, a to pro hodnoty velmi malé tuhosti ve směru X_2 , které u systému s nulovým tlumením neexistuje. Tedy také pro velmi malé hodnoty tuhosti k_2 se přechodem od nulového tlumení k nenulovému pole nestability rozšiřuje.

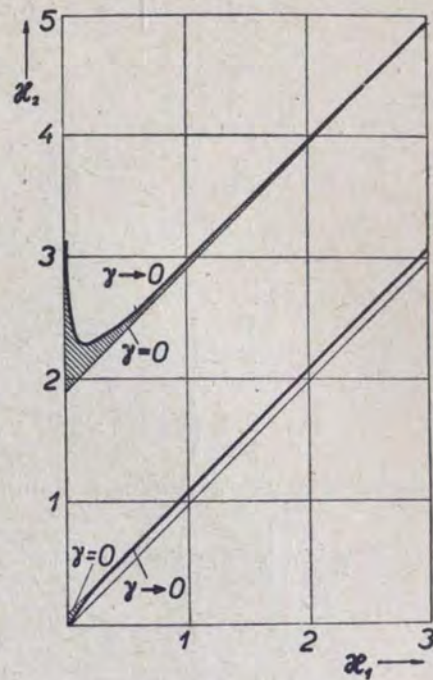
Rozdíl ve stabilitě mezi systémem s tlumením a systémem bez tlumení spočívá tedy v tom, že ve většině případů tlumení zužuje pole nestability, zmenšuje

nestabilitu, ale v některých případech, daných pro systém se dvěma navzájem kolmými pružinami velmi malými hodnotami tuhosti jedné z obou pružin a ležících blízko meze stability, může způsobit přechod od stability k nestabilitě.

Hlavní výsledky vyšetření stability netlumeného systému, které udávají vliv směrové orientace, tuhosti pružin systému a naladění systému na jeho stabilitu, souhlasí v podstatě s výsledky vyšetření systému tlumeného. S velmi malými odchylkami platí, že pro ty hodnoty α , κ_1 , κ_2 , pro které je stabilní



Obr. 83.



Obr. 84.

systém bez tlumení, je stabilní i systém s tlumením. Proto je užitečné i vyšetřování stability systémů bez tlumení a je možno se na ně v složitějších případech omezit. Ve většině případů obdržíme tak kriteria stability s určitou kladnou bezpečností.

c) Koeficient narůstání a frekvence samobuzených kmitů

Nestabilní případy — samobuzené kmitání — jsou podle bodu a) 3 dány podmínkou $D < 0$. Při jejím splnění obdržíme kořeny charakteristické rovnice $s_{1,2,3,4} = \pm \lambda \pm j\omega$, kde pro samobuzené kmitání platí $+$ λ , a pro řešení rovnice pohybu (103) obdržíme

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= C_1 \cdot e^{(\lambda+j\omega)t} + C_2 e^{(\lambda-j\omega)t}, \\ x_2 &= D_1 e^{(\lambda+j\omega)t} + D_2 e^{(\lambda-j\omega)t} \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

nebo též

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \cdot e^{\lambda t} \cdot \sin \omega t, \\ x_2 &= \xi A_1 \cdot e^{\lambda t} \cdot \sin (\omega t + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

Reálná část λ kořenu charakteristické rovnice udává koeficient narůstání samobuzeného kmitání, koeficient ω jeho imaginární části udává kruhovou frekvenci samobuzeného kmitání. Hodnoty λ a ω určíme podle (109) a (108)

$$\lambda^2 - \omega^2 \pm 2j\lambda\omega = (s)_{1,2}^2 = \frac{r}{m} (-A \pm \sqrt{D}).$$

Odtud

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{r}{m} (\sqrt{A^2 - D} + A),$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \frac{r}{m} (\sqrt{A^2 - D} - A)$$

a po dosazení podle (106a)

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \frac{1}{2} \frac{r}{m} \left(\sqrt{\kappa_1 \kappa_2 - a\kappa_1 + b\kappa_2} + \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + b - a}{2} \right), \\ \lambda^2 &= \frac{1}{2} \frac{r}{m} \left(\sqrt{\kappa_1 \kappa_2 - a\kappa_1 + b\kappa_2} - \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + b - a}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Po dosazení za úhlové funkce a, b obdržíme

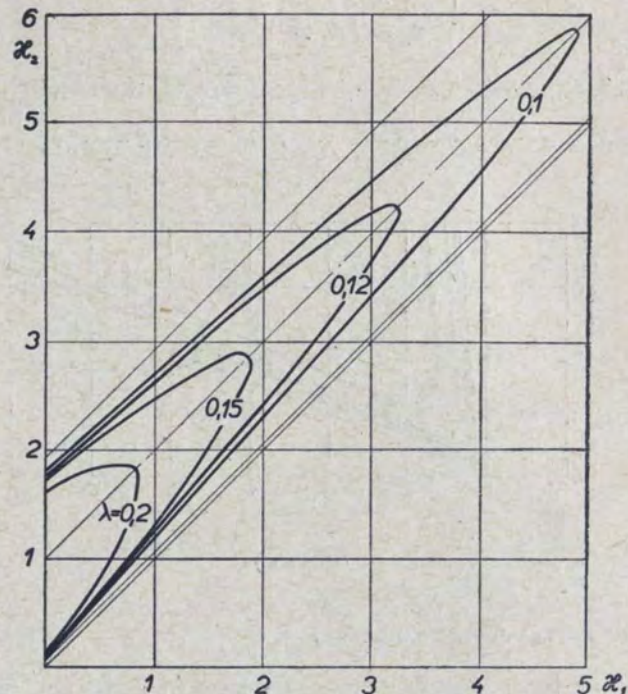
$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \frac{1}{2} \frac{r}{m} \left(\sqrt{\kappa_1 \kappa_2 + (\kappa_2 + \kappa_1) \cdot \frac{\cos \beta}{2} + (\kappa_2 - \kappa_1) \frac{\cos (2\alpha - \beta)}{2}} + \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \cos \beta}{2} \right), \\ \lambda^2 &= \frac{1}{2} \frac{r}{m} \left(\sqrt{\kappa_1 \kappa_2 + (\kappa_2 + \kappa_1) \frac{\cos \beta}{2} + (\kappa_2 - \kappa_1) \frac{\cos (2\alpha - \beta)}{2}} - \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \cos \beta}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Označíme-li

$$\frac{k_1}{m} = \Omega_1^2, \quad \frac{k_2}{m} = \Omega_2^2, \quad \frac{r}{m} = \Omega_r^2, \text{ přepíšeme (120) na}$$

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\Omega_1^2 \Omega_2^2 + \Omega_r^2 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \cdot \frac{\cos \beta}{2} + \Omega_r^2 (\Omega_2^2 - \Omega_1^2) \frac{\cos (2\alpha - \beta)}{2}} + \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_r^2 \cos \beta}{2} \right), \\ \lambda^2 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\Omega_1^2 \Omega_2^2 + \Omega_r^2 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \cdot \frac{\cos \beta}{2} + \Omega_r^2 (\Omega_2^2 - \Omega_1^2) \frac{\cos (2\alpha - \beta)}{2}} - \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_r^2 \cos \beta}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

Pro $\frac{r}{m} = 1$ a $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ jsou hodnoty koeficientu narůstání λ vyznačeny pro případy dané poměrnými tuhostmi κ_1, κ_2 v diagramu obr. 85. V obrázku jsou zakresleny křivky spojující případy, pro které vychází stejně veliký koeficient narůstání λ , jehož velikost je u jednotlivých křivek vyznačena. Jsou to paraboly



Obr. 85.

s osou $\kappa_2 = \kappa_1 + 1$. Koeficient narůstání λ je nejvyšší právě na symetrále pole nestability a zmenšuje se se vzdáleností od ní a dále při zvětšování poměrných tuhostí κ_1, κ_2 pružin systému.

Obr. 85 je překreslen do souřadnic $\frac{r}{k_1}, \frac{k_2}{k_1}$ v obr. 85 a).

Pro stejný případ $\frac{r}{m} = 1, \alpha = \frac{1}{2}\beta$ jsou vyznačeny v obr. 86 křivky udávající hodnotu kruhové frekvence ω samobuzeného kmitání uvnitř nestabilního pole a ω_1, ω_2 netlumeného kmitání vně nestabilního pole. Uvedené křivky spojují místa se stejnou hodnotou ω . Čáry $\omega = \text{konst}$ v nestabilním poli jsou hyperboly symetrické podle osy symetrie nestability. Hodnota frekvence kmitání vzrůstá se zvyšováním poměrných tuhostí κ_1, κ_2 .

d) Poměr amplitud a fázový vztah kmitů v obou hlavních směrech

Označíme-li poměr složek x_2 a x_1 kmitů ξ a jejich fázový posun φ , píšeme

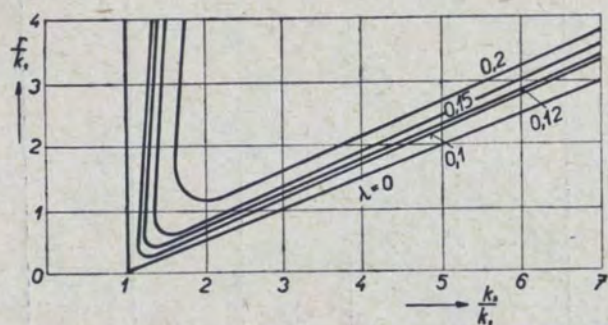
$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cdot e^{\lambda t} \cdot \sin \omega t, \\ x_2 &= \xi A_1 \cdot e^{\lambda t} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

nebo též

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \cdot e^{st}, \\ x_2 &= \xi A_1 \cdot e^{st} \cdot e^{j\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Dosadíme (122) do jedné ze základních pohybových rovnic (103)

$$ms^2 + k_1 + r \cos \alpha \cos(\beta - \alpha) - r \sin \alpha \cos(\beta - \alpha) \cdot \xi \cdot e^{j\varphi} = 0.$$



Obr. 85a).

Rovnici dělíme r a zavedeme označení κ_1 a z

$$z^2 + \kappa_1 + \cos \alpha \cos(\beta - \alpha) - \sin \alpha \cos(\beta - \alpha) \cdot \xi e^{j\varphi} = 0.$$

Odtud

$$\xi \cdot e^{j\varphi} = \frac{z^2 + \kappa_1 + \cos \alpha \cos(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cos(\beta - \alpha)}.$$

Dosazením za z ze (106) obdržíme

$$\xi e^{j\varphi} = \frac{1}{2} \frac{\kappa_2 - \kappa_1 - (a + b) \pm j\sqrt{4(\kappa_1\kappa_2 - a\kappa_1 + b\kappa_2) - (\kappa_1 + \kappa_2 + b - a)^2}}{\sin \alpha \cos(\beta - \alpha)}$$

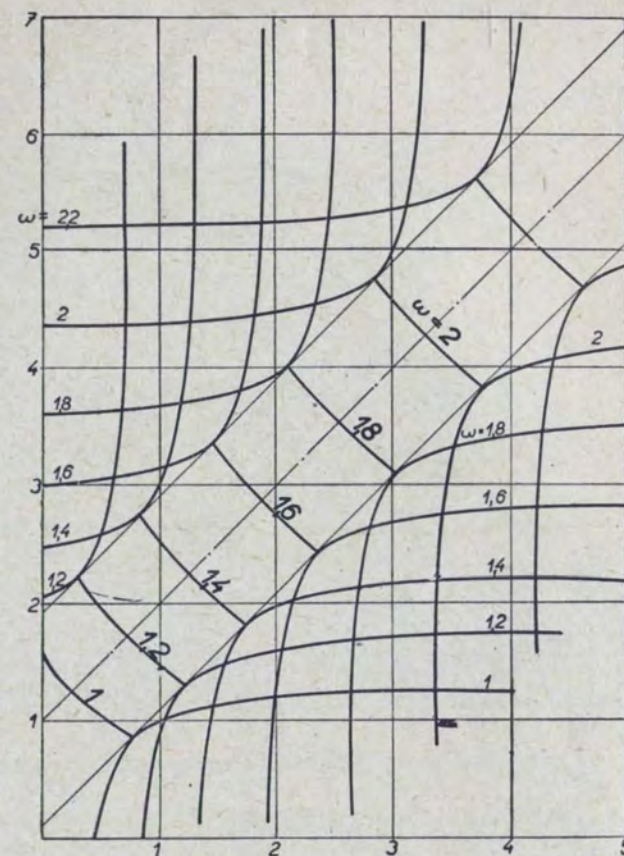
a po úpravě

$$\xi \cos \varphi + j \xi \sin \varphi = -\frac{1}{2} \frac{\kappa_2 - \kappa_1 - (a + b) \pm j\sqrt{4ab - [\kappa_2 - \kappa_1 - (a + b)]^2}}{\sin \alpha \cos(\beta - \alpha)} \quad (123)$$

Odtud

$$\xi \cos \varphi = -\frac{1}{2} \frac{\kappa_2 - \kappa_1 - (a + b)}{\sin \alpha \cos(\beta - \alpha)},$$

$$\begin{aligned} \xi \sin \varphi &= \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4ab - [\kappa_2 - \kappa_1 - (a + b)]^2}}{\sin \alpha \cos(\beta - \alpha)}, \\ \xi &= \pm \sqrt{\frac{\cos \alpha \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cos(\beta - \alpha)}} \end{aligned} \quad (124)$$



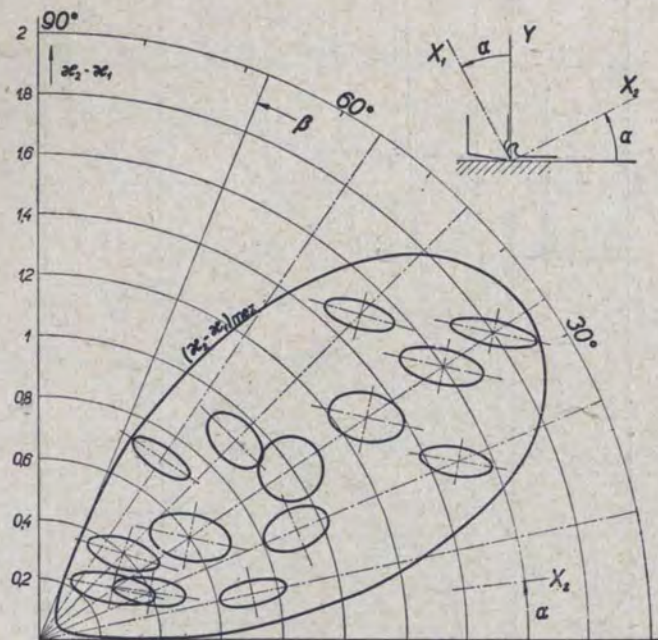
Obr. 86.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \pm \frac{\sqrt{4ab - [\kappa_2 - \kappa_1 - (a + b)]^2}}{\kappa_2 - \kappa_1 - (a + b)} = \\ &= \pm \frac{\sqrt{-(\kappa_2 - \kappa_1)^2 + 2(\kappa_2 - \kappa_1) \cos(2\alpha - \beta) - \cos^2 \beta}}{\kappa_2 - \kappa_1 - \cos(2\alpha - \beta)}. \end{aligned} \quad (125)$$

Obdržíme dvě dvojice hodnot ξ a φ podle kombinace znamének. Jedna z dvojic platí pro samobuzené kmitání, druhá pro tlumené kmitání. Rovnice (122) udávají pohyb ve stále se zvětšující nebo zmenšující elipse. Jedna z obou možných dvojic ξ a φ určuje probíhání eliptické dráhy v jednom směru, druhá v druhém

směru s důsledkem z toho plynoucím — načerpaná nebo ztracená energie za jeden cyklus — tak jak bylo předpokládáno při popisu obr. 69.

Z výrazů (124) a (125) vyplývá zajímavá skutečnost, že stejně jako v podmínce stability jsou zde zastoupeny hodnoty κ_2, κ_1 pouze výrazem $(\kappa_2 - \kappa_1)$. To znamená, že tvar pohybu systému se nemění, když se zvětší nebo zmenší obě poměrné tuhosti κ_2, κ_1 o stejnou hodnotu.



Obr. 87.

Dosažením $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ do (124) a (125) obdržíme:

$$\alpha = \frac{1}{2}\beta : \xi = \pm 1, \quad \text{tg } \varphi = \pm \frac{\sqrt{-(\kappa_2 - \kappa_1)^2 + 2(\kappa_2 - \kappa_1) - \cos^2 \beta}}{\kappa_2 - \kappa_1 - 1}$$

a pro symetrálu nestabilního pole

$$\kappa_2 = \kappa_1 + 1 \quad (\text{srov. obr. 84}),$$

$$\text{tg } \varphi = \infty, \quad \varphi = \frac{1}{2}\pi.$$

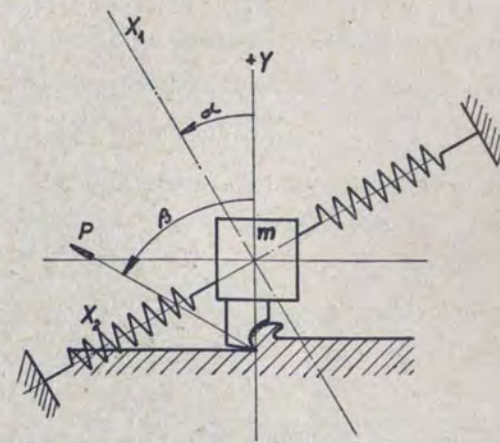
Pro některé hodnoty $(\kappa_2 - \kappa_1)$ a α bylo vypočteno ξ a φ a elipsy dané proměnnými $\frac{x_1}{e^{\lambda t}}$ a $\frac{x_2}{e^{\lambda t}}$ pro případ $\lambda > 0$, t. j. samobuzeného kmitání, byly zakresleny do diagramu obr. 87. Diagram je kreslen v polárních souřadnicích $\alpha, (\kappa_2 - \kappa_1)$, kde hodnota $(\kappa_2 - \kappa_1)$, pro kterou je příslušná elipsa kreslena, je vynesena

ve směru X_2 , kolmém ke směru X_1 pružiny v prvním kvadrantu, ke které je určen úhel α od osy Y . Směr $-X_2$ je pak dán úhlem α měřeným od osy $-Z$. Střed každé elipsy je umístěn do bodu daného hodnotami $\alpha, (\kappa_2 - \kappa_1)$, pro které elipsa platí. V diagramu jsou znovu vyznačeny mezní čáry stability.

Elipsy samotné jsou kresleny vzhledem k souřadným osám X_1, X_2 , resp. Y, Z . Násobíme-li jejich souřadnice součinitelem $e^{\lambda t}$, obdržíme neuzavřenou křivku stále se rozvíjející, která udává tvar pohybu nástroje v obráběném materiálu. Zvětšení souřadnic během jednoho cyklu je malé, takže elipsy uvedené v obr. 87 udávají velmi přibližně tvar pohybu nástroje v obráběném materiálu během jednoho cyklu.

Výsledný tvar pohybu tedy odpovídá předpokladu učiněnému v kap. IV, 17f).

Na mezi stability přecházejí elipsy v úsečky — při kmitavém pohybu nástroje v obráběném materiálu se nevytváří práce. Blízko meze stability jsou elipsy štíhlé. Při zvětšování hodnoty r nad r_{mez} se postupně tvar elipsy rozšiřuje, až pro $\kappa_2 - \kappa_1 = \cos(2\alpha - \beta)$ je nejširší — fázový posun x_2 za x_1 je $\frac{1}{2}\pi$. Při dalším zvětšování hodnoty r se fázový posun opět zmenšuje, elipsy jsou štíhlejší, až na horní mezi stability opět přecházejí v úsečku.



Obr. 88.

e) Systém s jednou pružinou jako základní prvek polohové vazby

Základní otázky řešení systému bez tlumení, t. j. podmínka stability a tvar pohybu systému, jsou vyjádřeny vztahy (111), (124), (125), které obsahují proměnné κ_2, κ_1 , pouze ve spojení $(\kappa_2 - \kappa_1)$. Je zřejmé, že stabilita nebo nestabilita a tvar pohybu (poloha a tvar narůstajícího eliptického pohybu, který je základem načerpávání energie pomocí řezné síly) se nemění, jestliže poměrné tuhosti obou pružin systému zvětšíme nebo zmenšíme o stejnou hodnotu. Jednou z takových možností je zmenšení obou poměrných tuhostí, z nichž $\kappa_2 > \kappa_1$ pro nestabilní případy, takže poměrná tuhost $\kappa_1 = 0$.

Obdržíme tak systém, který stále má dva stupně volnosti, avšak je vytvořen zavěšením hmoty na pružinu v jediném směru (obr. 88); při tom ve směru kolmém na tuto pružinu je systém bez působení řezné síly volný. Úhel α měříme v případě, že pružina prochází druhým kvadrantem od osy Y ke kolmici X_1 ke směru pružiny X_2 . I když takový systém lze přibližně v pokusu realizovat,

nevyskytuje se nikdy ve skutečném stroji. Přesto však je jeho představa užitečná pro ujasnění mechanismu vzniku samobuzených kmitů na základě principu, který jsme nazvali principem polohové vazby.

Napišeme-li pohybové rovnice (103) pro případ $k_1 = 0$, t. j. pružinu tuhosti k_2 (ve směru X_2) ponecháme, obdržíme

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 + r \cos \alpha \cos (\beta - \alpha) x_1 - r \sin \alpha \cos (\beta - \alpha) x_2 &= 0, \\ m\ddot{x}_2 + [k_2 - r \sin \alpha \sin (\beta - \alpha)] x_2 + r \cos \alpha \cos (\beta - \alpha) x_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

Vidíme, že ve směru X_1 , ve kterém není pružina, působí síly dané zvláštní pružinou, vytvořenou závislostí řezné síly na hloubce řezu y .

Po zavedení bezrozměrných proměnných obdržíme podmínku meze stability

$$\kappa_2 = \cos (2\alpha - \beta) \pm \sqrt{\cos^2 (2\alpha - \beta) - \cos^2 \beta}, \quad (127)$$

poměr složek kmitání do směru X_2 a X_1

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{\cos \alpha \sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cos (\beta - \alpha)}} \quad (128)$$

a jejich fázový posun

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{\sqrt{\kappa_2^2 - 2\kappa_2 \cos (2\alpha - \beta) - \cos^2 \beta}}{\kappa_2 - 1}. \quad (129)$$

Frekvence a koeficient narůstání samobuzeného kmitání vyplývá z (121) pro $\Omega_1^2 = 0$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left(\Omega_2 \Omega_r \sqrt{\cos \alpha \cos (\beta - \alpha)} + \frac{\Omega_2^2 + \Omega_r^2 \cos \beta}{2} \right), \quad (130)$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \left(\Omega_2 \Omega_r \sqrt{\cos \alpha \cos (\beta - \alpha)} - \frac{\Omega_2^2 + \Omega_r^2 \cos \beta}{2} \right). \quad (131)$$

Z předchozích vyšetření systému o dvou pružinách plyne pro systém o jedné pružině, že jeho nestabilita může nastat pouze tehdy, jestliže jeho pružina leží v druhém kvadrantu v rozmezí úhlu

$$0 < \alpha < \beta,$$

a to pouze v určitém rozmezí velikosti tuhosti pružiny, znázorněném v diagramu obr. 82, jestliže v tomto diagramu souřadnici paprsku označíme κ_2 místo $(\kappa_2 - \kappa_1)$. Tvar výsledného pohybu je vyznačen v diagramu obr. 87, jestliže v něm souřadnici paprsku označíme κ_2 místo $(\kappa_2 - \kappa_1)$.

Nestabilita může nastat při maximální hodnotě poměrné tuhosti κ_2 pružiny systému pro směrovou orientaci $\alpha = \frac{1}{2}\beta$. Pro tuto orientaci je rozmezí hodnot tuhosti pružiny, pro které je systém nestabilní, dáno:

$$k_2 = r(1 \pm \sin \beta), \quad (132)$$

poměr složek kmitů x_2 a x_1 je

$$\xi = \pm 1,$$

$$\text{fázový posun } \operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{\sqrt{\sin^2 \beta - (\kappa_2 - 1)^2}}{\kappa_2 - 1},$$

frekvence samobuzeného kmitání

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left(\Omega_2 \Omega_r \cos \frac{\beta}{2} + \frac{\Omega_2^2 + \Omega_r^2 \cos \beta}{2} \right)$$

a koeficient narůstání

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \left(\Omega_2 \Omega_r \cos \frac{\beta}{2} - \frac{\Omega_2^2 + \Omega_r^2 \cos \beta}{2} \right).$$

Samobuzené kmitání systému s jednou pružinou vykazuje všechny typické znaky, které jsme poznali pro systémy se dvěma pružinami.

Ukazuje se, že důvodem vzniku samobuzeného kmitání je zvláštní vazba mezi vlivem pružiny, na které je hmota zavěšena, a vlivem zvláštní pružiny, vytvořené řeznou silou proměnlivou úměrně k výchylce hmoty ve směru kolmém k obráběnému povrchu. Zvláštnost této pružiny spočívá v tom, že vychýlením hmoty ve směru kolmém k povrchu vzniká síla úměrná výchylce (s koeficientem úměrnosti r), avšak její směr nespádá do směru výchylky a svírá s ní určitý úhel. Existence této „pružiny“ je typickým znakem procesu obrábění. Bylo by jistě možno najít takovou „pružinu“ i v jiných fyzikálních procesech, pro které by pak podmínky vzniku samobuzených kmitů byly stejné jako v našem případě.

V diagramu obr. 84 je případ systému s jedinou pružinou dán osou souřadnic $\kappa_2(\kappa_1 = 0)$. Přímkami meze stability na ní vymezují úsečku

$$\kappa_2 = 1 \pm \sin \beta.$$

V diagramu obr. 77 je opět systém s jednou pružinou, avšak s tlumením, dán osou souřadnic $\kappa_2(\kappa_1 = 0)$. Vidíme, že v případě systému s tlumením je systém s jednou pružinou při směrové orientaci $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ nestabilní bez ohledu na velikost poměrné tuhosti pružiny κ_2 . Z tohoto diagramu je též vidět, že i tlumený systém s jednou pružinou, která prochází prvním kvadrantem, je nestabilní — osa souřadnic $\kappa_1(\kappa_2 = 0)$. Vidíme, že vliv tlumení se v případě systémů s jednou pružinou projevuje tak, že rozšiřuje pole nestability na všechny hodnoty κ_2 nebo κ_1 . Právě tyto případy, kdy jedna z pružin má velmi malou tuhost, byly dříve označeny jako případy, v kterých se vliv tlumení projevuje abnormálním způsobem tak, že zvětšuje nestabilitu.

f) Závěr

Ukázalo se, že princip, který byl nazván principem polohové vazby, spočívá v tom, že zvláštní vazba mezi „pružinou“ řezné síly a skutečnými

pružinami systému (v dalším uvidíme, že obecně formulujeme: zvláštní vazba mezi tvarem kmitání s frekvencí Ω , a tvary kmitání systému Ω_1, Ω_2 atd.) způsobuje při určitých hodnotách systému fázový posun mezi kmitáním v obou základních směrech. Relativní pohyb mezi nástrojem a obrobkem je křivkový a integrál práce, kterou vykoná řezná síla působící na pohybující se hmotu systému za jeden cyklus, není nulový, nýbrž kladný a vede k samobuzenému kmitání. Fázový posun mezi kmitáním v obou základních směrech, který v nestabilních případech vede ke zvětšování energie systému kmitajícího v silovém poli řezné síly, není podmíněn existencí tlumení systému. Tlumení může v některých případech vyvolat vhodný fázový posun, vedoucí k načerpávání energie i tehdy, jestliže polohová vazba systému bez tlumení nedává k tomu podmínky. Tyto případy jsou však prakticky zcela výjimečné. Lze proto i vyšetřením systémů bez tlumení udát oblasti hodnot $\alpha, \kappa_1, \kappa_2$, pro které jsou systémy bezpečně stabilní. Tato skutečnost umožňuje obecné matematické vyšetření i složitějších systémů, které by bylo neproveditelné, kdyby bylo tlumení plně uvažováno.

21. Princip polohové vazby pro obecný systém o dvou stupních volnosti bez tlumení

a) Charakteristická rovnice pro případ obou stupňů volnosti na nástroji

Při dosavadním theoretickém vyšetřování principu polohové vazby nebyl uvažován obecný systém o dvou stupních volnosti. Byl předpokládán kmitavý systém daný koncentrovanou hmotou, upevněnou na dvou navzájem kolmých pružinách.

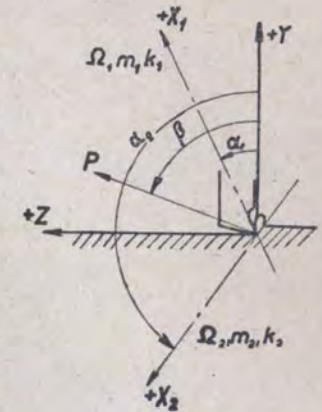
Provedeme nyní řešení systému, kde se kmitání nástroje (nebo obrobku) opět děje v jedné rovině, kolmé k obráběnému povrchu, avšak kmitavý systém je dán dvěma tvary vlastních kmitů, kterým nepřísluší společná koncentrovaná hmota a které se dějí ve dvou směrech ležících v uvedené rovině, obecně navzájem svírajících libovolný úhel. Budeme tak moci vyšetřit také případ, kdy jeden z vlastních tvarů kmitání (jeden ze stupňů volnosti) je vázán na nástroj a druhý na obrobek.

Nejprve si myslíme oba tvary vlastních kmitů, projevující se na nástroji, a obrobek považujeme za dokonale tuhý. Řešení budeme vztahovat ke schématu uvedenému na obr. 89. Nástroj je spojen s kmitavým systémem, který má dva druhy vlastních kmitů; první ve směru X_1 , daném úhlem α_1 od osy $+Y$, druhý ve směru X_2 , daném úhlem α_2 od osy $+Y$. Řezná síla P má směr daný úhlem β od osy $+Y$. Prvnímu tvaru kmitání přísluší kruhová frekvence kmitů Ω_1 , druhému Ω_2 . Tlumení je pro oba tvary vlastních kmitů nulové.

Každému z obou tvarů vlastních kmitů přiřazujeme určitou tuhost k_1, k_2 na nástroji. Tuto tuhost je ovšem nutno definovat vzhledem ke kmitavému pohybu

v daném tvaru kmitání, tedy jako sílu, která vyvolá jednotkovou výchylku v daném směru tak, že průhybová čára systému se shoduje s průhybovou čarou při vlastním kmitání. Ve většině případů, v kterých má kmitavý systém v daném směru pouze jeden tvar kmitání a v kterých není mezi hlavní část hmoty, příslušné tomuto tvaru kmitání, a nástroj vložen málo hmotný a hodně poddajný člen, je možno za tato čísla tuhosti dosadit přímo hodnoty statických tuhosti v daných směrech.

V některých případech se hodnota statické tuhosti od námi stanoveného pojmu tuhosti k liší. Typickým takovým příkladem je jednostranná hoblovka, na níž byly provedeny zkoušky, popisované v kap. II, 10. Při vlastním kmitání řídicího systému stroje, který je dán stojanem a příčnickem, nedochází prakticky téměř vůbec k deformaci nástrojového suportu, zatím co při statickém zatížení nástroje má největší podíl na deformaci měření na nástroji právě deformace nástrojového suportu. Průhybová čára systému je v části příslušející nástrojovému suportu podstatně různá při vlastním kmitání a při statickém zatížení na nástroji. Aby byla zjištěna přesněji hodnota tuhosti k , příslušná vlastnímu kmitání, je nutno deformaci nástrojového suportu při měření odečíst.



Obr. 89.

Oba základní tvary kmitání systému, který vyšetřujeme, jsou určeny hodnotami Ω_1, k_1 a Ω_2, k_2 . Skutečný systém pak můžeme, jestliže nám jde pouze o pohyb v místě nástroje, nahradit schematicky tak, že si myslíme v místě nástroje koncentrovanou hmotu, a to různou pro každý z obou tvarů kmitání; pro první tvar ji označíme m_1 , pro druhý tvar m_2 . Velikost hmot m_1 a m_2 — „redukovaných“ do místa nástroje je dána:

$$m_1 = \frac{\Omega_1}{k_1}, \quad m_2 = \frac{\Omega_2}{k_2}. \quad (133)$$

Řešení provedeme pomocí Lagrangeových rovnic; při čemž za souřadnice q_1, q_2 volíme výchylky v směru X_1 a X_2 .

Pak je

$$y = q_1 \cos \alpha_1 + q_2 \cos \alpha_2$$

a

$$P = P_{\text{st}} - ry = P_{\text{st}} - r(q_1 \cos \alpha_1 + q_2 \cos \alpha_2). \quad (134)$$

Kinetická energie systému je

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2.$$

Složky Lagrangeovy síly

$$Q_1 = -q_1 k_1 + P \cos(\beta - \alpha_1),$$

$$Q_2 = -q_2 k_2 + P \cos(\beta - \alpha_2).$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= -q_1 k_1 - q_1 r \cos \alpha_1 \cdot \cos(\beta - \alpha_1) - q_2 r \cos \alpha_2 \cos(\beta - \alpha_1) + \\ &\quad + P_{\text{stř}} \cos(\beta - \alpha_1), \\ Q_2 &= -q_2 k_2 - q_1 r \cos \alpha_1 \cdot \cos(\beta - \alpha_2) - q_2 r \cos \alpha_2 \cos(\beta - \alpha_2) + \\ &\quad + P_{\text{stř}} \cos(\beta - \alpha_2). \end{aligned} \right\} (135)$$

Lagrangeovy rovnice

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2$$

po dosazení budou

$$m_1 \ddot{q}_1 + q_1 [k_1 + r \cos \alpha_1 \cos(\beta - \alpha_1)] + q_2 r \cos \alpha_2 \cos(\beta - \alpha_1) = P_{\text{stř}} \cos(\beta - \alpha_1),$$

$$m_2 \ddot{q}_2 + q_2 [k_2 + r \cos \alpha_2 \cos(\beta - \alpha_2)] + q_1 r \cos \alpha_1 \cos(\beta - \alpha_2) = P_{\text{stř}} \cos(\beta - \alpha_2).$$

Vzhledem k tomu, že konstantní síla na pravé straně rovnic neovlivní kmitavý pohyb, vypustíme ji:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + q_1 [k_1 + r \cos \alpha_1 \cos(\beta - \alpha_1)] + q_2 r \cos \alpha_2 \cos(\beta - \alpha_1) &= 0, \\ m_2 \ddot{q}_2 + q_2 [k_2 + r \cos \alpha_2 \cos(\beta - \alpha_2)] + q_1 r \cos \alpha_1 \cos(\beta - \alpha_2) &= 0. \end{aligned} \right\} (136)$$

Řešení rovnice (136) předpokládáme ve tvaru

$$q_1 = \xi_1 e^{it}, \quad q_2 = \xi_2 e^{it} \quad (137)$$

a sestavíme charakteristickou rovnici jako anulovaný determinant soustavy (136):

$$\begin{vmatrix} m_1 s^2 + k_1 + r \cos \alpha_1 \cos(\beta - \alpha_1), & r \cos \alpha_2 \cos(\beta - \alpha_1) \\ r \cos \alpha_1 \cos(\beta - \alpha_2), & m_2 s^2 + k_2 + r \cos \alpha_2 \cos(\beta - \alpha_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Po jeho rozvedení obdržíme charakteristickou rovnici

$$m_1 m_2 s^4 + s^2 \{ m_1 [k_2 + r \cos \alpha_2 \cos(\beta - \alpha_2)] + m_2 [k_1 + r \cos \alpha_1 \cos(\beta - \alpha_1)] \} + k_1 k_2 + k_1 r \cos \alpha_2 \cos(\beta - \alpha_2) + k_2 r \cos \alpha_1 \cos(\beta - \alpha_1) = 0. \quad (138)$$

b) Charakteristická rovnice pro jeden stupeň volnosti na nástroji a jeden na obroku

Kmitavý stupeň o jednom stupni volnosti, daném vlastním kmitáním ve směru X_1 s frekvencí Ω_1 , je spojen s nástrojem. V místě nástroje má „dynamickou“ tuhost k_1 a „redukovanou“ hmotu m_1 . Kmitavý systém o jednom stupni volnosti,

daném vlastním kmitáním ve směru X_2 s frekvencí Ω_2 , je spojen s obrobkem. V místě, které je obráběno má „dynamickou“ tuhost k_2 a redukovanou hmotu m_2 (obr. 90).

Orientaci os volíme pro oba systémy stejnou, t. j. kladný směr osy Y a kladný směr, v kterém měříme úhly α_1, α_2 . Řezná síla působí na kmitavý systém nástroje pod úhlem β a značíme ji P_1 , na kmitavý systém obrobku působí v opačném směru, a je tedy vzhledem k zvolenému souřadnému systému dána úhlem β a velikostí $P_2 = -P_1$. Relativní výchylku mezi nástrojem a obrobkem značíme y

$$y = y_1 - y_2.$$

Za Lagrangeovy souřadnice volíme opět výchylky q_1, q_2 ve směrech X_1 a X_2 . Jest nyní

$$y = q_1 \cos \alpha_1 - q_2 \cos \alpha_2$$

a řezná síla

$$P = P_{\text{stř}} - ry = P_{\text{stř}} - r(q_1 \cos \alpha_1 - q_2 \cos \alpha_2). \quad (139)$$

Kinetická energie systému je

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2$$

a složky Lagrangeovy síly

$$Q_1 = -k_1 q_1 + P \cos(\beta - \alpha_1),$$

$$Q_2 = -k_2 q_2 - P \cos(\beta - \alpha_2).$$

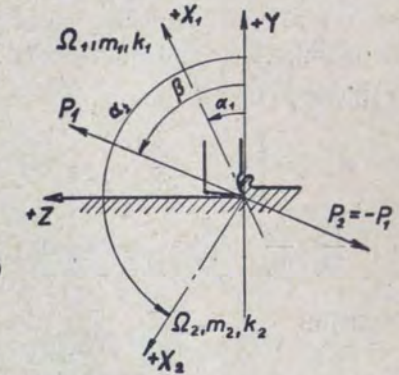
$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= -k_1 q_1 - r q_1 \cos \alpha_1 \cos(\beta - \alpha_1) + r q_2 \cos \alpha_2 \cos(\beta - \alpha_1) + \\ &\quad + P_{\text{stř}} \cos(\beta - \alpha_1), \\ Q_2 &= -k_2 q_2 + r q_1 \cos \alpha_1 \cos(\beta - \alpha_2) - r q_2 \cos \alpha_2 \cos(\beta - \alpha_2) - \\ &\quad - P_{\text{stř}} \cos(\beta - \alpha_2). \end{aligned} \right\} (140)$$

Lagrangeovy rovnice po dosazení:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + q_1 [k_1 + r \cos \alpha_1 \cos(\beta - \alpha_1)] - q_2 r \cos \alpha_2 \cos(\beta - \alpha_1) &= \\ &= P_{\text{stř}} \cos(\beta - \alpha_1), \\ m_2 \ddot{q}_2 + q_2 [k_2 + r \cos \alpha_2 \cos(\beta - \alpha_2)] - q_1 r \cos \alpha_1 \cos(\beta - \alpha_2) &= \\ &= -P_{\text{stř}} \cos(\beta - \alpha_2). \end{aligned} \right\} (141)$$

Vypustíme-li konstantní sílu a předpokládáme řešení v tvaru (137), sestavíme charakteristickou rovnici jako determinant soustavy (141);

$$\begin{vmatrix} m_1 s^2 + k_1 + r \cos \alpha_1 \cos(\beta - \alpha_1), & -r \cos \alpha_2 \cos(\beta - \alpha_1) \\ -r \cos \alpha_1 \cos(\beta - \alpha_2), & m_2 s^2 + k_2 + r \cos \alpha_2 \cos(\beta - \alpha_2) \end{vmatrix} = 0$$



Obr. 90.

Po jeho rozvedení obdržíme charakteristickou rovnici

$$m_1 m_2 s^4 + s^2 \{ m_1 [k_2 + r \cos \alpha_2 \cos (\beta - \alpha_2)] + m_2 [k_1 + r \cos \alpha_1 \cos (\beta - \alpha_1)] \} + k_1 k_2 + k_1 r \cos \alpha_2 \cos (\beta - \alpha_2) + k_2 r \cos \alpha_1 \cos (\beta - \alpha_1) = 0,$$

kteřá se shoduje s charakteristickou rovnicí (138) případu a).

c) Úprava charakteristické rovnice a podmínka stability

Při volbě souřadnic, uvedené v obr. 89 a 90, obdržíme pro oba projednávané případy a) a b) shodnou charakteristickou rovnici (138). Její další zpracování na podmínku stability bude tedy pro oba případy společné.

Rovnici (138) dělíme $m_1 m_2$:

$$s^4 + s^2 \left[\frac{k_2}{m_2} + \frac{r}{m_2} \cos \alpha_2 \cos (\beta - \alpha_2) + \frac{k_1}{m_1} + \frac{r}{m_1} \cos \alpha_1 \cos (\beta - \alpha_1) \right] + \frac{k_1}{m_1} \cdot \frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_1} \frac{r}{m_2} \cos \alpha_2 \cos (\beta - \alpha_2) + \frac{k_2}{m_2} \cdot \frac{r}{m_1} \cos \alpha_1 \cos (\beta - \alpha_1) = 0. \quad (142)$$

Označíme

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 \cos (\beta - \alpha_1) &= b_1, \\ \cos \alpha_2 \cos (\beta - \alpha_2) &= b_2 \end{aligned} \quad (143)$$

a vyjádříme s^2

$$(s^2)_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ - \left(\frac{k_1 + r b_1}{m_1} + \frac{k_2 + r b_2}{m_2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 + r b_1}{m_1} + \frac{k_2 + r b_2}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{k_1 k_2 + k_1 r b_2 + k_2 r b_1}{m_1 m_2}} \right\}.$$

Označíme

$$\left(\frac{k_1 + r b_1}{m_1} + \frac{k_2 + r b_2}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{k_1 k_2 + k_1 r b_2 + k_2 r b_1}{m_1 m_2} = D.$$

Stejně jako v kap. IV, 21a) je nestabilita — samobuzené kmitání — dána podmínkou

$$D < 0.$$

Podmínka meze stability je

$$D = 0,$$

t. j.

$$\left(\frac{k_1 + r b_1}{m_1} + \frac{k_2 + r b_2}{m_2} \right)^2 = 4 \frac{k_1 k_2 + k_1 r b_2 + k_2 r b_1}{m_1 m_2}.$$

Upravením obdržíme

$$\left(\frac{k_2}{m_2} - \frac{k_1}{m_1} + \frac{r}{m_2} b_2 - \frac{r}{m_1} b_1 \right)^2 = -4 \frac{r}{m_1} \frac{r}{m_2} b_1 b_2$$

a odmocněním

$$\frac{k_2}{m_2} - \frac{k_1}{m_1} = - \left(\frac{r b_2}{m_2} - \frac{r b_1}{m_1} \right) \pm 2j r \sqrt{\frac{b_1 b_2}{m_1 m_2}}. \quad (144)$$

Zavedeme-li označení

$$\frac{k_1}{r} = \kappa_1, \quad \frac{k_2}{r} = \kappa_2, \quad \frac{m_2}{m_1} = \mu, \quad (145)$$

přepíšeme (144) na

$$\kappa_2 - \mu \kappa_1 = (b_1 \mu - b_2) \pm 2j \sqrt{\mu b_1 b_2}. \quad (146)$$

Jestliže nepoužijeme označení κ_1, κ_2 a zavedeme

$$\frac{k_1}{m_1} = \Omega_1^2, \quad \frac{k_2}{m_2} = \Omega_2^2, \quad (147)$$

přepíšeme (144) na

$$\Omega_2^2 - \Omega_1^2 = \frac{r}{m_2} (b_1 \mu - b_2 \pm 2j \sqrt{\mu b_1 b_2}). \quad (148)$$

d) Rozbor podmínky stability

Výrazy (144), (146), (148) vyjadřují v různé formě mezní podmínku stability. Stabilita závisí na hodnotách frekvencí obou základních tvarů kmitání Ω_1, Ω_2 , na jejich hmotách m_1, m_2 , na směrech obou tvarů kmitání α_1, α_2 a na rezných podmínkách, vyjádřených hodnotou r .

Z rovnic (144), (146), (148) vyplývá, že stav stability nebo nestability se nemění:

1. jestliže tuhost obou tvarů kmitání k_1, k_2 zvětšíme tolikrát, kolikrát se zvětší hodnota hloubkového koeficientu r , t. j. kolikrát se zvýší rezné podmínky,
2. jestliže při změně tuhosti jednoho tvaru kmitání změním tuhost druhého tvaru kmitání tak, že rozdíl frekvencí obou tvarů kmitání se nezmění,
3. jestliže hmoty obou tvarů kmitání se navzájem úměrně zvětší nebo zmenší.
4. Reálné meze stability existují pouze pro $b_1 b_2 < 0$.

Pro

$$b_1 b_2 > 0 \quad (149)$$

je systém stabilní pro všechny hodnoty $\Omega_1, \Omega_2, m_1, m_2$, resp. k_1, k_2 . Mezní stabilní směry obou tvarů kmitání pro libovolné hodnoty jmenovaných veličin jsou dány podmínkou

$$b_1 b_2 = 0,$$

t. j.

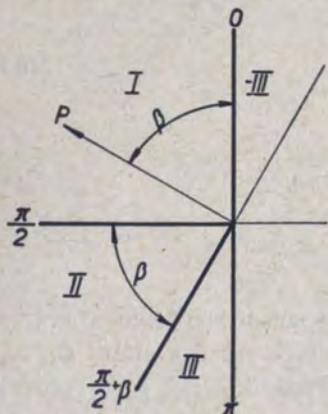
$$\cos \alpha_1 \cos (\beta - \alpha_1) \cdot \cos \alpha_2 \cos (\beta - \alpha_2) = 0.$$

Tato podmínka se rozpadá na

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= 0, & \alpha_1 &= \frac{1}{2}\pi, \\ \cos \alpha_2 &= 0, & \alpha_2 &= \frac{1}{2}\pi, \\ \cos(\beta - \alpha_1) &= 0, & \alpha_1 &= \frac{1}{2}\pi + \beta, \\ \cos(\beta - \alpha_2) &= 0, & \alpha_2 &= \frac{1}{2}\pi + \beta. \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

Úloha byla určena tak, že stačí, vyšetřujeme-li hodnoty úhlů α_1, α_2 v rozmezí $0 < \alpha_{1,2} < \pi$.

Mezními hodnotami (150) se daný rozsah rozpadá na tři oblasti, I, II, III (obr. 91). Součin b_1, b_2 mění svoje znamení jedině tehdy, jestliže některý z úhlů α_1, α_2 přechází z jedné oblasti do druhé. Znamení hodnot b_1, b_2 v jednotlivých oblastech je



Obr. 91.

$$\begin{array}{l} \alpha_i, \quad b_i, \quad i = 1, 2. \\ \text{I} \quad 0 < \alpha_i < \frac{1}{2}\pi, \quad b_i > 0, \\ \text{II} \quad \frac{1}{2}\pi < \alpha_i < \frac{1}{2}\pi + \beta, \quad b_i < 0, \\ \text{III} \quad \frac{1}{2}\pi + \beta < \alpha_i < \pi, \quad b_i > 0. \end{array} \quad (151)$$

Z (151) je zřejmé, že součin $b_1 b_2 < 0$, a tedy nestabilita, může nastat pouze tehdy, jestliže směr jednoho ze základních tvarů kmitání spadá do oblasti II a druhého do oblasti I nebo III.

Ukazuje se výhodné pro formální zjednodušení připojit oblast III přímo k oblasti I jak (— III) a uvažovat možný rozsah úhlů $\alpha_{1,2}$

$$-(\frac{1}{2}\pi - \beta) < \alpha_{1,2} < \frac{1}{2}\pi + \beta. \quad (152)$$

Zásadně pak označíme indexem 1 tvar kmitání, jemuž přísluší menší hodnota úhlu α , a indexem 2 tvar kmitání, jemuž přísluší větší hodnota úhlu α :

$$\alpha_2 > \alpha_1. \quad (153)$$

Nestabilita může nastat tedy pouze tehdy, je-li

$$-(\frac{1}{2}\pi - \beta) < \alpha_1 < \frac{1}{2}\pi; \quad \frac{1}{2}\pi < \alpha_2 < \frac{1}{2}\pi + \beta, \quad (154)$$

t. j. prochází-li směr prvního tvaru kmitání oblastí (— III) nebo I a současně směr druhého tvaru kmitání oblastí II.

Jestliže tomu tak není, t. j. procházejí-li směry obou tvarů kmitání současně oblastí (— III) nebo I anebo prochází-li jeden směr oblastí (— III), jeden oblastí I anebo procházejí-li směry obou tvarů kmitání současně oblastí II, je případ stabilní, bez ohledu na velikost hodnot $k_1, k_2, m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2, r$.

5. Je-li podmínka (154) splněna, může být případ stabilní nebo nestabilní, podle velikosti hodnot jednotlivých jmenovaných proměnných. Je v první řadě

$$b_1 > 0, \quad b_2 < 0. \quad (155)$$

Lze dále dokázat, že výraz na pravé straně rovnice (144) je vždy kladný:

$$\frac{rb_1}{m_1} - \frac{rb_2}{m_2} \pm 2jr \sqrt{\frac{b_1 b_2}{m_1 m_2}} > 0, \quad (156)$$

neboť

$$\left(\frac{rb_1}{m_1} - \frac{rb_2}{m_2}\right)^2 - \left(2jr \sqrt{\frac{b_1 b_2}{m_1 m_2}}\right)^2 = \frac{m_1^2 r^2 b_2^2 + m_2^2 r^2 b_1^2 - 6m_1 m_2 r^2 b_1 b_2}{m_1^2 m_2^2},$$

a jelikož $b_1 b_2 < 0$, je

$$\left(\frac{rb_1}{m_1} - \frac{rb_2}{m_2}\right)^2 > \left(2jr \sqrt{\frac{b_1 b_2}{m_1 m_2}}\right)^2$$

a odtud též

$$\frac{rb_1}{m_1} - \frac{rb_2}{m_2} > \left| 2jr \sqrt{\frac{b_1 b_2}{m_1 m_2}} \right|; \text{ tím je (156) dokázáno.}$$

Odtud plyne, že rovnice (144) může být splněna a reálné meze stability — a tím v našem případě nestabilita — existují pouze, je-li

$$\frac{k_2}{m_2} > \frac{k_1}{m_1} \quad (157)$$

a označíme-li „naladění“ d :

$$d = \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}; \quad (158)$$

můžeme (157) psát též

$$d > 1. \quad (159)$$

Nestabilita může nastat pouze tehdy, je-li frekvence vlastních kmitů Ω_2^2 druhého tvaru kmitání, jehož směr prochází oblastí II, vyšší než frekvence vlastních kmitů prvního tvaru kmitání Ω_1^2 , jehož směr prochází oblastí (— III) nebo 1, t. j. je-li „naladění“ systému $d > 1$. Není-li podmínka (157) nebo (159) splněna, jsou všechny případy stabilní, bez ohledu na velikost $k_1, k_2, m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2, r$.

6. Jsou-li splněny současně podmínky (154) a (157), existují vždy dvě meze stability, dané dvěma znaménky u člena pravé strany rovnice (144) nebo (148). Uvnitř těchto mezi jsou obsaženy nestabilní případy, vně případy stabilní. Stabilita daná podmínkou

$$\frac{k_2}{m_2} - \frac{k_1}{m_1} < r \left(\frac{b_1}{m_1} - \frac{b_2}{m_2} - 2j \sqrt{\frac{b_1 b_2}{m_1 m_2}} \right),$$

kterou nazýváme „horní“ podmínkou stability, protože je splněna pouze pro velmi vysoké hodnoty hloubkového koeficientu r (nebo též pro velmi nízké hodnoty tuhostí k_1, k_2), nemá praktického významu, poněvadž ve všech skutečných případech obrábění nastává pak nestabilita vlivem rezonančního rozkmitávání od vlnitosti povrchu vytvořené při předchozí tříse a případ nevyho-

vuje s hlediska přesnosti výroby — vznikají nepřijatelné deformace — event. ani s hlediska pevnosti stroje.

Prakticky je možno využít hlavně stability dané „dolní“ podmínkou

$$\frac{k_2}{m_1} - \frac{k_1}{m_2} > r \left(\frac{b_1}{m_1} - \frac{b_2}{m_2} + 2j \sqrt{\frac{b_1 b_2}{m_1 m_2}} \right).$$

Z této podmínky plyne, že „dolní“ mez stability se posouvá směrem k větší hodnotě hloubkového koeficientu r , t. j. umožňuje stabilní obrábění vyššími řeznými podmínkami při zvětšení tuhosti k_2 nebo při zmenšení hmoty m_2 druhého tvaru kmitání, kterému přísluší vyšší frekvence vlastních kmitů Ω_2 , nebo při zmenšení tuhosti k_1 nebo při zvětšení hmoty m_1 prvního tvaru kmitání, kterému přísluší nižší frekvence vlastních kmitů Ω_1 .

Vliv hodnoty úhlů α_1, α_2 , určujících směry obou základních tvarů kmitání, se projevuje se takto:

stabilita přechází v nestabilitu při nejnižších řezných podmínkách (r) nebo při nejvyšších hodnotách tuhosti obou tvarů kmitání — případ je nejnepříznivější, jestliže součin $b_1 b_2$ je maximální co do absolutní hodnoty (je záporný), a to je pro

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\beta, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\beta.$$

e) Zvláštní případy

Systém stanovený schematem dle obr. 89 nebo 90 je obecným případem systému o dvou stupních volnosti bez tlumení. Systém s dvěma pružinami navzájem kolmými, vyšetřovaný v kap. IV, 21, je zvláštním případem tohoto obecného systému, daným podmínkami

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1}{2}\pi, \quad m_1 = m_2,$$

a jeho vlastnosti byly podrobně popsány.

Pro názornost vývodů kap. IV, 22d) vyšetříme stabilitu dalších dvou zvláštních, avšak méně specialisovaných případů. Vzhledem k jejich menší specialisaci nebudeme je však vyšetřovat tak podrobně jako případ v kap. IV, 21.

1. Systém s dvěma tvary kmitání, danými hodnotami $\Omega_1, \Omega_2, k_1, k_2, m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2$ — oba tvary kmitání jsou navzájem kolmé

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1}{2}\pi. \quad (160)$$

Vzhledem k velkému počtu proměnných zaměříme se pouze na dílčí otázku, která se týká právě rozšíření tohoto případu proti případu v kap. IV, 21, t. j. na otázku vlivu poměru hmot obou tvarů kmitání na stabilitu případu. Zvolíme zcela určitou poměrnou tuhost κ_1

$$\kappa_1 = 1$$

a znázorníme v polárním diagramu se souřadnicemi α_1, κ_2 čáry mezní stability pro různé hodnoty poměru hmot obou tvarů kmitání

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}.$$

Mezní čáry jsou dány rovnicí (146)

$$\kappa_2 = \mu \kappa_1 + \mu b_1 - b_2 \pm 2j \sqrt{\mu b_1 b_2}$$

a pro zvolené hodnoty $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1}{2}\pi, \kappa_1 = 1$:

$$\kappa_2 = \mu + \mu \cos \alpha_1 \cos(\beta - \alpha_1) \sin \alpha_1 \sin(\beta - \alpha_1) \pm \sqrt{\mu \sin 2\alpha_1 \sin 2(\beta - \alpha_1)}. \quad (161)$$

Mezní čáry $\kappa_2 - \alpha_1$ jsou uvedeny na obr. 92. Mezní hodnoty poměrné tuhosti κ_2 pro jednotlivé hodnoty μ jsou vyneseny na poloměr ve směru X_2 , v kterém je dán právě druhý tvar kmitání o poměrné tuhosti κ_2 . Jelikož úhel α_1 značíme od směru $+Y$ k směru $+X_1$ a $X_2 \perp X_1$, určujeme polohu směru $-X_2$ opět úhlem α_1 od osy $-Z$.

Z diagramu je patrné, že u systému se směrovou orientací $0 < \alpha_1 < \beta$ je při zvětšení poměru μ , t. j. při zvětšení hmoty m_2 tvaru kmitání ve směru X nebo při zmenšení hmoty m_1 tvaru kmitání ve směru X_1 , nutno při nezměněné po měrné tuhosti κ_1 tvaru kmitání ve směru X_1 zvětšit poměrnou tuhost κ_2 tvaru kmitání ve směru X_2 tolikrát, kolikrát byl zvětšen poměr hmot μ , aby byl zachován stav stability.

Zvětšení poměru hmot μ se tedy projevuje jako nevýhodné.

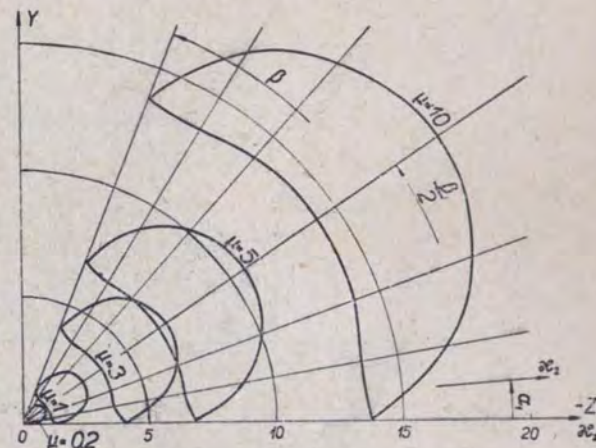
Vliv směrové orientace na stabilitu systému se projevuje tak, že pro natočení

$$\beta < \alpha_1 < \pi$$

jsou všechny případy stabilní při jakýchkoli hodnotách k_1, k_2, m_1, m_2, r . Nestabilita může nastat pouze v rozsahu natočení $0 < \alpha_1 < \beta$ a nejvýhodnější směrová orientace systému je pro všechny hodnoty poměru μ

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\beta.$$

Obr. 92 lze s výhodou číst při představě konstantních r , t. j. konstantních řezných podmínek. Pak dává dobrou představu o nutných změnách poměrné tuhosti κ_2 . Jsou-li tuhosti obou tvarů kmitání dány na př. $k_1 = 1, k_2 = 3$, a hledáme-li, při

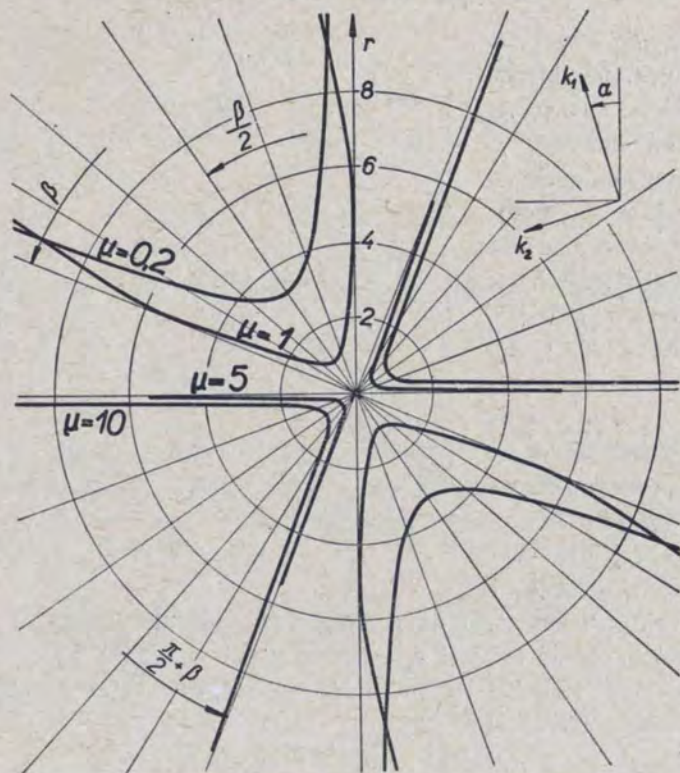


Obr. 92.

kteří hodnotě hloubkového koeficientu r začínají vznikat samobuzené kmity, je vhodnější překreslit diagram do polárních souřadnic α, r (obr. 93). V něm je tedy znázorněn vztah

$$r_{mez} = \frac{3 - \mu}{\mu \cos \alpha \cos (\beta - \alpha) + \sin \alpha \sin (\beta - \alpha) \pm \sqrt{\mu \sin 2\alpha \sin 2(\beta - \alpha)}} \quad (162)$$

pro různé hodnoty μ a otočení systému o plných 360° .



Obr. 93.

Při tom používáme poněkud jiného způsobu značení. Protože systém máme pevně dán a mění se pouze jeho směrová orientace, je výhodné značit úhel otočení α , od osy $+Y$ k určité přímce se systémem pevně spojené, ať už pak tato přímka prochází kterýmkoli kvadrantem. Pro náš případ značíme úhel α , ke směru menší tuhosti $k = 1$. Jako hodnotu μ označíme poměr hmoty, příslušné tvaru kmitání s tuhostí $k = 3$ k hmotě, příslušné tvaru kmitání s tuhostí $k = 1$. Značíme

$$\text{bez ohledu na směr } k_1 = 1, k_2 = 3, \mu = \frac{m_2}{m_1}, \Omega_1^2 = \frac{1}{m_1}, \Omega_2^2 = \frac{3}{m_2}.$$

Nestabilita může nastat pouze tehdy, jestliže směr tvaru kmitání, kterému přísluší vyšší frekvence Ω , prochází druhým kvadrantem.

Pro případ $\mu = 3$ je $\Omega_1^2 = \frac{1}{m_1}$ a $\Omega_2^2 = \frac{3}{3m_1}$, čili $\Omega_1^2 = \Omega_2^2$. Nestabilita pak nevznikne při žádném natočení systému.

Pro $\mu > 3$ je $\Omega_1^2 > \Omega_2^2$, tvar kmitání s tuhostí $k_1 = 1$ má vyšší frekvenci vlastních kmitů. Nestabilita může nastat pouze pro taková natočení systému, kdy směr prvního tvaru kmitání s tuhostí $k_1 = 1$ leží v rozsahu $\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi + \beta$ a natočení o π větší (směr tvaru kmitání 1 pak prochází opět daným rozsahem úhlů).

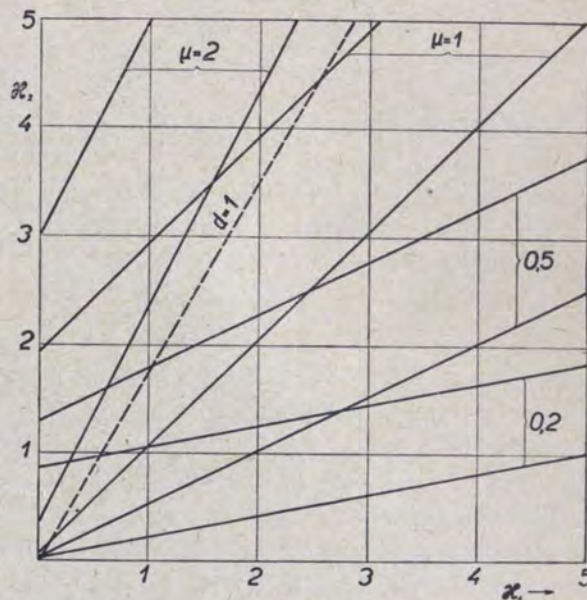
Pro $\mu < 3$ je $\Omega_2^2 > \Omega_1^2$. Tvar kmitání s tuhostí $k_2 = 3$ má vyšší frekvenci vlastních kmitů. Nestabilita může nastat pouze pro taková natočení systému, kdy směr druhého tvaru kmitání prochází druhým kvadrantem a kdy tedy směr prvního tvaru kmitání s tuhostí k_1 , ke kterému měříme úhel otočení α , leží v rozsahu $0 < \alpha < \beta$.

Z diagramu obr. 93 vidíme dále, že hodnota mezního hloubkového koeficientu r_{mez}

je tím vyšší, čím větší je rozdíl mezi frekvencemi vlastních kmitů obou tvarů kmitání, t. j. tím vyšší, čím pro případy $\mu > 3$ je větší hmota tvaru kmitání s tuhostí k_2 nebo menší hmota tvaru kmitání s tuhostí k_1 a pak pro případy $\mu < 3$ čím větší je hmota tvaru kmitání s tuhostí k_1 nebo menší hmota tvaru kmitání s tuhostí k_2 .

Vrátíme se opět k původnímu způsobu značení.

Z vyšetření znázorněného v diagramech obr. 92 a 93 vyplývá, že nejnevýhodnější směrová orientace je dána úhlem $\alpha_1 = \frac{1}{2}\beta$, bez ohledu na velikost poměru hmot obou tvarů kmitání μ . Znázorníme vliv poměrných tuhostí κ_1 a κ_2 na stabilitu případu pro různé hodnoty poměru μ pro tuto nejnevýhodnější směrovou orientaci $\alpha_1 = \frac{1}{2}\beta$. Obdržíme tak diagram obr. 94, analogický s diagramem obr. 85, který platí pro systém s navzájem kolmými tvary kmitání a společnou hmotou $m_1 = m_2$ pro oba tvary kmitání. Diagram kreslený v souřadnicích κ_1, κ_2 s parametrem μ vyjadřuje rovnici (146) pro případ $\alpha_1 = \frac{1}{2}\beta, \alpha_2 = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\pi$



Obr. 94.

$$b_1 = \cos \frac{1}{2}\beta \cos (\beta - \frac{1}{2}\beta) = \cos^2 \frac{1}{2}\beta, \quad b_2 = -\sin \frac{1}{2}\beta \sin (\beta - \frac{1}{2}\beta) = -\sin^2 \frac{1}{2}\beta,$$

$$\kappa_2 = \mu\kappa_1 + \mu \cos^2 \frac{1}{2}\beta + \sin^2 \frac{1}{2}\beta + \sin \beta \sqrt{\mu}. \quad (163)$$

Mezní čáry jsou přímky se směrnici μ . Mezi oběma přímkami leží nestabilní pole.

Z diagramu je patrná základní podmínka, vyjádřená vztahem (157), že nestabilita neexistuje pro případy, pro které

$$\kappa_2 < \mu\kappa_1,$$

čili

$$\frac{\kappa_2}{m_2} < \frac{\kappa_1}{m_1}, \quad d < 1,$$

t. j. jsou stabilní pro všechny případy, v nichž frekvence vlastních kmitů tvaru kmitání, který je druhý (počítáno v zvoleném kladném smyslu α od osy $+Y$), je nižší než frekvence vlastních kmitů prvního tvaru kmitání (s menším úhlem α).

V našem diagramu horní z obou přímek značí „dolní“ mez stability. Jestliže totiž v diagramu postupujeme po přímce

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \text{konst}$$

směrem k počátku — a to odpovídá obrábění na neměnném systému se zvyšujícími se řeznými podmínkami — pak na této „dolní“ mezi počínají vznikat samobuzené kmity. Na „horní“ mezi zanikají při podstatně vyšších řezných podmínkách. Jak bylo již dříve řečeno, má praktický podstatný význam pouze „dolní“ mez stability.

Nestabilní systém můžeme změnit buď tím, že změníme naladění na $d < 1$ zmenšením tuhosti κ_2 pod hodnotu $\mu\kappa_1$, nebo při zachování naladění $d > 1$ zvětšením poměrné tuhosti κ_1 , nebo zmenšením poměru hmot μ (zmenšením hmoty m_2 nebo zvětšením hmoty m_1).

2. Dalším zvláštním případem systému o dvou stupních volnosti je systém se společnou hmotou $m_1 = m_2$ pro oba tvary kmitání. Proti zvláštnímu případu, vyšetřovanému v kap. IV, 21, je obecnější tím, že obě pružiny systému nejsou navzájem kolmé.

Rovnice meze stability (144) přejde na tvar

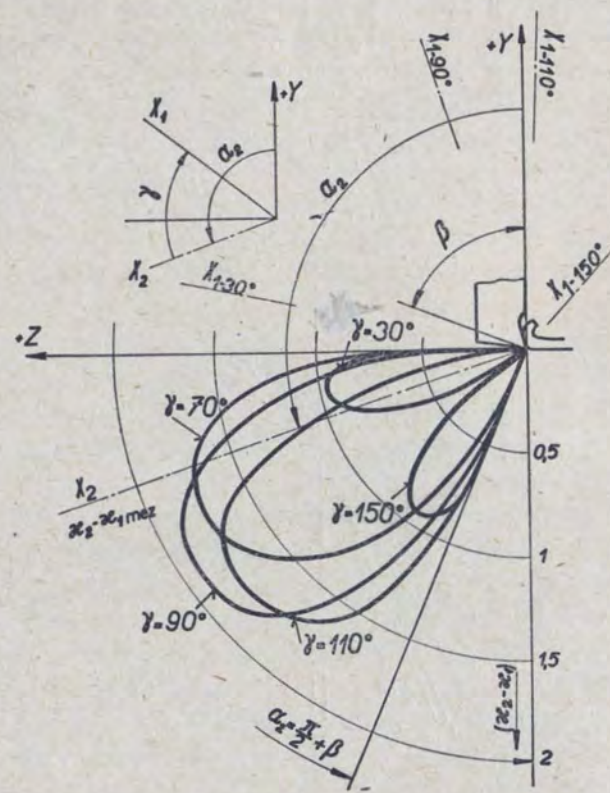
$$\kappa_2 - \kappa_1 = \cos \alpha_1 \cos (\beta - \alpha_1) - \cos \alpha_2 \cos (\beta - \alpha_2) \pm \pm 2\sqrt{\cos \alpha_1 \cos (\beta - \alpha_1) \cos \alpha_2 \cos (\beta - \alpha_2)}. \quad (164)$$

Vidíme, že stabilita tohoto systému závisí na rozdílu tuhosti obou pružin ($k_2 - k_1$), na velikosti hloubkového koeficientu r , zahrnutého v hodnotách κ_1 , κ_2 , a na směru obou pružin α_1 , α_2 .

Případy $\kappa_2 < \kappa_1$ jsou vždy stabilní. Jsou to případy, kdy pružina ležící ve směru, který je první při postupu ve zvoleném kladném smyslu α od osy $+Y$ (kolmé k obráběnému povrchu), má větší tuhost než druhá pružina.

Dále jsou vždy stabilní případy, pro které je nesplněna podmínka (154). Tuto podmínku blíže vyšetříme pro případ, kdy obě pružiny svírají navzájem konstantní úhel $\gamma = \alpha_2 - \alpha_1 = \text{konst}$ a mění současně úhlovou polohu vzhledem k ose $+Y$.

Nejprve budeme postupovat podle označení, která jsme stanovili, t. j. úhly α od osy $+Y$ měříme ke směrum obou pružin pouze v rozsahu $[-(\frac{1}{2}\pi - \beta), \frac{1}{2}\pi + \beta]$



Obr. 95.

ve zvoleném kladném smyslu. Pak rozsah současného natočení obou pružin $\alpha_1 + \gamma$, ve kterém může nastat nestabilita, je veliký:

$$\left. \begin{array}{l} \pi - \gamma \text{ pro } \pi - \beta < \gamma < \pi, \\ \beta \text{ pro } \beta < \gamma < \pi - \beta, \\ \gamma \text{ pro } 0 < \gamma < \beta. \end{array} \right\} \quad (165)$$

V tomto rozsahu je pak nestabilita omezena dále velikostí rozdílu poměrných tuhostí obou pružin ($\kappa_2 - \kappa_1$) podle podmínky (164). Pro lepší objasnění jsou pro případ několika hodnot vzájemného úhlu obou pružin γ vyznačeny čáry mezní

stability v diagramu obr. 95. V něm je za úhlovou souřadnici použito úhlu α_2 druhé pružiny.

Na paprscích diagramu, tedy ve směru druhé pružiny, je vynesena hodnota $(\alpha_2 - \alpha_1)_{mez}$, odpovídající danému směru druhé pružiny.

Mezní čáry stability jsou vyznačeny pro případy:

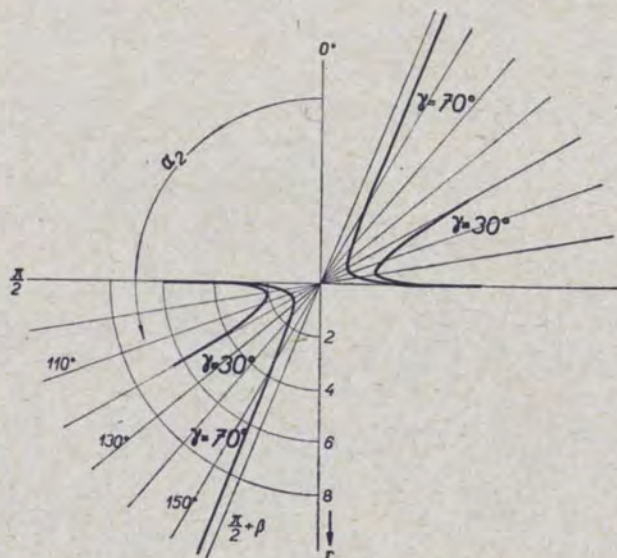
$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1 = 150^\circ = \pi - 30^\circ,$$

$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1 = 110^\circ \doteq \pi - \beta,$$

$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{1}{2}\pi,$$

$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1 = 70^\circ \doteq \beta,$$

$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1 = 30^\circ.$$



Obr. 96.

V prvním a posledním uvedeném případě se pole nestability rozkládá v rozsahu 30° natočení systému, v ostatních případech v rozsahu β . Pole nestability je uzavřeno uvnitř mezních křivek. V případech $\gamma = 150^\circ$ a $\gamma = 30^\circ$ stačí poměrně malé hodnoty rozdílu $\alpha_2 - \alpha_1$, aby se případ stal stabilním. Největších hodnot $(\alpha_2 - \alpha_1)$ je třeba pro dosažení stability u případu $\gamma = \frac{1}{2}\pi$.

Výsledky vyznačené v obr. 95 jsou znovu reprodukovány ve formě vhodné pro posouzení vlivu řezných podmínek na stabilitu případu na obr. 96.

V něm je pro zvolenou hodnotu $k_2 - k_1 = 2 \text{ kg}/\mu$ vyznačena ve směru druhé pružiny hodnota mezního hloubkového koeficientu r_{mez} , při které začíná vznikat samobuzené kmitání, a to vzhledem k natočení systému v rozsahu $0 - 360^\circ$. Mezní křivky jsou vyznačeny pro případy $\gamma = 30^\circ, 70^\circ \doteq \beta$. Vidíme opět, že

nejméně odolný proti vzniku samobuzených kmitů je systém s hodnotou $\gamma = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{1}{2}\pi$.

f) Stručný souhrn výsledků matematického vyšetření systému o dvou stupních volnosti bez tlumení

Obecný řídicí kmitavý systém o dvou stupních volnosti je dán dvěma tvary vlastních kmitů, které se projevují relativním kmitáním mezi nástrojem a obrobkem. Buď jsou oba stupně volnosti dány na nástroji a obrobek je dokonale tuhý, nebo jsou oba stupně volnosti dány na obrobku a nástroj je dokonale tuhý, nebo konečně nástroj má jeden stupeň volnosti a obrobek také jeden. Ukazuje se, že charakteristická rovnice a podmínky stability jsou totožné pro všechny tři uvedené případy, jestliže oba stupně volnosti umístíme ve všech případech do totožného souřadného systému: osa Y kolmá k obráběnému povrchu kladná ve směru ven z obrobku; osa Z ležící ve směru řezného pohybu, kladná ve směru síly P_z , působící na nástroj; indexem 1 značíme tvar kmitání, který svírá s osou + Y menší úhel α , indexem 2 tvar kmitání, který svírá s osou + Y větší úhel.

Tvary kmitání jsou dány frekvencí vlastních kmitů Ω , zvlášť definovanou „dynamickou“ tuhostí k v místě obrábění, hmotou m „redukovanou“ do místa obrábění, směrovou orientací α . Řezné podmínky jsou zastoupeny hodnotou hloubkového koeficientu r .

Ukazuje se, že existují souhrny hodnot jmenovaných veličin, při kterých je obrábění stabilní, a souhrny, při kterých vzniká samobuzené kmitání. Zásadní vliv na stabilitu případu má směrová orientace systému vzhledem k ose + Y a ke směru řezné síly, danému úhlem β . Nestabilita může vzniknout pouze pro takovou směrovou orientaci systému, při které směr kmitání stupně volnosti s vyšší frekvencí vlastních kmitů Ω (naladění $d > 1$) leží v rozsahu vymezeném úhly $\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi + \beta$ v případech, kdy vzájemný úhel γ směru obou stupňů volnosti je $\beta < \gamma < \pi - \beta$. Úhel γ měříme při tom v záporném smyslu od směru stupně volnosti s vyšší frekvencí vlastních kmitů ke směru stupně volnosti s nižší frekvencí vlastních kmitů. Pro případy většího nebo menšího úhlu γ může nastat nestabilita jen v části uvedeného rozsahu směrové orientace.

Pokud je systém nestabilně směrově orientován, závisí jeho stabilita dále na velikosti rozdílu čtverců frekvencí vlastních kmitů obou tvarů kmitání, na poměru jejich hmot a na hodnotě hloubkového koeficientu r podle rovnic (144), (146), (148).

Vliv poměru hmot obou tvarů kmitání na stabilitu případu byl názorně vysvětlen na příkladu specializovaného systému se vzájemným úhlem obou tvarů kmitání $\gamma = \frac{1}{2}\pi$.

Vliv velikosti vzájemného úhlu obou tvarů kmitání na úhlový rozsah nestabilní směrové orientace byl názorně vysvětlen na příkladu specializovaného systému s poměrem hmot obou tvarů kmitání $\mu = 1$. Výsledek vyšetření co do rozsahu nestabilní směrové orientace platí i pro libovolnou jinou hodnotu μ .

22. Experimentální ověření principu polohové vazby

a) Uspořádání experimentu

Princip polohové vazby byl vypracován za některých zjednodušujících předpokladů. Směr řezné síly byl pokládán za konstantní v průběhu kmitání. Závislost řezné síly na tloušťce byla linearisována. Závislost řezné síly na tloušťce třísky byla předpokládána jednoznačná i při rychlých změnách tloušťky třísky, které se dějí při samobuzeném kmitání.

Do počtu nebyla zahrnuta ani závislost řezné síly na řezné rychlosti, předpokládaná Kaširinem, ani závislost řezné síly na rychlosti kmitání, zjištěná Sokolovským. Předpokládalo se, že tyto závislosti jsou kvantitativně velmi slabým zdrojem samobudící energie proti zdroji danému polohovou vazbou.

Aby bylo možno zjistit, pokud případná úchylna těchto předpokladů od skutečnosti ovlivní theoreticky získané výsledky, bylo nutno uspořádat experiment. Aby bylo možno kontrolovat princip polohové vazby samotný, bylo nutno uspořádat experiment tak, aby nemohlo dojít k narůstání kmitů vlivem rezonančního rozkmitávání povrchem zvlněným při předchozí třešce (tedy na př. soustružením povrchu plochého závitu).

K experimentálnímu ověření theoretických výsledků bylo zvoleno použití modelu. Prověření bylo prováděno nejprve na modelu, a nikoli na skutečném stroji, z těchto důvodů:

Theorie byla vypracována podrobně pro řídicí kmitavý systém o dvou stupních volnosti. Kmitavý systém stroje nelze s dostatečnou přesností, nutnou pro kvalitativní i kvantitativní prověření teorie, pokládat za kmitavý systém o pouze dvou stupních volnosti. Aby bylo možno ověřit jednotlivé theoretické výsledky, odpovídající řídicím kmitavým systémům různých vlastností, je nutno uspořádat experiment s řídicím kmitavým systémem, na kterém je možno hlavní vlastnosti měnit a nastavit různé jejich hodnoty. Jde zejména o tuhost, vlastní kmitočet, směrovou orientaci, tlumení. Tento požadavek není na skutečném stroji prakticky realizovatelný. Měření kmitů, útlumu a dalších veličin, nutných pro zhodnocení výsledku, lze snáze provést na zvláště k tomuto účelu vyrobeném modelu.

Bylo dále rozhodnuto vytvořit model, který by odpovídal nejjednoduššímu případu řídicího kmitavého systému o dvou stupních volnosti, jehož teorie byla nejpodrobněji vypracována, t. j. kmitavému systému o dvou navzájem kolmých pružinách (viz kap. IV, 19). Bude-li výsledek experimentu provedeného s tímto modelem souhlasit s teorií nebo se od ní v některých bodech odchylovat, bude stejně platit i pro obecný řídicí systém, jehož teorie byla vypracována za stejných předpokladů jako teorie nejjednoduššího systému, uvedená v kap. IV, 19.

Konstrukce modelu je dána požadavkem, aby odpovídala schématu obr. 73. Experimentální výsledky, které získáme při práci s modelem, lze přenést na

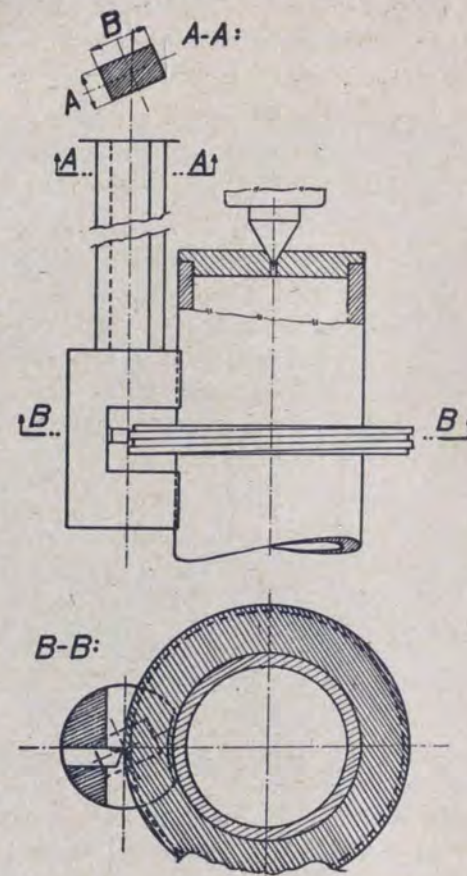
skutečný stroj, jestliže model bude skutečnému stroji fyzikálně podobný, t. j. budou-li hodnoty bezrozměrných parametrů v teorii použitých $\kappa_1, \kappa_2, \frac{k_1}{m}, \frac{k_2}{m}, \gamma_1, \gamma_2$ řádově stejné jako v praktických případech obrábění.

Při obrábění na modelu musí být realizována řezná rychlost, řezný výkon, posuv atp. Aby nebyl model sám o sobě příliš komplikovaný, bylo rozhodnuto připojit ho ke skutečnému stroji a použít pro realizaci uvede-ných požadavků zařízení stroje.

Model sám lze vytvořit velmi přibližně jako systém o dvou stupních volnosti. Jeho připojením na stroj dostáváme však opět komplikovaný kmitavý systém. Aby i tak bylo možno s dostatečnou přibližností považovat řídicí kmitavý systém za systém o dvou stupních volnosti, je nutno, aby tuhost pružin modelu byla řádově menší než tuhost pružin kmitavých systémů stroje a aby frekvence vlastních kmitů modelu nebyly blízko frekvencím vlastních kmitů stroje. Aby byl splněn požadavek rozdílu tuhosti, byl model upevněn na příčné saně soustruhu S 50, který má poměrně vysokou tuhost; model jako kmitavý systém byl spojen s nástrojem a obrobek který pak v teorii pokládáme za dokonale tuhý, byl sám o sobě zvolen s velkým průměrem a byl upnut na obou koncích; při tom se použilo skličidla a pevného hrotu. Aby byl splněn požadavek rozdílu frekvencí, byl obrobek vytvořen jako trubka, tedy málo hmotný.

Při tomto uspořádání bylo možno pro řádově dané hodnoty κ pracovat s třískou šířky $t = 0,5$ až 5 mm a tloušťky $0,15$ mm i větší. Tím bylo odstraněno nebezpečí, které by vzniklo, kdybychom pracovali s příliš malým průřezem třísky, že by totiž závislost řezné síly na řezné rychlosti byla abnormálního charakteru.

Náčrtek použitého modelu je na obr. 97. Nůž s úhlem nastavení $\alpha_1 = 0^\circ$ je upnut v těžišti závaží, upevněného na kužel na konci tyče obdélníkového průřezu. Druhý konec tyče je upnut do objímky kostky, přišroubované k příčným



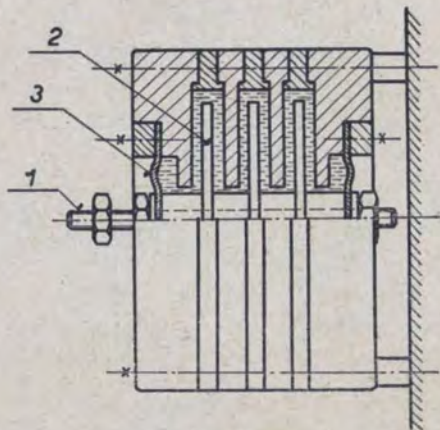
Obr. 97.

sáním soustruhu. Závaží s tyčí obdélníkového průřezu tvoří řídicí kmitavý systém o dvou stupních volnosti, jejichž směry jsou dány symetralami průřezu tyče.

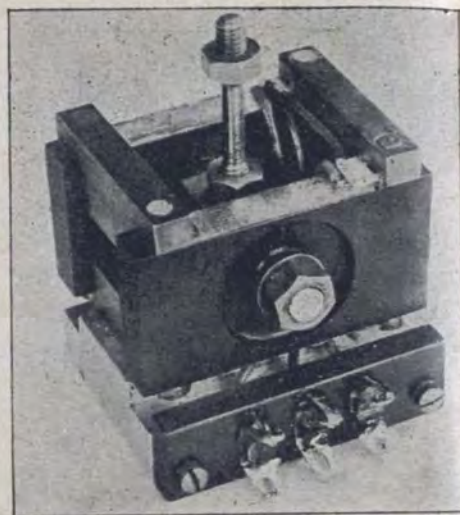
Tyč se dá v objímce, do které je upnuta, otočit. Tím můžeme měnit směrovou orientaci řídicího systému. Po otočení tyče je nutno otočit i závaží na kuželu na konci tyče tak, aby nůž byl opět ve správné poloze.

Tyč obdélníkového průřezu je výměnná. Bylo použito několika tyčí různých průřezů, s různými hodnotami tuhosti k_1 , k_3 , a tím i s různými hodnotami

$$\text{„naladění“ } d = \frac{k_2}{k_1}.$$



Obr. 98.



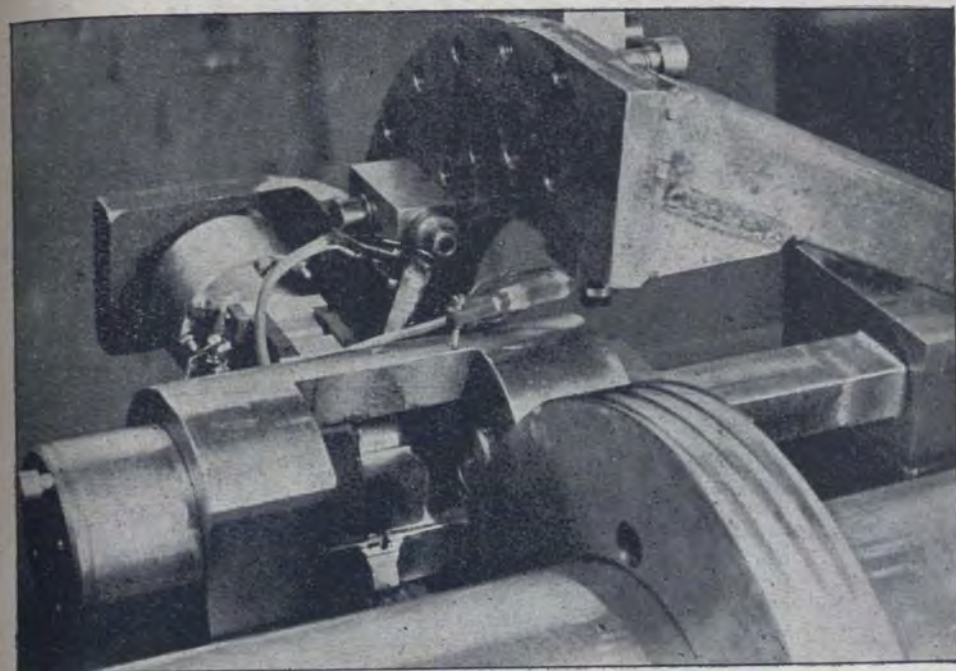
Obr. 99.

Obrobek je vytvořen jako kotouč přivařený na trubku $\varnothing 150/134$. Na povrchu kotouče je předem vysoustružen plochý závit s rozdílným stoupáním obou boků. Šířka závitu se tedy plynule mění.

Nůž upevněný na modelu soustruží pak povrch tohoto plochého závitu. Jelikož se při tom plynule mění šířka tržsky, mění se plynule i hodnota hloubkového koeficientu r , a tím i hodnoty κ_1 , κ_2 , při stálé hodnotě naladění d . Tento případ obrábění odpovídá pohybu po přímce $d = \text{konst}$ diagramu obr. 77 směrem k počátku O .

Hodnoty poměrného tlumení γ popsaného kmitavého systému jsou velmi malé a nelze je měnit. Proto ve směru obou stupňů volnosti byly vloženy mezi hmotu řídicího kmitavého systému a rám modelu zvláštní tlumiče, které zvyšují hodnotu γ a na kterých lze nastavit různou velikost hodnoty γ . Aby se dosáhlo lineárního tlumení, t. j. tlumení, při kterém tlumicí síla je úměrná rychlosti kmitání, jak se předpokládá v teorii, bylo použito viskosního tlumiče. Jeho provedení je znázorněno na obr. 98. Na tyči I jsou upevněny tři kotouče 2. Mezi jednotlivými kotouči jsou přepážky a prostor tlumiče je vyplněn olejem.

Vývod tyče je uzavřen gumovou membránou 3. Kotouč i tyč jsou z duralu. Při osovém pohybu tyče přetéká olej mezi jednotlivými prostory, spojenými malým průtokovým průřezem, a viskosním třením vzniká tlumicí síla. Tlumiče jsou mezi závaží a rám modelu vloženy v sérii s tensometrickými dynamometry. Jeden takový dynamometr je na obr. 99. Dynamometrů je použito proto, aby mohla být kontrolována tlumicí síla, její rovnoměrnost a velikost. Velikost

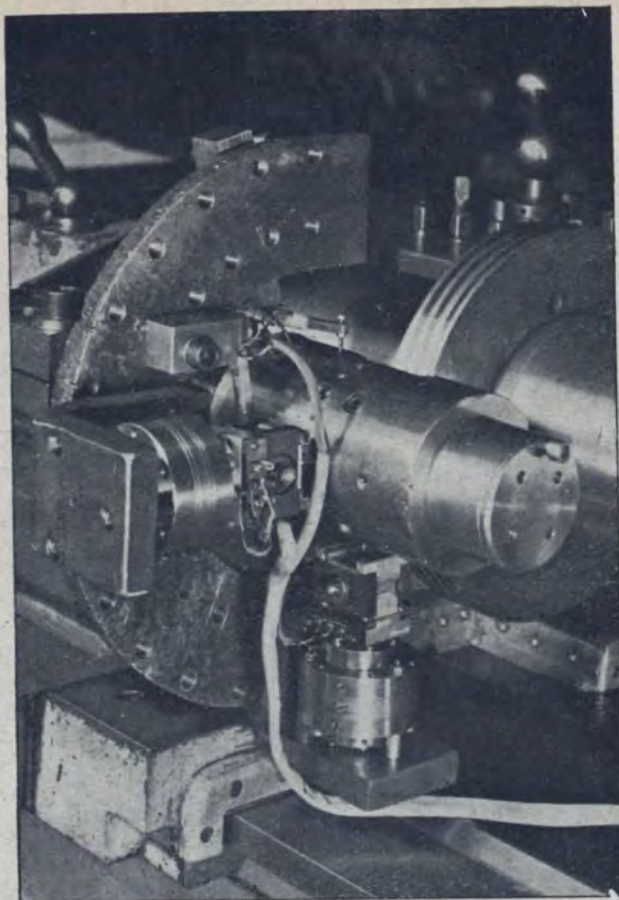


Obr. 100.

tlumení se v několika rozsazích nastavuje výměnou tlumicích kotoučů různého průměru a plynule záměnou oleje za olej jiné viskosity. Tuhost dynamometru je zhruba $5 \text{ kg}/\mu$ a citlivost $0,1 \text{ kg}$.

Model je dále opatřen tensometrickými relativními snímači kmitů, upevněnými mezi rámem modelu a závažím tvořícím hmotu řídicího systému. Při zkouškách byl zaznamenáván průběh kmitů ve směrech obou stupňů volnosti X_1 a X_2 . Snimače kmitů byly zapojeny do můstku a přes zesilovače na vícenásobný katodový oscilograf. Napájení můstku a zesílení byly stejnosměrné, takže jednak snimače zaznamenaly kmitavou i stejnosměrnou složku deformace pružin systému, jednak nevzniklo fázové skreslení údajů snimače na záznamu a bylo možno číst vzájemnou fázi kmitů v obou hlavních směrech.

Celkový pohled na model a uspořádání zkoušky je na obr. 100 a 101.



Obr. 101.

b) Hodnoty jednotlivých parametrů zkoušek

Tuhosti pružin a hmota systému.

Zkoušky byly provedeny za použití dvou různých tyčí obdélníkového průřezu. Hodnoty obou tuhostí k ve směru jedné a druhé symetrály průřezu byly zjištěny statickým měřením v místě nástroje. Velikost hmoty systému, redukováne do místa nástroje, byla zjištěna z měření frekvencí vlastních kmitů Ω v obou základních směrech. Hodnoty k , m , Ω pro jednotlivé použité tyče A, B jsou:

| tyč | $k \text{ kgcm}^{-1}$ | $\Omega \text{ c/s}$ |
|-----|-----------------------|----------------------|
| A | 2160 | 58 |
| | 5400 | 92 |
| B | 2240 | 59 |
| | 4050 | 79 |

Velikost hmoty je stejná pro všechny zkoušené případy

$$m = 0,0164 \text{ kgcm}^{-1}\text{s}^2.$$

Tlumení γ bylo změřeno ze záznamu dokmitu vlastních kmitů systému. Zkoušky byly provedeny při třech různých skupinách hodnot γ . Hodnoty γ pro jednotlivé zkoušky se poněkud liší, neboť tlumení bylo nastavováno změnou viskozity oleje a bylo obtížné nastavit vždy přesně stejnou hodnotu. Jednotlivé zkoušky jsou provedeny

- s tlumením velmi malým $\gamma = 0,008$ až $0,05$,
- se středním tlumením $\gamma = 0,05$ až $0,12$,
- s velkým tlumením $\gamma = 0,10$ až $0,25$.

Hodnota hloubkového koeficientu r se při každé zkoušce plynule měnila, neboť se plynule měnila šířka třísky b . Plynule se měnila i tloušťka třísky a , která je dána rozdílem mezi nastavenou hloubkou řezu a odtlačení nástroje ve směru Y. Toto odtlačení je větší při větší šířce třísky. Proto při větší šířce třísky byla tloušťka odebírané třísky menší. Šířka třísky b se pro každou zkoušku měnila od $b_{\min} = 0,5 \text{ mm}$ do $b_{\max} = 6 \text{ mm}$.

Průběh kmitů a tlumicí síly byl zaznamenáván filmováním se stínítka vícenásobného oscilografu. Ze záznamu lze odečíst velikost amplitudy kmitů ve směrech obou stupňů volnosti, frekvenci vzniklého kmitání a fázový posun obou složek kmitání. Ze záznamu lze odečíst složky střední deformace pružin v obou směrech a z nich lze dále určit skutečnou tloušťku třísky a , střední velikost řezné síly P a její sklon β a pro jednotlivé šířky třísky i hodnotu r . Na všech záznamech, které dále reprodukuje, je uvedeno označení x_1 , x_2 složek kmitů, jejich smysl a měřítko, jsou uvedeny časové intervaly a šířky třísky b pro jednotlivá místa záznamu.

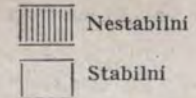
Záznamy končí většinou při šířce třísky $b = 3,5 \text{ mm}$. Nebyla-li pozorována na obrobeném povrchu až do maximální šířky třísky $b_{\max} = 6 \text{ mm}$ vlnitost, nebylo nutné provést záznam až do konce řezu.

Soustruženo bylo rychlořezným nožem s geometrií břitu $\gamma = 10^\circ$, $\alpha = 8^\circ$ při řezných rychlostech $v = 22$ až 28 m/min .

Celkem bylo provedeno dvacet jedna zkoušek při různém nastavení řídicího kmitavého systému modelu. Nastavené hodnoty a některé zjištěné hodnoty jednotlivých zkoušek jsou sestaveny v tabulce na obr. 102. Zkoušky jsou rozděleny do čtyř skupin, I až IV, podle směrové orientace a naladění systému. V jednotlivých skupinách jsou zkoušky s použitím různých pružin A, B a s různými hodnotami poměrného tlumení.

c) Výsledky zkoušek

Výsledky zkoušek porovnáme s theoretickými výsledky jednak kvalitativně, jednak kvantitativně. Základním kvalitativním hlediskem je stabilita nebo



nestabilita obrábění. Při theoretickém vyšetření jsme stanovili podmínky stability a rovnice meze stability pro případy určené jak hodnotami řídicího systému, tak hodnotou hloubkového koeficientu r . Každá z provedených zkoušek představuje celou plynulou řadu takových případů se společným kmitavým systémem a s různými hodnotami r . Při theoretickém vyšetření, provedeném pro systémy bez tlumení a částečně (pro $\alpha = \frac{1}{2}\beta$) i pro systémy se stejným poměrným tlumením pro oba stupně volnosti, bylo zjištěno, že určité kmitavé systémy dávají stabilní obrábění bez ohledu na velikost hodnoty r , určité kmitavé systémy jsou stabilní pouze do určité hodnoty r_{mez} a nad ní jsou nestabilní. Tento zásadní výsledek porovnáme se zjištěnou skutečností, i když řídicí systém použitý při zkouškách měl tlumení $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Pro některé případy provedeme matematické vyšetření stability přímo pro dané hodnoty tlumení.

Provedené theoretické vyšetření stanoví, že nestabilita může pro některé hodnoty r nastat pouze při směrové orientaci systému, dané hodnotou úhlu α

$$0 < \alpha < \beta,$$

$$\text{a to pouze při naladění systému } d = \frac{k_2}{k_1} > 1.$$

Případy směrové orientace $\alpha = 0^\circ$ jsou stabilní pro jakoukoli hodnotu r . Podle toho mohou být nestabilní pouze případy, dané skupinou zkoušek I. Při těchto zkouškách bylo naladění systému $d > 1$ a směrová orientace řídicího systému byla dána hodnotami $\alpha = 30^\circ$ a $\alpha = 35^\circ$. Pro průměrné hodnoty úhlu β mezi směrem + Y a řezné síly je to orientace

$$\alpha \sim \frac{1}{2}\beta,$$

kteřá byla při theoretickém vyšetření označena jako nejnepriznivější s hlediska stability. Lze tedy očekávat, že při zkouškách skupiny I vznikne při určité hodnotě r , tedy při určité šířce třísky b samobuzené kmitání.

Podle zásadních výsledků theoretického vyšetření mají být všechny případy realizované zkouškami skupiny II (pro kterou bylo $\alpha \sim \frac{1}{2}\beta$, avšak $d < 1$) a skupiny III a IV (pro které bylo $\alpha = 0^\circ$) stabilní pro všechny hodnoty r a tedy pro všechny hodnoty šířky třísky b .

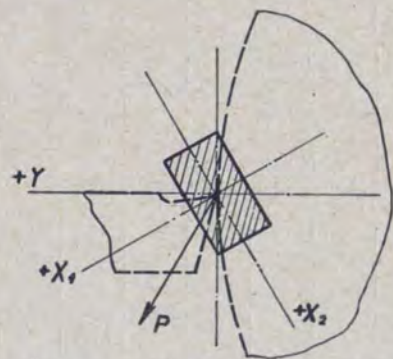
Při zkouškách bylo jako základního hlediska pro posouzení stability případu použito vlnitosti povrchu. Případy, ve kterých nebyla pozorována pravidelná vlnitost obrobeného povrchu, byly považovány za stabilní. Pro přesnější určení stability bylo použito dalších hledisek, vyplývajících z theoretického vyšetření. Podle toho jsou nestabilní ty případy, v kterých při určité hodnotě r , tedy při určité šířce třísky b , začíná vznikat kmitání, jehož amplituda rychle narůstá. Uvidíme dále, že po dosažení určité amplitudy (kdy nástroj už řeže pouze po část kmitu) narůstání přestává, amplituda kmitů však neklesá, nýbrž se udržuje na konstantní hodnotě. Podle theoretického vyšetření by mohlo dojít opět k zá-

| Tyč | Číslo zkoušky | Hodnoty dané | | | | | | Hodnoty zjištěné | | | | | | | | | | |
|-----|---------------|--------------------------------|----------|------|----------------------|-----|------------|------------------|------------|-----------|-----------|--------------------|----|------|-----|-----|----|----|
| | | Směrová orientace, naladění | α | d | kg/mm k_1 k_2 | | γ_1 | γ_2 | Stabilita | b_{max} | b_{mez} | c/s f_1 f_2 | | | | | | |
| I | A | $\alpha \sim \frac{1}{2}\beta$ | 35° | 2,5 | 216 | 540 | 0,008 | 0,02 | Nestabilní | 0,8 | 80 | | | | | | | |
| | 2 | | | | | | 0,10 | 0,05 | | | | | | 1,6 | 88 | | | |
| | 3 | | 30° | | | | | 0,10 | | | | | | 0,10 | 1,3 | 93 | | |
| | B | $d > 1$ | 35° | 1,8 | 224 | 405 | 0,02 | 0,04 | Nestabilní | 0,5 | 73 | | | | | | | |
| | 5 | | | | | | 0,07 | 0,09 | | | | | | 0,7 | 75 | | | |
| | 6 | | 30° | | | | | 0,17 | | | | | | 0,14 | 1,9 | 80 | | |
| II | A | $\alpha \sim \frac{1}{2}\beta$ | 35° | 0,4 | 540 | 216 | 0,03 | 0,08 | Stabilní | 6 | — | 110 | 40 | | | | | |
| | 8 | | | | | | 0,09 | 0,07 | | | | | | 6 | — | 100 | 35 | |
| | 9 | | 30° | | | | | 0,11 | | | | | | 0,08 | 6 | — | — | 40 |
| | B | $d < 1$ | 35° | 0,55 | 405 | 224 | 0,07 | 0,07 | Stabilní | 6 | — | 90 | 50 | | | | | |
| | 11 | | 30° | | | | | 0,20 | | | | | | 0,20 | 6 | — | — | 50 |
| III | A | $\alpha = 0^\circ$ | 0° | 2,5 | 216 | 540 | 0,03 | 0,02 | Stabilní | 6 | — | — | 92 | | | | | |
| | 13 | | | | | | | 0,10 | | | | | | 0,05 | 6 | — | — | 90 |
| | 14 | | | | | | | 0,10 | | | | | | 0,10 | 6 | — | — | 90 |
| | B | $d > 1$ | 0° | 1,8 | 224 | 405 | 0,07 | 0,02 | Stabilní | 6 | — | 75 | 75 | | | | | |
| | 16 | | | | | | | 0,06 | | | | | | 0,09 | 6 | — | 85 | — |
| 17 | | 0,25 | 0,11 | 6 | — | 80 | 95 | | | | | | | | | | | |
| IV | A | $\alpha = 0^\circ$ | 0° | 0,4 | 540 | 216 | 0,07 | 0,09 | Stabilní | 6 | — | — | 60 | | | | | |
| | 19 | | | | | | | 0,05 | | | | | | 0,08 | 6 | — | — | 63 |
| | B | $d < 1$ | 0° | 0,55 | 405 | 224 | 0,12 | 0,05 | Stabilní | 6 | — | — | 60 | | | | | |
| | 21 | | | | | | | 0,20 | | | | | | 0,21 | 6 | — | — | 70 |

niku kmitání (při dosažení horní meze stability), avšak až při značném zvětšení šířky třísky proti té šířce, při které kmitání vzniklo. Obě uvedená hlediska se v našich zkouškách shodují.

Pro samobuzené kmitání, vzniklé na základě polohové vazby je dále typickým znakem, že kmitání v obou směrech stupňů volnosti má stejnou frekvenci a je navzájem fázově posunuto. I kdyby však kmitání, které vznikne při zkoušce, nevykazovalo tento typický znak, zůstává rozhodujícím hlediskem nestability náhlý vzrůst amplitudy, bez jejího dalšího poklesu při malých zvětšeních hodnoty r .

Zkoušky, při kterých bylo podle uvedených základních hledisek zjištěno samobuzené kmitání, jsou v tabulce obr. 102 označeny šrafováním v rubrice „stabilita“. Vidíme, že zkoušky skupin II, III, IV byly stabilní pro všechny hodnoty $b(r)$. Při všech zkouškách skupiny I vzniklo samobuzené kmitání.



Obr. 103.

S kvalitativního hlediska potvrzuje experiment velmi dobře theoretické výsledky. Podrobnější porovnání provedeme pro každou skupinu zkoušek zvlášť.

I. skupinu zkoušek.

tvoří případy se směrovou orientací $\alpha \sim \frac{1}{2}\beta$ a naladěním $d > 1$, tedy případy, v kterých má podle základních výsledků theoretického vyšetření při určité hodnotě

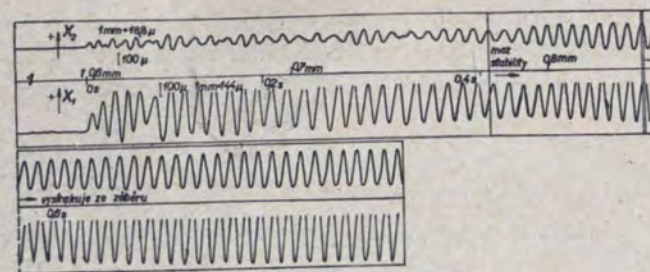
hloubkového koeficientu r_{mez} (tedy při určité hodnotě šířky třísky b_{mez}) vzniknout samobuzené kmitání.

Poloha tyče obdélníkového průřezu při těchto zkouškách a označení, kterého používáme, jsou uvedeny na obr. 103. Z tabulky obr. 102 vidíme, že tato skupina obsahuje zkoušky č. 1 až 6. Jednotlivé zkoušky se liší co do velikosti tuhostí k_1, k_2 , co do velikosti naladěním d i co do velikosti poměrných tlumení γ_1, γ_2 . V rubrice „stabilita“ je označeno, že při všech zkouškách vzniklo samobuzené kmitání, a to při dosažení šířky třísky, uvedené v rubrice b_{mez} .

Nejmenší mezní šířky třísky b_{mez} bylo dosaženo při zkoušce č. 4 (které přísluší naladěním $d = 1,8$ a velmi malé hodnoty poměrných tlumení γ), a to $b_{mez} = 0,5\text{mm}$. Pro zkoušku č. 2 byla ze záznamu kmitů vypočtena hodnota mezního hloubkového koeficientu $r_{mez} = 252\text{kg/mm}$. Tento případ porovnáme dále s theoretickým výpočtem.

V rubrice f_1, f_2 jsou uvedeny frekvence vzniklého samobuzeného kmitání. Vidíme, že ve směrech obou stupňů volnosti kmital systém stejnou frekvencí.

Záznam kmitů ve směru X_1 a X_2 pro zkoušku č. 1 je uveden na obr. 104. Na záznamu je uvedeno měřítko pro kmity v obou směrech, časové značky po 0,2 s a šířka třísky b_{mm} po 0,1 mm.



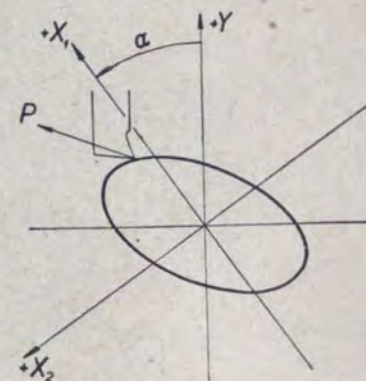
Obr. 104.

Na záznamu vidíme, že ihned po začátku obrábění se ve směru X_1 vyvinulo kmitání amplitudy zhruba $160\ \mu$. Ve směru X_2 vzniklo po začátku obrábění nepravidelné kmitání amplitudy průměrně $30\ \mu$. Po dosažení šířky třísky asi 0,8 mm ustaluje se i v směru X_2 frekvence kmitání a jeho amplituda rychle narůstá. Také amplituda kmitů x_1 od tohoto okamžiku narůstá. Brzy dosahuje amplituda kmitání takové hodnoty, že nástroj po část cyklu opouští záběr. Pak se amplituda kmitání v obou směrech ustaluje, a to na hodnotách $x_{01} = 210\ \mu, x_{02} = 160\ \mu$.

Kmity v směru X_1 jsou fázově posunuty za kmity ve směru X_2 . Ze záznamu byl sestaven tvar kmitavého pohybu v průběhu jednoho cyklu; při tom bylo abstrahováno od změny amplitudy během jednoho cyklu. Výsledkem je elipsovitý pohyb břitu nástroje, uvedený na obr. 105. Porovnáním tohoto obrázku s elipsou pohybu pro $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ na obr. 87 pro případ blízko dolní meze stability zjišťujeme zásadní shodu.

Kmitání zachycené na záznamu obr. 104 vykazuje všechny typické znaky samobuzeného kmitání, popisované v theoretickém vyšetření principu polohové vazby.

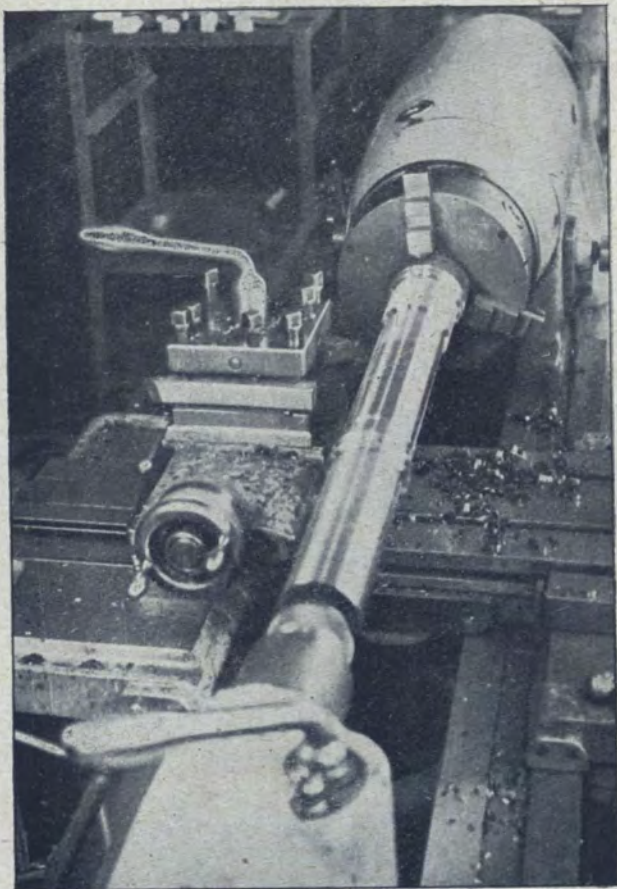
Záznam kmitů v směru X_1 a X_2 pro zkoušku č. 2 je uveden na obr. 106. Po začátku obrábění vzniká v obou směrech nepravidelné kmitání, které se utlumuje, až při šířce třísky $b = 0,9\text{ mm}$ téměř úplně vymizí. V dalším průběhu je amplituda nepravidelných kmitů $x_{01} \approx 50\ \mu, x_{02} \approx 35\ \mu$. Při šířce třísky $b = 1,4\text{ mm}$



Obr. 105.

mezní šířku třísky. Pak říkáme na př., že stroj *A* je dvakrát odolnější proti vzniku samobuzených kmitů než stroj *B*, jestliže $t_{mezA} = 2 t_{mezB}$.

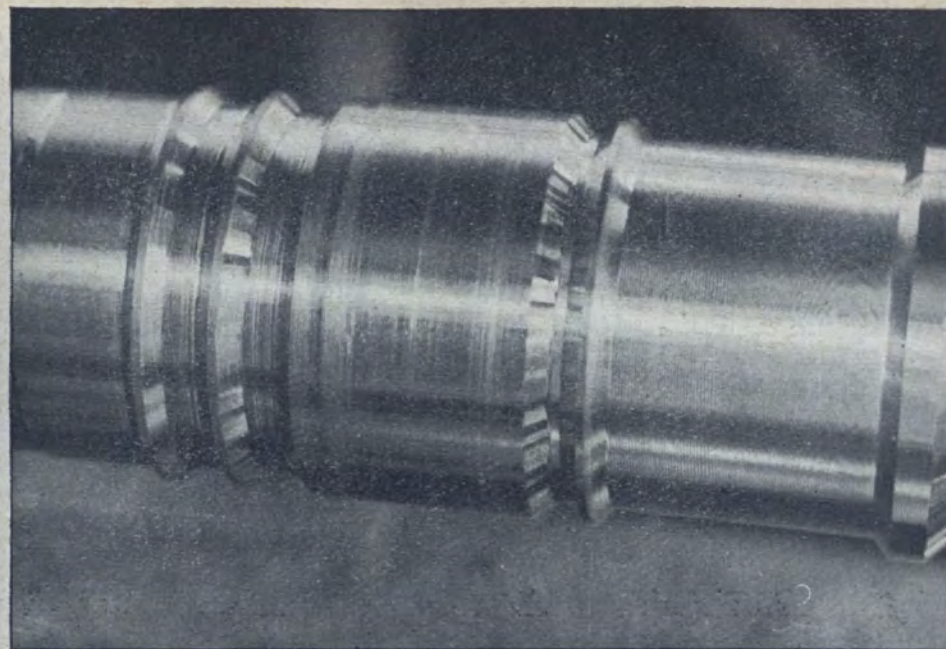
Vidíme, že při takto stanoveném základním hledisku můžeme obdržet jiné kvantitativní ohodnocení jednotlivých podmínek než při hledisku daném amplitudou kmitů — intenzitou kmitání, použitím v kap. II, 5.



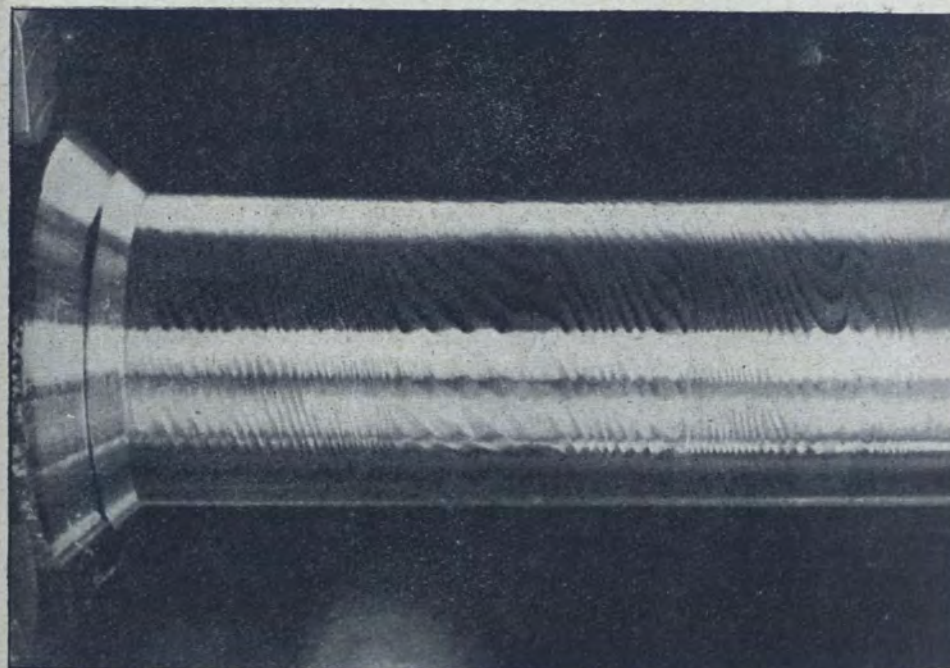
Obr. 26.

Při systematických zkouškách jsme ve všech případech určovali frekvenci vzniklého samobuzeného kmitání. Pokusili jsme se též určit, který ze systémů daného stroje má stejný kmitočet vlastních kmitů, abychom určili „řídící systém“ daného stroje.

Materiál, který uvádíme, není ovšem ve všech případech získán popsanou metodikou, a to z důvodů, které jsme na počátku tohoto oddílu uvedli.

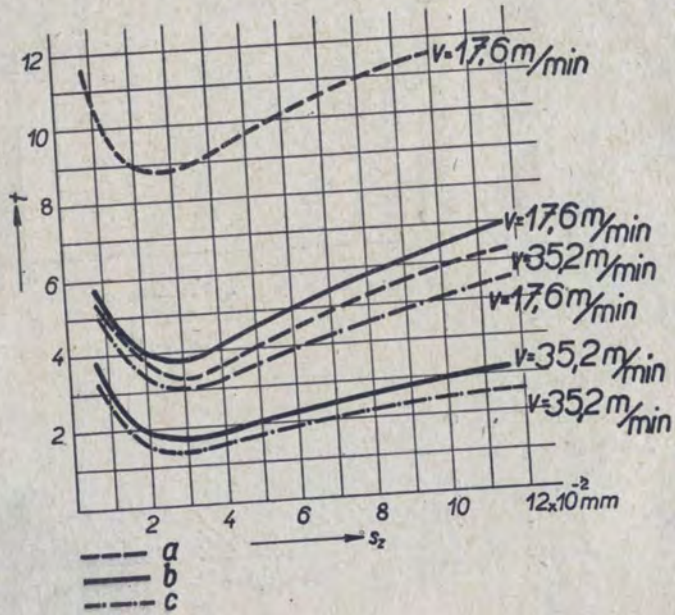


Obr. 27.



Obr. 28.

Vliv zvětšení hmoty řídicího systému na intenzitu samobuzeného kmitání je vyjádřen na obr. 42, kde jsou uvedeny profilogramy povrchu obrobeneho frézou průměru 150 mm, 4 zuby v záběru, hloubka řezu $t = 5$ mm. Profilogramy *a* a *b* odpovídají frézování řeznou rychlostí $v = 22$ m/min, posuvem $s_z = 0,015$ mm a řeznou rychlostí $v = 17$ m/min, posuvem $s_z = 0,026$ mm. Profilogramy *c* a *d* odpovídají shodným případům, při kterých byl na nástroji připevněn setrvačnik.



Obr. 43.

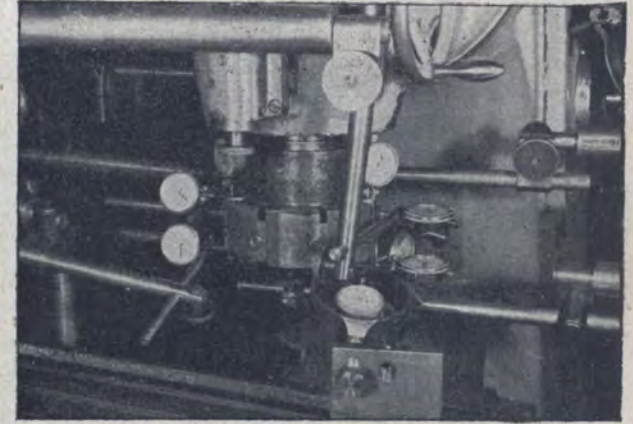
Frekvence kmitů se snížila s $f = 223$ c/s a 243 c/s na $f = 94$ c/s a 96 c/s, rozteč vln na obrobeneém povrchu se nepřímo úměrně tomu zvětšila a hloubka vln se podstatně zvětšila — amplituda kmitů při zvětšení hmoty řídicího systému silně vzrostla. Výsledek se shoduje s výsledkem zkoušky na soustruhu S 50.

Vliv tuhosti upnutí nástroje (tuhosti pružiny řídicího systému) je vyjádřen na obr. 43, kde jsou v souřadnicích hloubka řezu t , posuv na zub s_z vyznačeny mezní křivky vzniku samobuzených kmitů při různých řezných rychlostech pro frézování frézou s různým vyložení. V případě *a* bylo vyložení břitu nástroje od konce vřetena 85 mm, v případě *b* 127 mm, v případě *c* 160 mm. Při určité řezné rychlosti, na př. $v = 17,6$ m/min, jsou mezní podmínky případu *a* podstatně vyšší než případu *b*, mezní podmínky případu *c* jsou nižší než případu *b*. Mezní podmínky se zvyšují se zmenšením vyložení nástroje, t. j. se zvýšením tuhosti jeho upnutí.

9. Zkoušky frézování frézovacími hlavami s nástroji ze slinutých karbidů

Zkoušky byly prováděny na svislé frézce FA4V. Byly zaměřeny hlavně na vyšetření vlivu různé konstrukce upnutí frézovací hlavy na vřeteno — viz [11]. Frézováno bylo při různých způsobech upnutí frézovací hlavy, jimž odpovídají různé hodnoty statické příčné tuhosti na noži, které byly pro každý případ zjištěny měřením (obr. 44). Při měření tuhosti bylo zatěžováno silou výsledného směru, který zhruba odpovídá směru výsledné řezné síly ($P_x : P_y : P_z = 1 : 0,72 : 1$), a tuhost byla definována jako poměr mezi velikostí složky P_x zatěžující síly, spadající do směru posuvu a deformace x v témž směru

$$s = \frac{P_x \text{ kg}}{x \mu}$$



Obr. 44.

Ve všech případech bylo použito řezné rychlosti

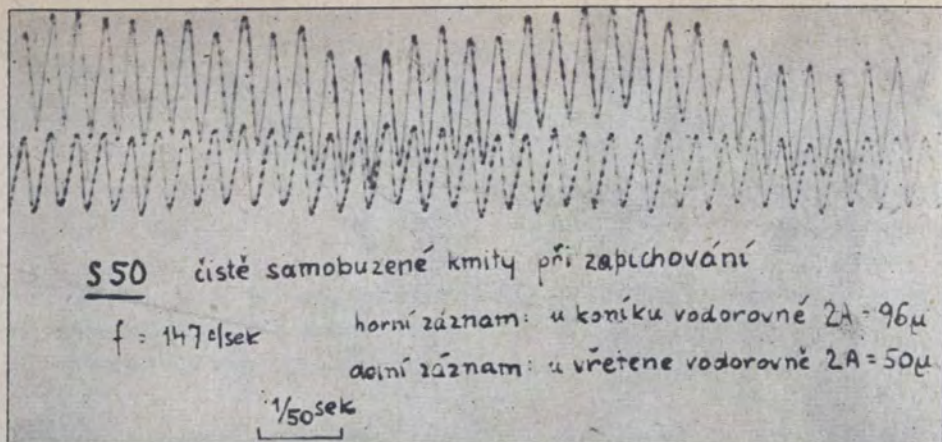
$v = 200$ m/min a geometrie nože $\kappa_1 = 60^\circ$, $\alpha = 7^\circ$, $\gamma = -15^\circ$, $\lambda = +15^\circ$. Zjišťován byl dále vliv hloubky řezu t a posuvu na zub s_z na vznik samobuzených kmitů a v části zkoušek, v které byla měněna též hodnota úhlu nastavení κ_1 , vliv změny tohoto úhlu.

Frézovací hlava průměru 172 mm byla opatřena osmi noži. Frézovaný materiál jakosti T 6 W měl šířku 100 mm a byl upnut přímo na stole stroje.

Z velkého počtu případů různého provedení upnutí vybíráme čtyři:

| Číslo případu | Druh upnutí | Tuhost s_{zx} kg/ μ |
|---------------|---|---------------------------|
| 1 | Upnutí přímo na kuželovou hlavu vřetena M 50 | 13 |
| 2 | Upnutí přímo na kuželovou hlavu vřetena M 40 | 11,75 |
| 3 | Upnutí na frézovací trn ISA 70 s přírubou a jedním středícím průměrem | 5,9 |
| 4 | Upnutí na frézovací trn M 40 s velkým středícím průměrem ... | 4,2 |

Provedení jednotlivých případů uvádíme v náčrtku na obr. 45. Případy č. 1 a 2 se liší pouze velikostí kužele hlavy vřetena. Zvýšení tuhosti provedení



Obr. 56.

Z hodnot řezu vypočteme přibližně:

$$P_{y \text{ stat}} = 40 \text{ kg},$$

$$P_{z \text{ stat}} = 100 \text{ kg}.$$

Koeficient zvýšení namáhání pro součásti řídicího kmitavého systému (obrobek, vřeteno, hrot, pinola, koník atd.)

$$\zeta_y = 7,5 \text{ ve směru } y \text{ u vřetena},$$

$$\zeta_y = 7,2 \text{ ve směru } y \text{ u koníka},$$

$$\zeta_z = 14,6 \text{ ve směru } z \text{ u vřetena},$$

$$\zeta_z = 12,6 \text{ ve směru } z \text{ u koníka}.$$

Pro ostatní součásti stroje:

$$P_{\text{stř}} = 100 \text{ kg}, \quad a = 0,15 \text{ mm}, \quad y_0 = 0,048 \text{ mm}.$$

$$P_{\text{prom}} = 32 \text{ kg}, \quad \zeta_n = 1,32.$$

Hloubka vln cca 0,1 mm, rozteč vln 5 mm.

b) Soustruh SU 40

Universální soustruh, výška hrotů 200 mm, výkon motoru 8 kW, obrobek $\varnothing 150 \text{ mm}$, délka 750 mm, upnutý v hrotech (v pinole pevný hrot). Obráběný materiál ST 60.11, $v = 80 \text{ m/min}$, nůž s destičkou SK — Sl, $\alpha_1 = 20^\circ$, $t = 3 \text{ mm}$, $s = 0,2 \text{ mm/ot}$. Odpovídá zatížení stroje čistým řezným výkonem 1,5 kW.

Byly měřeny kmity na vřetenu a na koníku v horizontálním směru (obr. 57), kde je uveden filmový záznam kmitů na vřetenu.

Tuhost na vřetenu
na koníku

$$s_y = 22 \text{ kg}/\mu,$$

$$s_y = 18 \text{ kt}/\mu.$$

Naměřeno na vřetenu
na koníku

$$y_0 = 26 \mu - f = 130 \text{ c/s},$$

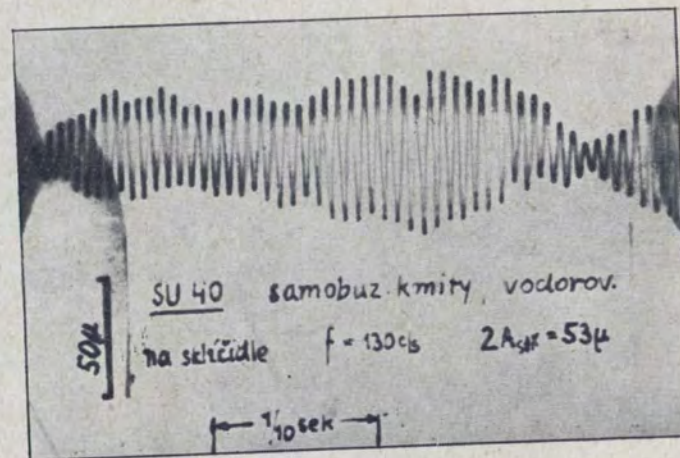
$$y_0 = 30 \mu - f = 130 \text{ c/s}.$$

Obdržíme na vřetenu
na koníku

$$P_{y \text{ dyn}} = 570 \text{ kg},$$

$$P_{y \text{ dyn}} = 540 \text{ kg}.$$

Z hodnot řezu $P_{y \text{ stat}} = 40 \text{ kg}$,
na vřetenu $\zeta_y = 14,3$,
na koníku $\zeta_y = 13,4$.



Obr. 57.

Pro vynucované systémy stroje

$$\zeta_n = \frac{a + y_0}{a} = \frac{s \cdot \text{tg } 20^\circ + y_0}{s \text{ tg } 20^\circ} = \frac{0,073 + 0,03}{0,073},$$

$$\zeta_n = 1,4.$$

Hloubka vln na povrchu $\sim 0,06 \text{ mm}$, rozteč vln 10 mm.

c) Soustruh SV 18

Universální soustruh, jehož hroty mají výšku 190 mm, výkon motoru 6 kW, obrobek $\varnothing 100 \text{ mm}$, $l = 220 \text{ mm}$, obráběný materiál VAR, upnutý v sklíčidle a otáčivém hrotu, $v = 136 \text{ m/min}$, pravý hrubovací nůž s destičkou SK — Sl, $\alpha_1 = 45^\circ$, $t = 3 \text{ mm}$, $s = 0,1 \text{ mm/ot}$, čistý řezný výkon 1,3 kW. Byly měřeny kmity na obrobku

$$y_0 = 68 \mu, \quad f = 162 \text{ c/s}.$$

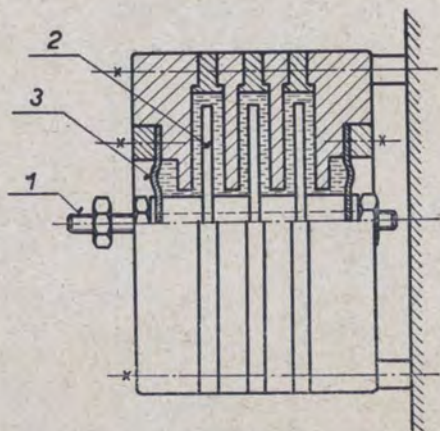
Tuhost na obrobku $s_y = 5 \text{ kg}/\mu$.

saním soustruhu. Závaží s tyčí obdélníkového průřezu tvoří řídicí kmitavý systém o dvou stupních volnosti, jejichž směry jsou dány symetřálami průřezu tyče.

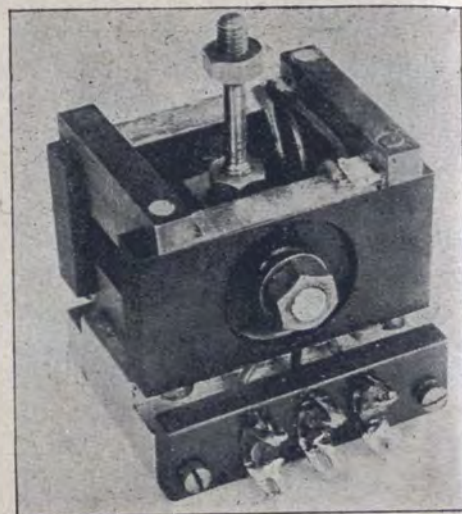
Tyč se dá v objímce, do které je upnuta, otočit. Tím můžeme měnit směrovou orientaci řídicího systému. Po otočení tyče je nutno otočit i závaží na kuželu na konci tyče tak, aby nůž byl opět ve správné poloze.

Tyč obdélníkového průřezu je výměnná. Bylo použito několika tyčí různých průřezů, s různými hodnotami tuhostí k_1 , k_3 , a tím i s různými hodnotami

$$\text{„naladění“ } d = \frac{k_2}{k_1}.$$



Obr. 98.



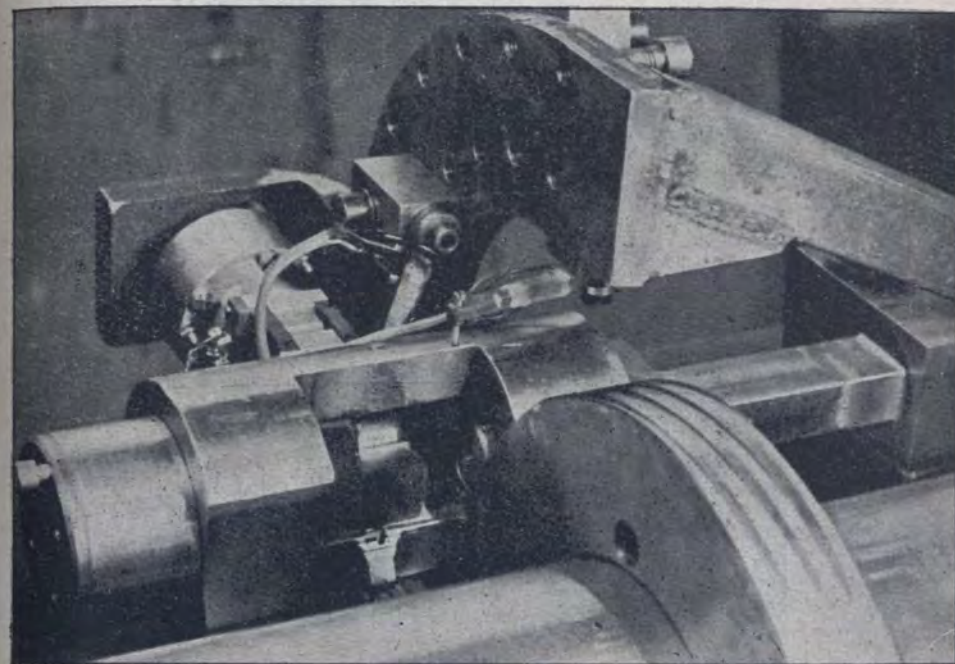
Obr. 99.

Obrobek je vytvořen jako kotouč přivařený na trubku $\varnothing 150/134$. Na povrchu kotouče je předem vysoustružen plochý závit s rozdílným stoupáním obou boků. Šířka závitu se tedy plynule mění.

Nůž upevněný na modelu soustruží pak povrch tohoto plochého závitu. Jelikož se při tom plynule mění šířka třísky, mění se plynule i hodnota hloubkového koeficientu r , a tím i hodnoty α_1 , α_2 , při stálé hodnotě naladění d . Tento případ obrábění odpovídá pohybu po přímce $d = \text{konst}$ diagramu obr. 77 směrem k počátku O .

Hodnoty poměrného tlumení γ popsaného kmitavého systému jsou velmi malé a nelze je měnit. Proto ve směru obou stupňů volnosti byly vloženy mezi hmotu řídicího kmitavého systému a rám modelu zvláštní tlumiče, které zvyšují hodnotu γ a na kterých lze nastavit různou velikost hodnoty γ . Aby se dosáhlo lineárního tlumení, t. j. tlumení, při kterém tlumicí síla je úměrná rychlosti kmitání, jak se předpokládá v teorii, bylo použito viskosního tlumiče. Jeho provedení je znázorněno na obr. 98. Na tyči 1 jsou upevněny tři kotouče 2. Mezi jednotlivými kotouči jsou přepážky a prostor tlumiče je vyplněn olejem.

Vývod tyče je uzavřen gumovou membránou 3. Kotouč i tyč jsou z duralu. Při osovém pohybu tyče přetéká olej mezi jednotlivými prostory, spojenými malým průtokovým průřezem, a viskosním třením vzniká tlumicí síla. Tlumiče jsou mezi závaží a rám modelu vloženy v serii s tensometrickými dynamometry. Jeden takový dynamometr je na obr. 99. Dynamometrů je použito proto, aby mohla být kontrolována tlumicí síla, její rovnoměrnost a velikost. Velikost



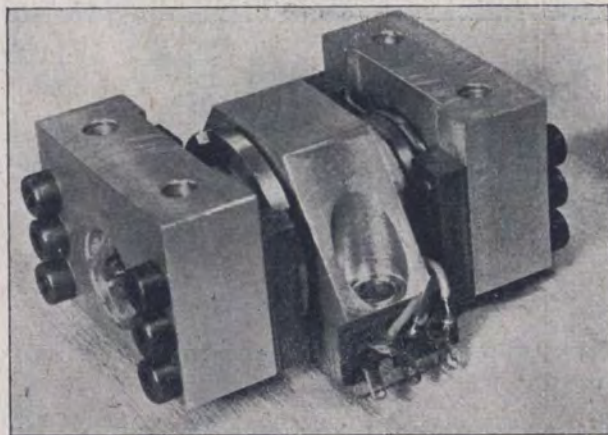
Obr. 100.

tlumení se v několika rozsazích nastavuje výměnou tlumicích kotoučů různého průměru a plynule záměnou oleje za olej jiné viskosity. Tuhost dynamometru je zhruba $5 \text{ kg}/\mu$ a citlivost $0,1 \text{ kg}$.

Model je dále opatřen tensometrickými relativními snímači kmitů, upevněnými mezi rámem modelu a závažím tvořícím hmotu řídicího systému. Při zkouškách byl zaznamenáván průběh kmitů ve směrech obou stupňů volnosti X_1 a X_2 . Snímače kmitů byly zapojeny do můstků a přes zesilovače na vícenásobný katodový oscilograf. Napájení můstku a zesílení byly stejnosměrné, takže jednak snímače zaznamenaly kmitavou i stejnosměrnou složku deformace pružin systému, jednak nevzniklo fázové skreslení údajů snímače na záznamu a bylo možno čist vzájemnou fází kmitů v obou hlavních směrech.

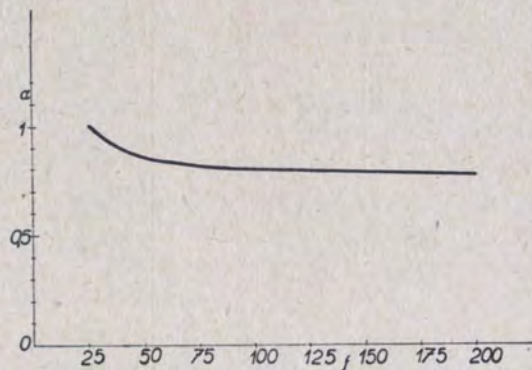
Celkový pohled na model a uspořádání zkoušky je na obr. 100 a 101.

na koncích podepřený a uprostřed zatěžovaný měřenou silou. Je zhotoven z celoronu, jehož modul pružnosti $E = 5 \cdot 10^4$ kg/cm. Na koncích nosníku je zavěšena kotva 2 elektromagnetu. Uprostřed je uchycen k sloupku 3, který je připevněn k rozkmitávané části stroje. Trubkový nosník je polepen tensometrickými pásky 4. Pohled na dynamometr je na obr. 136. Dynamometr má citlivost $3,8 \cdot 10^{-5} \frac{\Delta R}{R}$



Obr. 136.

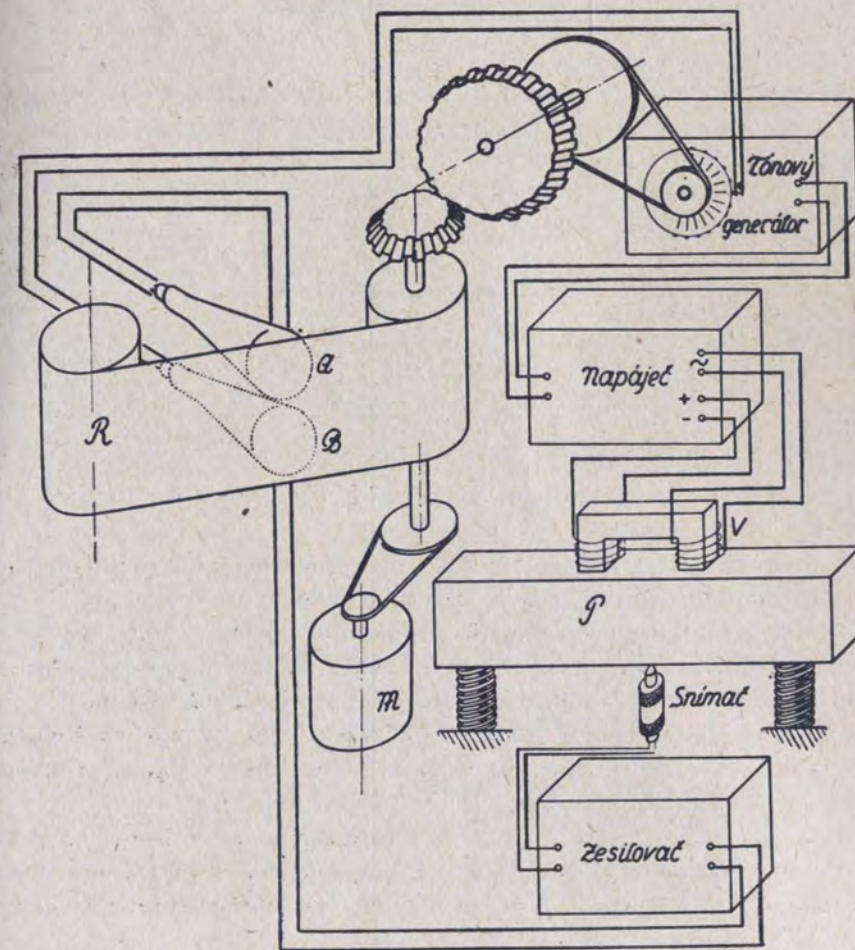
tím, že zařazujeme v serii s vinutím elektromagnetu lampové variátory. Frekvenční závislost amplitudy síly při tomto zařízení byla experimentálně zjištěna a je znázorněna na diagramu obr. 137. Na diagramu je uvedena hodnota opravného součinitele α , kterým je nutno násobit amplitudu síly P_{25} zjištěnou při frekvenci 25 c/s, jestliže chceme zjistit amplitudu síly při jiné frekvenci, získanou stejným budícím proudem.



Obr. 137.

Pro měření rezonančních charakteristik systému bylo upraveno měřicí zařízení schematicky znázorněné na obr. 138. Z tónového generátoru vedeme střídavé napětí do napáječe, kde je zesíleno a kde se vytváří také předmagnetizační stejnosměrné napětí. Odtud je napájeno vinutí v elektromagnetu vibrátoru V. Vynucené kmitavého systému P snímáme snímačem kmitů.

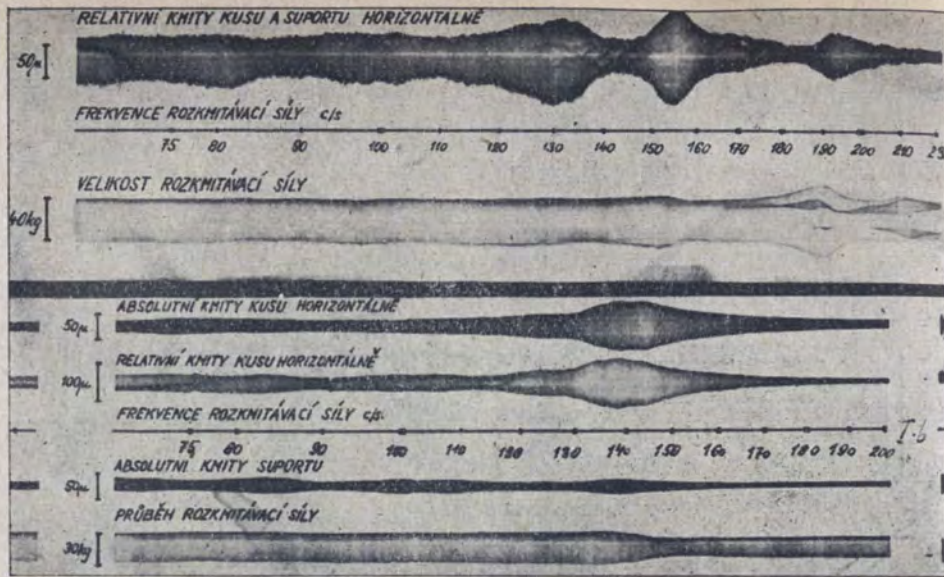
Napětí ze snímače kmitů vedeme přes zesilovač do oscilografu. Výchylku paprsku filmujeme se stínítkou oscilografu na oscilografický papír R, který se posouvá. Posuv papíru je prováděn motorkem M. Od tohoto motorku je současně přes převod natáčen knoflík tónového generátoru, kterým se řídí frekvence



Obr. 138.

napětí generátorem vyráběného. Frekvence vynucující síly se tak automaticky plynule mění a amplituda vynucených kmitů se současně zaznamenává. Příklad záznamu rezonanční charakteristiky uvádíme na obr. 139.

Ze záznamu rezonanční charakteristiky zjistíme, při kterých frekvencích vznikají rezonanční maxima kmitů. Tyto frekvence jsou pak frekvencemi vlastních



Obr. 139.

kmitů jednotlivých druhů kmitání. Z rezonanční charakteristiky lze dále zjistit dynamickou tuhost systému.

Tvar určitého druhu kmitání měříme při vynuceném kmitání konstantní frekvencí, a to rezonanční frekvencí, příslušnou danému druhu kmitání.

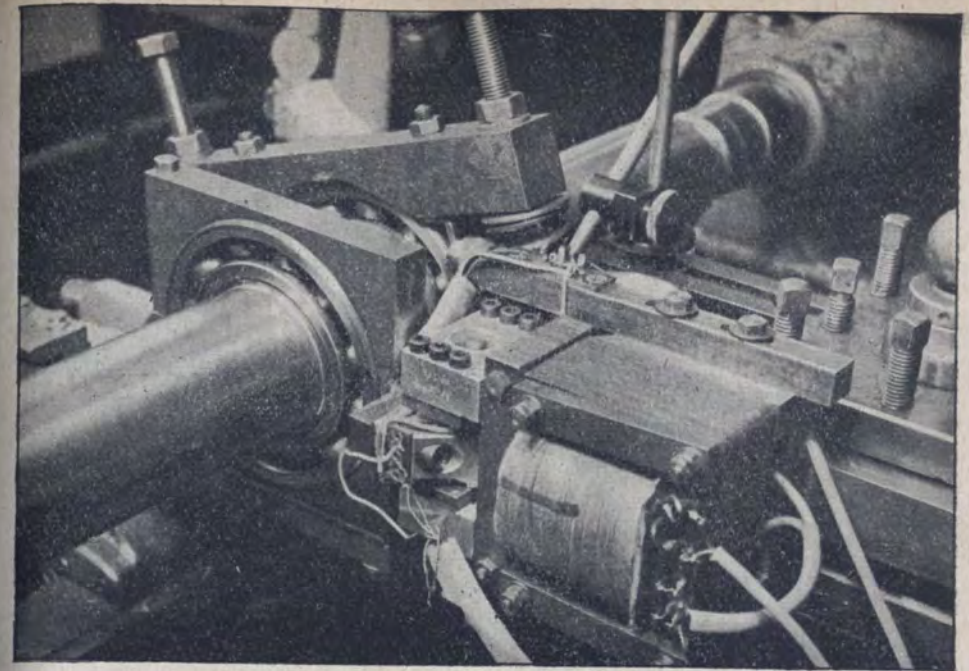
Tlumení systému nemůžeme měřit z dokmitové křivky proto, že systém dokmitává současně všemi druhy vlastních kmitů. Měříme proto opět při vynuceném kmitání konstantní amplitudou. Určujeme práci, kterou při ustáleném kmitání dodáváme kmitajícímu systému. Tato práce je rovna práci spotřebované tlumicí silou. Výsledkem měření je velikost tlumicí práce L_{tl} , spotřebované za jeden cyklus kmitání určité amplitudy a určité frekvence.

I v takovém případě, kdy tlumení je nelineární, můžeme z daného měření vypočítat hodnotu tlumicí konstanty c , která by způsobila při lineárním tlumení stejně velkou ztrátu energie L_{tl} za jeden cyklus, jako je měřením zjištěná hodnota, a to z výrazu

$$L_{tl} = \pi c \omega A^2,$$

kde ω je frekvence kmitání, A jeho amplituda.

Práci dodanou ustálenému kmitání za jeden cyklus měříme tak, že zaznamenáváme průběh vynucující síly na systém působící a průběh výchylky v tom místě systému, v kterém vynucující síla působí. Jestliže napětí vznikající v dynamometru vedeme na vodorovně vychylující destičky obrazovky a napětí vznikající v snimači kmitů na svisle vychylující destičky obrazovky oscilografu, opiše světelná stopa na stínítku obrazovky za jeden cyklus ustáleného kmitání

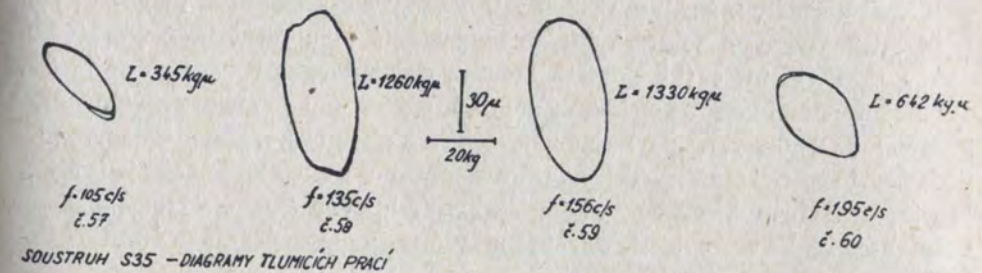


Obr. 140.

uzavřenou křivku, která je v příslušném měřítku kreslena v souřadnicích síla — dráha.

Plocha touto křivkou uzavřená znamená tedy v určitém měřítku přímo energii dodanou ustálenému kmitání za jeden cyklus, a tím i energii spotřebovanou tlumicí silou za jeden cyklus. Planimetrováním záznamu této křivky zjistíme velikost tlumicí práce L_{tl} za jeden cyklus.

Na obr. 140 uvádíme pohled na uspořádání při rozkmitávání obrobku upnutého na soustruhu. Elektromagnetický vibrátor je upnut do nožové hlavy soustruhu. Jeho kotva je upevněna přes tensometrický dynamometr na objímce, která



Obr. 141.

PŘEHLED OZNAČENÍ

Vektory jsou označovány polotučně (na př. \mathbf{F}); skalární součiny dvou vektorů tečkou (na př. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}$)

| | | |
|---|---|----------------------------------|
| \mathbf{e} | jednotkový vektor ve směru normály k obráběnému povrchu | |
| \mathbf{e}_k | jednotkový vektor ve směru normálního kmitu | |
| \mathbf{e}_s | jednotkový vektor ve směru hlavní statické tuhosti | |
| \mathbf{f} | jednotkový vektor ve směru řezné síly | |
| F, \mathbf{F} | síla, zpravidla řezná | kg |
| g_k | parametry charakterisující stroj (viz oddíl 2) | $\text{kg}^{-1} \text{m s}^{-2}$ |
| \bar{g}_k | střední hodnota g_k | $\text{kg}^{-1} \text{m s}^{-2}$ |
| g | parametr stroje v prvním přiblížení zanedbaný | $\text{kg}^{-1} \text{m s}^{-2}$ |
| j | imaginární jednotka | |
| i, k | indexy | |
| k | tuhost tyče | kg m^{-1} |
| K | tuhost rámu | kg m^{-1} |
| m | hmota nože | $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ |
| M | redukovaná hmota rámu | $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ |
| n | počet stupňů volnosti systému | |
| N | počet hmot systému | |
| P_i | písmeno, specifikující určitou hmotu systému | |
| p_k | „částečné podajnosti“, t. j. parametry charakterisující stroj (viz oddíl 1) | $\text{kg}^{-1} \text{m}$ |
| q_k | „normální souřadnice“, viz (1,3) | kg |
| Q_k | „normální síla“, viz (1,2) | kg s^{-2} |
| r | konstanta úměrnosti mezi zabořením nože a řeznou silou | kg m^{-1} |
| $r_i = \frac{1}{\Phi(z_i)}$ | | kg m^{-1} |
| r_m | mezí r (oddíl 3) | kg m^{-1} |
| r_{m0} | mezí r pro zjednodušený systém | |
| s | bezrozměrná míra pro r , viz (4,4) | |
| $v = \frac{\omega^2 - \Omega_1^2}{\Omega_3^2 - \Omega_1^2}$ | | |
| $w = v - \frac{1}{2}$ | | |
| x, \mathbf{x} | výchylka, obzvláště výchylka nože | m |
| $\mathbf{x}_k(P_i)$ | normální tvar kmitání | m |
| z | proměnná ve funkci $\Phi(z)$ rovná ω^2 | s^{-2} |
| z_i, z_{\pm} | kořeny rovnice $\Phi'(z) = 0$ | s^{-2} |
| z_m | kořen rovnice $\Phi' = 0$, pro který $\Phi(z_m) = \frac{1}{r_m}$ | s^{-2} |
| z_{m0} | kořen rovnice $\Phi_0 = 0$, pro který $\Phi(z_{m0}) = \frac{1}{r_{m0}}$ | s^{-2} |
| z_{i0} | kořeny rovnice $\Phi'_0(z) = 0$ | s^{-2} |
| α_k | úhel mezi vektorem \mathbf{e} a průmětem vektoru \mathbf{e}_k do roviny určené vektory \mathbf{e}, \mathbf{f} | |

- α úhel natočení v rovině dané vektory \mathbf{e}, \mathbf{f}
- β úhel mezi vektory \mathbf{e} a \mathbf{f}
- β' viz (5,7)
- δ viz (5,3)
- Δ označuje (malé) přírůstky různých veličin, na př. $\Delta\lambda_k, \Delta\omega$
- ε_k úhel mezi vektorem \mathbf{e}_k a rovinou určenou vektory \mathbf{e}, \mathbf{f}
- η součinitel (blízký 0,5) ve vzorci (5.10)
- $\lambda_k, \tilde{\lambda}$ útlumy jednotlivých tvarů kmitu, viz (7,1) s^{-1}
- $\mu = \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{\Omega_3^2 - \Omega_1^2}$
- Π značí součin
- Σ značí součet
- φ fázové posunutí mezi zvlněním pochvňého povrchu a kmitu jím způsobenými
- $\Phi = \Phi(z)$ charakteristická funkce, viz (2,6) $kg^{-1} m$
- Φ_0 charakteristická funkce zjednodušeného systému $kg^{-1} m$
- $\Phi' = \frac{d\Phi}{dz}, \Phi'' = \frac{d^2\Phi}{dz^2}$
- ψ_1, ψ_3 konstanty stroje; viz (4,2) a (4,3)
- Ω_k kruhové frekvence vlastních kmitů stroje s^{-1}
- $\tilde{\Omega}$ kruhová frekvence vlastního kmitu v prvním přiblížení zanedbaného s^{-1}
- ω kruhová frekvence vzniklého kmitání, ev. komplexní číslo, jehož reálná část dává kruhovou frekvenci a imaginární část útlum vzniklého kmitání s^{-1} .

1. Rovnice pro kmity obráběcího stroje

Kromě posledního oddílu se budeme zabývat stroji kmitajícími bez tlumení (konservativními). Pro takovéto systémy platí věta, napsaná na př. v [3], str. 211—223, kde je dokázána pro systémy s konečným počtem stupňů volnosti; s tím se v následujícím textu spokojíme, ač to není podstatné. Existuje spektrum vlastních cyklických frekvencí

$$\Omega_1 \ll \Omega_2 \ll \dots \ll \Omega_n$$

s příslušnými „normálními tvary“ kmitání

$$\mathbf{x}_1(P_i), \mathbf{x}_2(P_i), \dots, \mathbf{x}_n(P_i),$$

takovými, že okamžitou výchylku $\mathbf{x} = \mathbf{x}(P_i, t)$ při libovolném pohybu systému je možno vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x}(P_i; t) = \sum_{k=1}^n q_k(t) \mathbf{x}_k(P_i)$$

a že funkce $q_k(t)$ („normální souřadnice“) hovoří rovnicím

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} + \Omega_k^2 q_k = Q_k, \tag{1,1}$$

kde $Q_k = Q_k(t)$ jsou veličiny úměrné průmětu vnějších sil do jednotlivých tvarů kmitání

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \mathbf{x}_k(P_i)$$

Působí-li tedy na systém jediná síla $\mathbf{F}(t)$, a jsou-li \mathbf{e}_k jednotkové vektory normálních tvarů kmitání v jejím působišti, lze při vhodném normování tvarů kmitání (které jsou jinak určeny jen až na multiplikativní konstantu) psát

$$Q_k = \Omega_k^2 \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{e}_k. \tag{1,2}$$

Jde-li speciálně o sílu sinusovou s amplitudou \mathbf{F} , plyne z rovnic (1,1) a (1,2) pro amplitudy normálních souřadnic

$$q_k = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\Omega_k^2}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_k. \tag{1,3}$$

Amplituda výchylky v působišti síly je při tom rovna

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n q_k P_k \mathbf{e}_k, \tag{1,4}$$

kde p_k jsou konstanty charakterisující systém; mají rozměr délka/síla a budeme je nazývat „částečnými poddajnostmi“. Jejich názorný význam plyne z toho, že je-li \mathbf{e}_s některý z hlavních směrů statické tuhosti (t. j. směr, v němž směr výchylky splývá se směrem síly) a $p = \frac{x}{F}$ statická poddajnost v tomto směru, plyne z rovnic (1,4) a (1,3) pro $\omega = 0$

$$p = \sum_{k=1}^n p_k (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_s)^2.$$

Pokud se tedy zajímáme jen o chování jediného bodu systému při působení síly v tomto bodě, stačí k charakterisování systému (stroje) veličiny Ω_k , \mathbf{e}_k , p_k ; při tom je možno normální tvary kmitu se stejným Ω_k stáhnouti v jeden člen (s příslušně změněnými hodnotami \mathbf{e}_k , p_k), takže můžeme nadále předpokládat Ω_k navzájem různá. Při charakterisování stroje těmito veličinami vyjdou rovnice pro samobuzené kmity v jednoduchém tvaru; nevýhodou je však to, že není zřejmo, jak by se konstruoval stroj mající předepsané hodnoty těchto konstant ani je-li to vůbec možné.

Právě probraný případ se silou v jediném bodě odpovídá obráběcímu stroji s pružně upevněným nožem působícím na tuze upevněný obrobek nebo naopak. Pruží-li i nůž i obrobek (při tom je lhostejno, zda nůž a obrobek mají nezávisle na sobě své tvary kmitání nebo zda jsou vázány přes rám stroje, takže na každém tvaru kmitání je účastněn i nůž i obrobek), platí vzorce (1,3) a (1,4) nezměněně, rozumíme-li v nich písmenem \mathbf{x} vzájemnou výchylku (vektorový rozdíl výchylek) nože a obrobku (a podobně písmenem \mathbf{e}_k jednotkový vektor ve směru vzájemné výchylky při k -tém tvaru kmitání).

Doposud jsme mluvili o amplitudách souřadnic q_k a síly \mathbf{F} , představující si, že ω je reálné a souřadnice i síly jsou ve fázi. Všechny rovnice však platí beze změny i tehdy, značí-li v nich ω komplexní číslo. Pak jsou q_k (a stejně složky vektoru \mathbf{F}) obecně komplexní čísla taková, že okamžitá hodnota souřadnice je dána reálnou částí výrazu

$$q_k e^{j\omega t}.$$

Podle znaménka imaginární části ω může pak jít o kmity tlumené nebo narůstající (samobuzené).

Přístupme nyní k odvození rovnic kmitání stroje při obrábění. Závislost řezné síly na výchylce, stanovenou v kap. IV hlavního textu, lze psát ve tvaru:

$$\mathbf{F} = -r(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{f}, \quad (1,5)$$

značí-li \mathbf{e} jednotkový vektor ve směru normály k obráběnému povrchu (směru nejrychlejšího vzrůstu třísky), \mathbf{f} jednotkový vektor ve směru (přírůstku) řezné síly a r konstantu úměrnosti (závislou na velikosti odebrané třísky); při tom jak sílu, tak výchylku měříme od jejich „statické“ hodnoty. Vzájemné polohy vektorů \mathbf{e} a \mathbf{f} na jedné straně a vektorů \mathbf{e}_k na druhé straně se obecně mění s otáče-

ním stroje. Ježto však otáčení je pomalé, můžeme si myslet stroj zastavený v určité poloze (ovšem při zachování řezné síly!) a vyšetřovat ustálené kmity pro tuto polohu. Ve skutečnosti se budou kmity s otáčením stroje stále měnit, takže vlastně nikdy nebudou ustálené. Pouze v případě, kdy všechny součásti otáčející se vůči noži jsou rotačně symetrické, je další výpočet s tohoto hlediska přesný.

Mějme tedy kmitání cyklickou frekvencí ω ; pak dostaneme pro amplitudy q_k dosazením z rovnic (1,5) a (1,4) do rovnice (1,3)

$$q_i = - \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\Omega_i^2}} \cdot r(\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i) \sum (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_k) \cdot p_k \cdot q_k; \quad (1,6)$$

sčítací meze zde a v dalším vynecháváme, protože se sčítá vždy přes k od 1 do n ; podobně násobící meze ve vzorcí (2,2).

Vezměme rovinu určenou normálou k obráběnému povrchu a vektorem rychlosti nože vůči obráběnému povrchu. Vektory \mathbf{e}_k nechť svírají s touto rovinou úhly ε_k a průměty vektorů \mathbf{e}_k do této roviny nechť svírají s normálou úhly α_k (měřené kladně ve směru proti pohybu nože, viz obr. 1). Vektor \mathbf{f} buďž otočen proti normále o úhel β v témž smyslu. Pak je

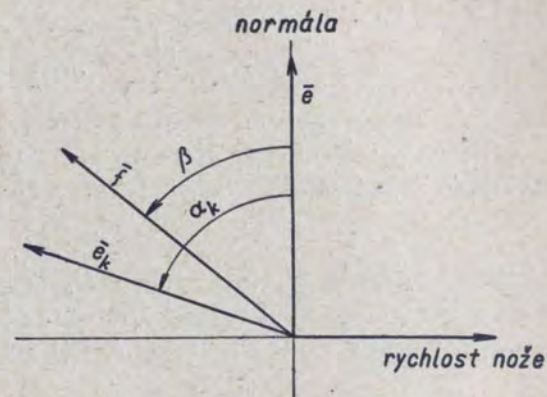
$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_k &= \cos \varepsilon_k \cos \alpha_k, \\ \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_k &= \cos \varepsilon_k \cos (\alpha_k - \beta) \end{aligned}$$

a rovnice (1,6) nabudou tvar

$$q_i \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_i^2} \right) + r \cos \varepsilon_i \cos (\alpha_i - \beta) \sum p_k \cos \varepsilon_k \cos \alpha_k q_k = 0. \quad (1,7)$$

2. Charakteristická rovnice

Podmínka, aby n homogenních rovnic (1,7) pro n neznámých q_1, \dots, q_n mělo nenulové řešení, je dána anulováním determinantu soustavy. Abychom ji upravili na jednoduchý tvar, děleme řádky determinantu hodnotami $r \cos \varepsilon_i \cos (\alpha_i - \beta)$ a sloupce hodnotami $p_k \cos \varepsilon_k \cos \alpha_k$; tím ji dostaneme ve tvaru



Obr. 1.

$$\begin{vmatrix} \frac{\Omega_1^2 - \omega^2}{rg_1} + 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{\Omega_2^2 - \omega^2}{rg_2} + 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \frac{\Omega_n^2 - \omega^2}{rg_n} + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

kde

$$g_k = \Omega_k^2 p_k \cos^2 \varepsilon_k \cos \alpha_k \cos (\alpha_k - \beta). \quad (2,1)$$

Rozvíňme tento determinant (na př. tak, že si k -tou řádku myslíme jako součet řádky tvaru $(1, 1, \dots, 1)$ a řádky tvaru $0, 0, \dots, \frac{\Omega_k^2 - \omega^2}{rg_k}, \dots, 0$ a kombinacemi vždy po jedné z těchto alternativ v každé řádce dostaneme součet 2^n determinantů, z nichž je jen $n + 1$ od nuly různých). Po vynechání faktorů nezávislých na ω^2 dostaneme podmínku

$$\Pi(\Omega_k^2 - \omega^2) \left\{ \frac{1}{r} + \sum \frac{g_k}{\Omega_k^2 - \omega^2} \right\} = 0, \quad (2,2)$$

kteřá je, jak přímo patrně, nutná a postačující pro existenci nenulového řešení i v případech, kdy některé g_k je rovno nule (a naše odvození nebylo platné) v tomto (a jen v tomto) případě je jejím jedním kořenem

$$\omega^2 = \Omega_k^2.$$

Veličiny g_k , jichž budeme spolu s Ω_k nadále používat k charakterisování stroje místo p_k , \mathbf{e}_k , mají rozměr 1/hmota. Abychom pochopili jejich názorný význam, všimněme si, že z rovnic (1,4) a (1,3) plyne pro vysoké frekvence

$$\mathbf{x} = \sum p_k \mathbf{e}_k \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_k}{1 - \frac{\omega^2}{\Omega_k^2}} \sim -\frac{1}{\omega^2} \sum p_k \mathbf{e}_k \Omega_k^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_k.$$

Jestliže zvolíme v této rovnici \mathbf{F} ve směru řezné síly a vypočteme z ní průměr vektoru \mathbf{x} do normály \mathbf{e} , dostaneme mezi ním a velikostí F vektoru \mathbf{F} vztah

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e} \sim -\frac{F}{\omega^2} \sum p_k \Omega_k^2 \cos \alpha_k \cos \varepsilon_k \cos (\alpha_k - \beta) = -\frac{F}{\omega^2} \sum g_k. \quad (2,3)$$

Na druhé straně pro vysoké frekvence platí

$$\mathbf{x} \sim -\frac{\mathbf{F}}{m\omega^2}, \quad \text{čili} \quad \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}}{\cos \beta} = -\frac{F}{m\omega^2},$$

značí-li m pohyblivou hmotu v místě nože (resp. hmotu vhodně redukovanou u složitějších systémů). Je tedy

$$\sum g_k = \frac{\cos \beta}{m}. \quad (2,4)$$

Součet $\sum mg_k$ je tedy roven absolutní konstantě nezávislé na konstrukci stroje.

Bezrozměrná čísla $\frac{mg_k}{\cos \beta}$ pak značí „váhy“, s nimiž se jednotlivé tvary účastní kmitání. Rovnice (2,3) byla odvozena z předpokladu, že pro velmi vysoké frekvence jsou síly všech pružin, působících na hmotu v místě nože, zanedbatelné proti jejím setrvačným silám. Neplatí proto v případě, kdy některou z pružin držících tuto hmotu pokládáme za nekonečně tuhou.

Vraťme se nyní k rovnici (2,2). Má-li tato rovnice všechny kořeny ω reálné různé, může stroj bez vnějšího buzení vykonávat jen kmity konstantní amplitudy. Každému komplexnímu (nebo ryze imaginárnímu) kořenu odpovídá možnost kmitů tlumených nebo narůstajících, podle znaménka imaginární části. Protože komplexní (i ryze imaginární) kořeny přicházejí v párech, znamená přítomnost nereálného kořenu vždy, že systém je s to vykonávat samobuzené kmity. První případ budeme nazývat „elasticky stabilním“ (nebo krátce „stabilním“), druhý „elasticky nestabilním“ (nebo krátce „nestabilním“). Slovo „elasticky“ má zdůrazniti, že jde jen o sklon ke stabilitě nebo nestabilitě, podmíněný (vedle hmot) elastickými konstantami stroje; o definitivní stabilitě nebo nestabilitě spolurozhodují také „neelastické“ vlivy, t. j. především tlumení. Příklad aspoň se dvěma reálnými kořeny splývajícími tvoří pak přechod mezi oběma uvedenými možnostmi („hraniční“). V rovnici (2,2) přichází ω vždy v kvadrátu ω^2 . První uvedené možnosti (všechny kořeny ω reálné) odpovídá případ, kdy všechny kořeny ω^2 jsou reálné kladné, druhé možnosti případ, kdy některé kořeny ω^2 jsou buď nereálné, nebo reálné záporné. Příklad záporného ω^2 , t. j. ryze imaginárního ω , čili narůstání výchylky do nekonečna bez kmitání („statická nestabilita“) je neobvyklý. Přitom by jeho vyšetřování zkomplikovalo úvahy. Z rovnice (2,2) je totiž patrně, že změníme-li všechna Ω_k^2 o touž konstantu (při zachování g_k a r), změní se i kořeny ω^2 o touž hodnotu, takže reálné kořeny ω^2 přejdou v reálné a komplexní v komplexní. Při vyloučení zmíněného neobvyklého případu statické nestability závisí stabilita nebo nestabilita pouze na rozdílech hodnot Ω_k^2 , tedy na př. na $n - 1$ parametrech $\Omega_2^2 - \Omega_1^2, \Omega_n^2 - \Omega_1^2$, místo na n parametrech Ω_k^2 . Budu proto nadále nazývat případ stabilní nebo nestabilní podle toho, jsou-li všechny kořeny ω^2 rovnice (2,2) reálné nebo ne; případ pouze statické nestability je tedy zahrnut mezi případy stabilní.

Rovnice (2,2), v níž si myslíme násobení provedeno, dává algebraickou rovnici, která je v ω^2 n -tého stupně, a má tedy n kořenů. Nulové body prvého faktoru rovnice (2,2) $\omega^2 = \Omega_k^2$ jsou kořeny této rovnice pouze pro $g_k = 0$. Předpokládáme-li tedy v dalších úvahách, že všechna g_k jsou od nuly různá, souhlasí kořeny $\omega^2 = z$ rovnice (2,2) s kořeny rovnice

$$\Phi(z) - \frac{1}{r} = 0, \quad (2,5)$$

kde $\Phi(z)$ značí „charakteristickou funkci“ stroje

$$\Phi(z) = \sum \frac{g_k}{z - \Omega_k^2}; \quad (2,6)$$

speciálně má tedy tato rovnice nejvýše n kořenů a (počítáme-li vícenásobné kořeny vícenásobně, právě n kořenů). Rovnici (2,5) budeme nazývat „charakteristickou rovnicí“ a budeme jí užívat v dalších úvahách.

Odvodíme si nejprve některé jednoduché podmínky postačující k tomu, aby-
chom měli případ stabilní. Budtež nejprve všechna g_k kladná. Potom v každém
z $n - 1$ intervalů $(\Omega_k^2, \Omega_{k+1}^2)$ funkce $\Phi(z) - 1/r$ probíhá spojitě od $+\infty$ do $-\infty$,
a má tam tedy aspoň jeden kořen; podobně v intervalu (Ω_n^2, ∞) probíhá spojitě
od $+\infty$ do $-\frac{1}{r}$, a má tam tedy také aspoň jeden kořen. Tím je všech n kořenů
charakteristické rovnice vyčerpáno, takže charakteristická rovnice již nemůže
mít komplexní kořeny, a máme tedy stabilní případ. Dokázali jsme tedy větu,
že jsou-li všechna g_k kladná, máme případ stabilní pro jakékoli r . Stejně můžeme
postupovat, jestliže g_1, \dots, g_i jsou záporná a g_{i+1}, \dots, g_n kladná. Pak sice nemůžeme
tvrdit, že leží kořen v intervalu (g_i, g_{i+1}) , kde $\Phi(z) - \frac{1}{r}$ probíhá spojitě od
 $-\infty$ do $-\infty$, můžeme to však tvrditi o intervalu $(-\infty, \Omega_1^2)$, kde $\Phi(z) - \frac{1}{r}$
probíhá spojitě od $-\frac{1}{r}$ do $+\infty$. Máme tedy i v tomto případě případ stabilní
pro jakékoli r .

Vezměme nyní případ, kdy existují dvě roviny kolmé k sobě navzájem i k ro-
vině vektorů \mathbf{e} , \mathbf{f} a při tom takové, že směr \mathbf{e}_k kteréhokoli normálního kmitu
leží v jedné z nich (v dalším budeme říkat stručně „stroj s kolmými rovinami
kmitů“). V tomto případě jsou znaménka jednotlivých g_k dána podle rovnice
(2,1) znaménkem jednoho z výrazů

$$\cos \alpha \cos (\alpha - \beta) \quad \sin \alpha \sin (\alpha - \beta)$$

podle toho, svírá-li rovina příslušného směru kmitu s normálou k povrchu
úhel α nebo $\alpha + \frac{1}{2}\pi$. Z toho plynou podle předchozího tyto věty: Stroj s kolmými
rovinami kmitů je stabilní pro libovolnou velikost třísky, padnou-li úhly těchto
směrů (měřeny kladně od normály obráběného povrchu ke směru řezné síly)
do intervalů

$$(\beta, \frac{1}{2}\pi) \quad (-\frac{1}{2}\pi + \beta, 0).$$

Jsou-li vlastní frekvence všech kmitů padajících do jednoho z uvedených
směrů vyšší než frekvence kmitů padajících do směru druhého (kolmého), je
systém stabilní pro libovolnou velikost třísky, padne-li úhel směru s vyššími
frekvencemi do intervalu

$$(-\frac{1}{2}\pi + \beta, \frac{1}{2}\pi).$$

3. Mezní rovnice

Obecně může u daného stroje (s daným nastavením nože) nastat případ stabilní
nebo nestabilní, podle velikosti r . Hranice mezi hodnotami r , pro které všechny
kořeny jsou reálné, a hodnotami, pro které některé kořeny jsou komplexní,
může ležet pouze v těch hodnotách r , pro které má rovnice (2,5) kořen aspoň
dvojnásobný. Frekvence příslušné těmto hodnotám r vyhovují tedy rovnici

$$\Phi'(z) = 0, \quad (3,1)$$

čili rozepsáno

$$\sum \frac{g_k}{(z - \Omega_k^2)^2} = 0; \quad (3,2)$$

tuto rovnici budeme nazývat „rovnice pro mezní frekvenci“ nebo stručně
„mezní rovnice“. Dosazením reálných kořenů z_i mezní rovnice do charakteristické
rovnice (2,5) pak určíme hodnoty

$$r_i = + \frac{1}{\Phi(z_i)} \quad (3,3)$$

té vlastnosti, že pouze pro tyto hodnoty z může nastat přechod mezi stabilitou
(ovšem nemusí nastat, může se v nich na př. jen změnit počet párů komplexních
kořenů charakteristické rovnice).

Pro $r \rightarrow 0$ blíží se n kořenů rovnice (2,5) reálným různým hodnotám Ω_k^2 . Pro
malá r máme tedy vždy případ stabilní. Proto nás zajímá nejvíce nejmenší
hodnota r , pro kterou nastane případ nestabilní („mezní r “). Tou může být podle
předěšlého jen některá z hodnot r_i , daných rovnicí (3,3). Vezměme tedy nejmenší
z těch r_i , která jsou kladná, a označme je r_m . Budiž hodnota z_m mu odpovídající
jednoduchým kořenem rovnice (3,1), takže $\Phi'(z_m) \neq 0$. Pak dává Taylorův
rozvoj rovnice (2,5) v okolí bodu $z = z_m$, ježto $\Phi(z_m) = \frac{1}{r_m}$, $\Phi'(z_m) = 0$,

$$-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_m} + \frac{1}{2}(z - z_m)^2 \Phi''(z_m) + \dots = 0. \quad (3,4)$$

Protože pro $r < r_m$ nemá rovnice (2,5) komplexní kořeny, plyne z rovnice
(3,4), že

$$\Phi''(z_m) > 0 \quad (3,5)$$

a že tedy pro r o něco větší než r_m rovnice má komplexní kořeny, takže pak
máme skutečně případ elasticky nestabilní.

Dokázali jsme tedy větu, že mezní r_m je dáno nejmenším z těch čísel $r_i =$
 $\frac{1}{\Phi(z_i)}$, která jsou kladná, přitom z_i značí reálné kořeny rovnice $\Phi'(z) = 0$.

Z důkazu vyloučený případ $\Phi''(z_m) = 0$ nemůže nastat. V tom případě by totiž
nejnižší člen v rozvoji (3,4) byl

$$\frac{1}{k!} (z - z_m)^k \Phi^{(k)}(z_m), \quad k \geq 3!$$

a kořeny rovnice (3,4) by byly pro r blízké $k r_m$ rozloženy jako k -té odmocniny z reálného čísla, a byl by mezi nimi tedy vždy aspoň jeden komplexní nebo ryze imaginární.

Úplný rozbor by vyžadoval určit pro každé r všechna pásma stability, v dalším se však spokojíme vyšetřováním hodnot r_m .

4. Sestrojení diagramu pro tři stupně volnosti

Ježto případ dvou stupňů volnosti je podrobně vyšetřen v hlavní stati knihy, použijeme nyní výsledků odvozených v předcházejícím oddílu k rozboru případu se třemi stupni volnosti. Rovnice

$$\Phi(z) = \frac{1}{r},$$

$$\Phi'(z) = 0$$

lze v tomto případě zavedením bezrozměrných parametrů

$$\mu = \frac{\Omega_3^2 - \Omega_1^2}{\Omega_3^2 - \Omega_2^2}, \quad (4,1)$$

$$\psi_1 = \frac{g_1}{g_1 + g_2 + g_3}, \quad (4,2)$$

$$\psi_3 = \frac{g_3}{g_1 + g_2 + g_3}, \quad (4,3)$$

$$s = \frac{r(g_1 + g_2 + g_3)}{\Omega_3^2 - \Omega_1^2}, \quad (4,4)$$

$$v = \frac{z - \Omega_1^2}{\Omega_3^2 - \Omega_1^2}, \quad (4,5)$$

převést na tvar

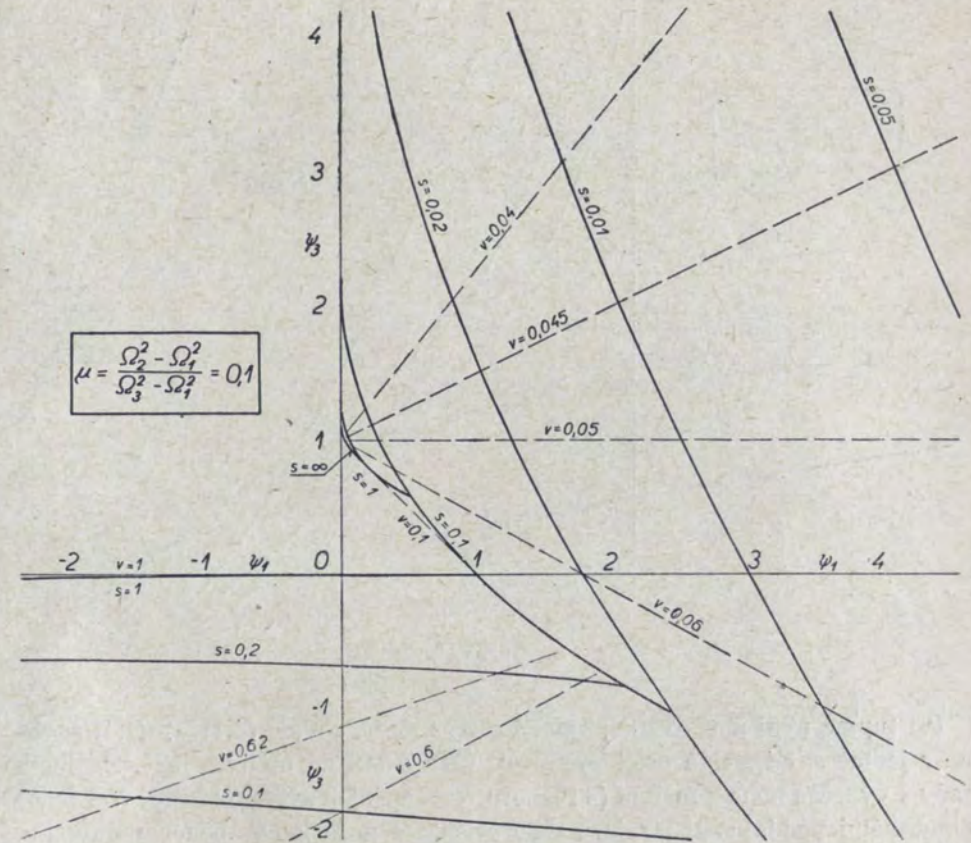
$$\frac{\psi_1}{v} + \frac{1 - \psi_1 - \psi_3}{v - \mu} + \frac{\psi_3}{v - 1} = \frac{1}{s},$$

$$\frac{\psi_1}{v^2} + \frac{1 - \psi_1 - \psi_3}{(v - \mu)^2} + \frac{\psi_3}{(v - 1)^2} = 0. \quad (4,6)$$

Myslíme-li si z těchto rovnic eliminováno v , dostáváme závislost mezi čtyřmi veličinami μ, ψ_1, ψ_3, s . Abychom tuto závislost graficky znázornili, zvolíme si řadu hodnot jedné veličiny ($\mu = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7, 0,9$), pro každou z těchto hodnot vezmeme zvláštní list, další dvě veličiny (ψ_1, ψ_3) vezmeme v něm za osy souřadné a nakreslíme vrstevnice spojující stejné hodnoty poslední veličiny (s).

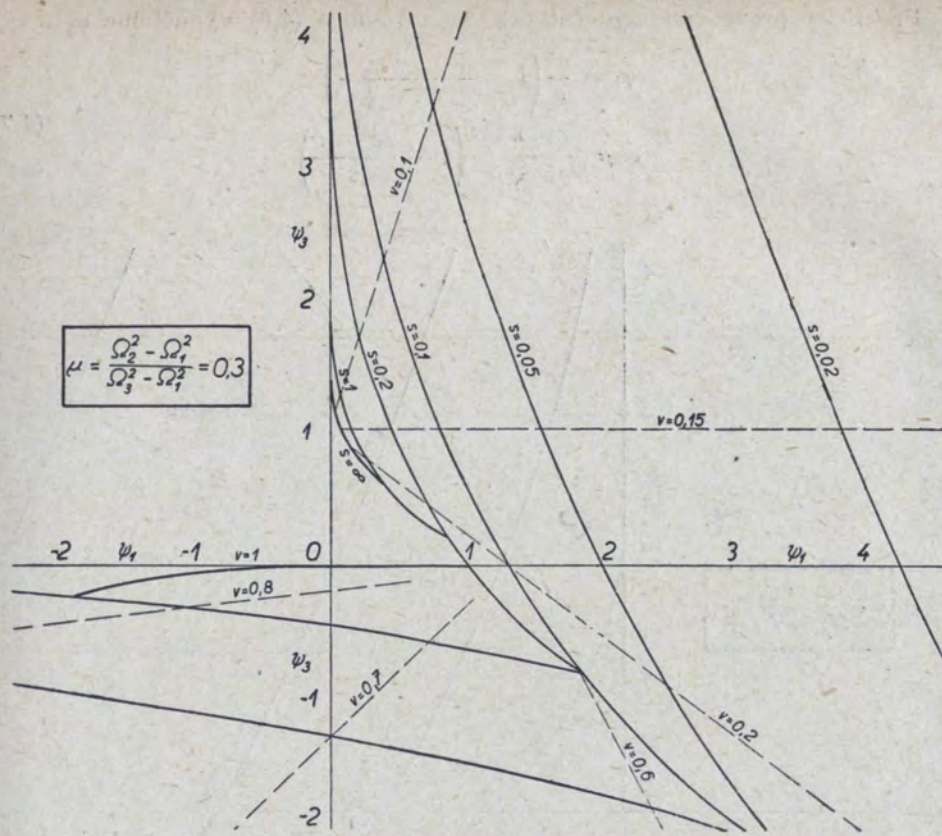
Prakticky provedeme výpočet tak, že z rovnice (4,6) vypočteme ψ_1 a ψ_3 :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{v^2}{\mu} \left(1 - \frac{2v - 1 - \mu}{s} \right), \\ \psi_3 &= \frac{(1 - v)^2}{1 - \mu} \left(1 - \frac{2v - \mu}{s} \right). \end{aligned} \quad (4,7)$$



Obr. 2.

Volíce v těchto rovnicích pevné μ a s , dostaneme parametrické vyjádření vrstevnice pomocí parametru v . Tak byly vypočteny diagramy obr. 2 až 6. Tam, kde prochází jedním bodem několik vrstevnic, byla nakreslena jen vrstevnice s nejmenším s , protože ta odpovídá podle rovnice (4,4) nejmenší hodnotě r , a tedy meznímu r_m . Na diagramech byly současně spojeny čerchanými čarami body odpovídající téměř v , aby bylo možno z diagramů určit, jakou frekvenci se stroj rozkmitá při překročení mezního r . Případů o dvou stupních volnosti odpovídají v diagramech jednak osy ($\psi_1 = 0$ a $\psi_3 = 0$), jednak přímka $1 - \psi_1 - \psi_3 = 0$.



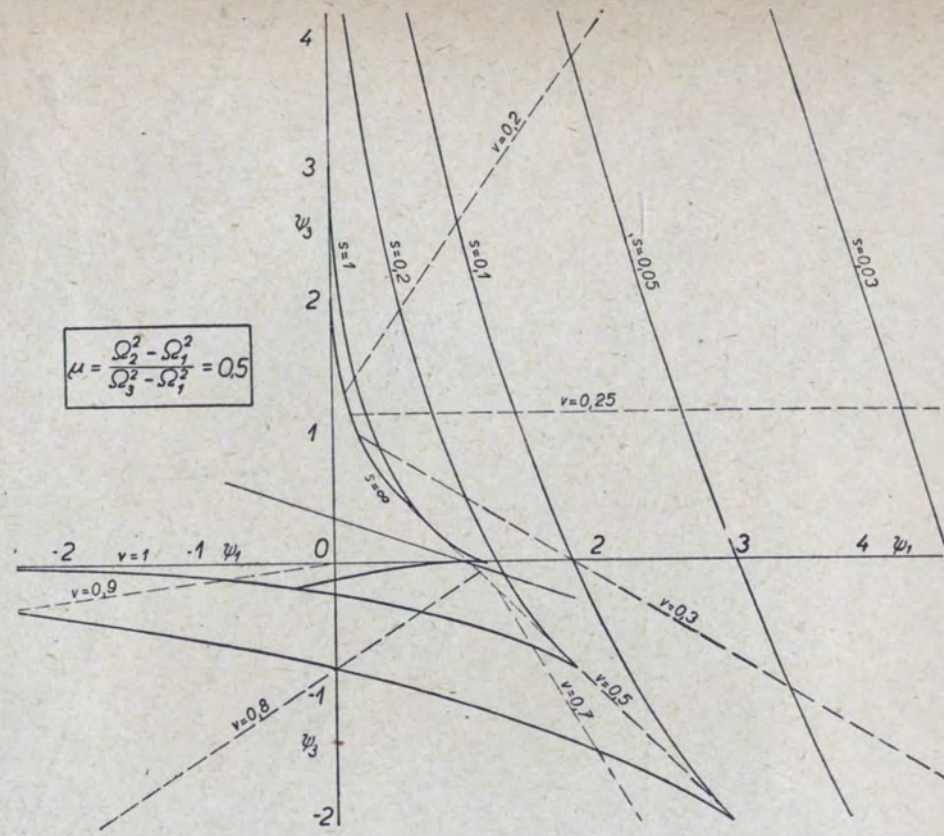
Obr. 3.

Přístupme nyní k užití diagramů. Protože podle rovnic (4,1) ÷ (4,4) závisí na r jedině s , odpovídá určitému stroji určitý bod na určitém listě. Známe-li tedy z výpočtu nebo z měření (z rozboru rezonančních křivek) vlastní frekvence a normální poddajnosti stroje a dále orientace nože k obráběnému povrchu, můžeme z rovnic (2,1) a (4,1) — (4,3) tento bod určit. Z parametru s vrstevnice tímto bodem procházející můžeme pak určit podle rovnice (4,4) mezní r :

$$r_m = s \frac{\Omega_3^2 - \Omega_1^2}{g_1 + g_2 + g_3} \quad (4,8)$$

Z chodu sousedních vrstevnic pak vidíme, jakým směrem se máme snažit změnit konstanty stroje, abychom r_m zvětšili.

Uvažujme nyní stroj stále též až na to, že kmitavý systém natáčíme do různých poloh kolem osy kolmé k rovině určené normálou k obráběnému povrchu a směrem řezné síly (vektory \mathbf{e} a \mathbf{f}). Ve výrazech (2,1) pro g_k se to projeví tím,



Obr. 4.

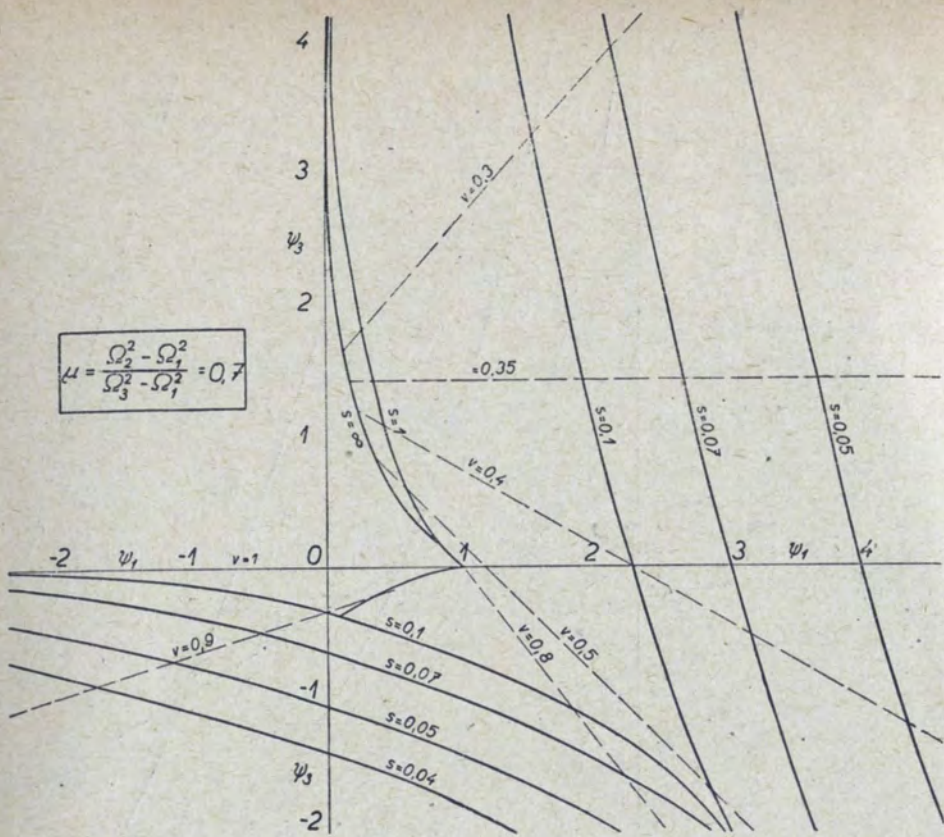
že všechna α_k se zvětšují o touž hodnotu α ; při tom Σg_k podle rovnice (2,4) zůstává stále (s výjimkou u této rovnice uvedené). Pak má ψ_1 a ψ_3 podle rovnic (4,2) a (4,3) v závislosti na α tvar

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A \cos 2\alpha + B \sin 2\alpha + C, \\ \psi_3 &= D \cos 2\alpha + E \sin 2\alpha + F \end{aligned}$$

a opisuje tedy elipsu. Abychom tufo elipsu do diagramu nakreslili, vypočteme si souřadnice jejího středu, které odpovídají středním hodnotám g_1 a g_3 vzhledem k α , t. j. podle vzorce (2,1)

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1 &= p_1 \Omega_1^2 \frac{\cos \beta}{2}, \\ \tilde{g}_3 &= p_3 \Omega_3^2 \frac{\cos \beta}{2}, \end{aligned}$$

a dále koncové body dvou sdružených poloměrů, které plynou z hodnot (2,1),



Obr. 5.

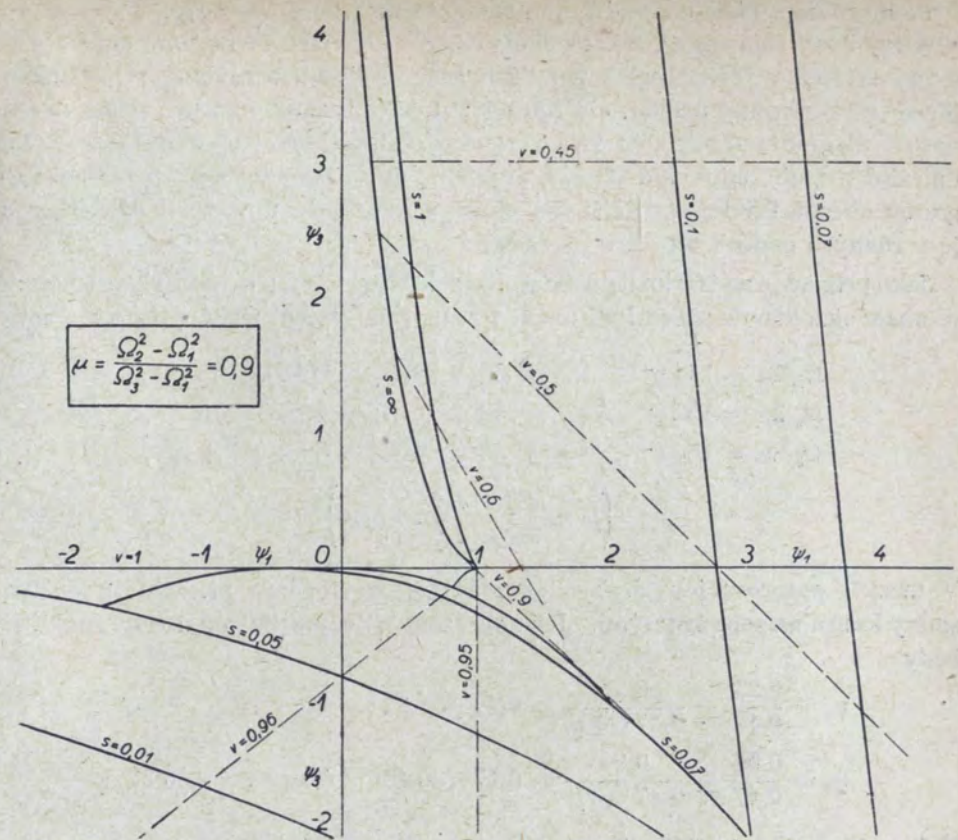
kde úhly α_k jsou zvětšeny jednak o α , jednak o $\alpha - \frac{1}{4}\pi$ (α je libovolné). Máme tedy pro souřadnice středu elipsy

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\psi}_1 &= \frac{p_1 \Omega_1^2}{\Sigma}, \\ \tilde{\psi}_3 &= \frac{p_3 \Omega_3^2}{\Sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (4,9)$$

$$\Sigma = p_1 \Omega_1^2 + p_2 \Omega_2^2 + p_3 \Omega_3^2 \quad (4,10)$$

a pro koncové body sdružených poloměrů

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 - \tilde{\psi}_1 &= \frac{p_1 \Omega_1^2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha - \beta)}{\cos \beta \Sigma}, \\ \psi_3 - \tilde{\psi}_3 &= \frac{p_3 \Omega_3^2 \cos(2\alpha_3 + 2\alpha - \beta)}{\cos \beta \Sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (4,11)$$



Obr. 6.

a

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 - \tilde{\psi}_1 &= \frac{p_1 \Omega_1^2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha - \beta)}{\cos \beta \Sigma}, \\ \psi_3 - \tilde{\psi}_3 &= \frac{p_3 \Omega_3^2 \sin(2\alpha_3 + 2\alpha - \beta)}{\cos \beta \Sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (4,12)$$

Přímo koncové body poloos dostaneme, zvolíme-li ve vzorcích (4,11) a (4,12) α (jež jinak může být libovolné) ze vztahu

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{p_1^2 \Omega_1^4 \sin(4\alpha_1 - 2\beta) + p_3^2 \Omega_3^4 \sin(4\alpha_3 - 2\beta)}{p_1^2 \Omega_1^4 \cos(4\alpha_1 - 2\beta) + p_3^2 \Omega_3^4 \cos(4\alpha_3 - 2\beta)} \quad (4,13)$$

Ve zvláštním případě s kolmými rovinami kmitů redukuje se tato elipsa na úsečku, jejíž koncové body dostaneme na př. z rovnic (4,11) pro

$$\alpha = -\alpha_1 + \frac{\beta}{2} \quad \text{a} \quad \alpha = -\alpha_1 + \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Podle rovnice (4,4) nebo (4,8) je konstanta úměrnosti mezi r_m a s stejná pro všechny body naší elipsy, takže poloha elipsy vůči vrstevnicím nám dává obraz o velikosti r_m v jednotlivých polohách nože. Nejde-li o rovinný případ nebo jde-li sice o rovinný případ, ale Σg_k není stálé (to nastane na př., použijeme-li našeho diagramu pro systém o více stupních volnosti než tři a zanedbáme málo důležité stupně), odpovídá stroji s proměnným nastavením nože v našem diagramu obecně křivka složitější než elipsa a konstanta úměrnosti mezi r_m a s je v různých bodech této křivky různá.

Jako příklad je na třetím listě diagramu zakreslen stroj, u něhož byly (rozbořením resonančních křivek při rozkmitávání v různých směrech) zjištěny tyto hodnoty

$$\Omega_1/2\pi = 144 \text{ s}^{-1}, \quad \alpha_1 = 50^\circ, \quad p_1\Omega_1^2 = 0,23 \text{ kg}^{-1}\text{m s}^{-2},$$

$$\Omega_2/2\pi = 152 \text{ s}^{-1}, \quad \alpha_2 = 130^\circ, \quad p_2\Omega_2^2 = 0,16 \quad ,, \quad ,$$

$$\Omega_3/2\pi = 160 \text{ s}^{-1}, \quad \alpha_3 = 140^\circ, \quad p_3\Omega_3^2 = 0,08 \quad ,, \quad ,$$

$$\left(\mu = \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{\Omega_3^2 - \Omega_1^2} = 0,49 \right).$$

V mezích pozorovacích chyb odpovídá stroj rovinnému případu se dvěma směry kmitů na sebe kolmými. Jeho obrazem je tedy přibližně úsečka spojující body

$$\psi_1 = \frac{0,23}{0,47} \pm \frac{0,23}{0,47 \cos \beta} = 0,49 \pm 1,32,$$

$$\psi_3 = \frac{0,08}{0,47} \pm \frac{0,08}{0,47 \cos \beta} = 0,17 \mp 0,46 \quad (\text{pro } \cos \beta = 0,37).$$

Nejmenší s nastává podle diagramu pro $\alpha = 150^\circ$ a je rovno

$$s = 0,11;$$

příslušné mezní r je pak

$$r_m = 0,11 \frac{160^2 - 140^2}{0,47 \cdot 0,37} 4\pi^2 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ kg/m} = 120 \text{ kg/mm}.$$

5. Tyč vetknutá do hmotného rámu

Propočteme nyní případ tyče kruhového průřezu tuhosti k , nesoucí na konci nůž hmoty m a vetknutě do hmoty M , uložené na rámu, který má v jednom směru tuhost nekonečnou a ve směru na něj kolmém tuhost K (viz obr. 7).

Jde tedy o systém o třech stupních volnosti, jehož chování je možno vyšetřit pomocí diagramů popsaných v oddílu 4. Přímé zpracování má však tu výhodu, že nám ukáže chování stroje v závislosti na konstantách k, K, m, M jeho prvků. Vypočteme nejprve vlastní frekvence a částečné poddajnosti systému. Budíme-li

systém na konci v rovině, v níž má rám tuhost K , sinusově proměnnou silou o amplitudě F a cyklické frekvenci ω a označíme-li amplitudy hmot m a M písmenami x a X , máme

$$KX - M\omega^2 X + k(X - x) = 0,$$

$$-m\omega^2 x + k(x - X) = F;$$

odtud

$$\begin{aligned} \frac{x}{F} &= \frac{K + k - M\omega^2}{(k - m\omega^2)(K + k - M\omega^2) - k^2} = \frac{K + k - M\omega^2}{mM(\omega^2 - \Omega_1^2)(\omega^2 - \Omega_3^2)} = \\ &= -\frac{1}{\omega^2 - \Omega_1^2} \frac{K + k - M\Omega_1^2}{mM(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)} + \\ &+ \frac{1}{\omega^2 - \Omega_3^2} \frac{K + k - M\Omega_3^2}{mM(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)}, \end{aligned}$$

kde $\Omega_{1,3}^2$ značí kořeny jmenovatele:

$$(K + k - M\Omega^2)(k - m\Omega^2) - k^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} \Omega^4 - \Omega^2 \left(\frac{K + k}{M} + \frac{k}{m} \right) + \\ + \frac{kK}{mM} = 0, \end{aligned}$$

$$\Omega_{1,3}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{K}{M} + \frac{k}{M} + \frac{k}{m} \right) \mp$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{K}{M} - \frac{k}{m} \right)^2 + 2 \frac{k}{M} \left(\frac{K}{M} + \frac{k}{m} \right) + \frac{k^2}{M^2}}.$$

Srovnáním s rovnicemi (1,4) a (1,3) plyne

$$p_1 = \frac{1}{\Omega_1^2} \frac{K + k - M\Omega_1^2}{mM(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)}, \quad p_3 = -\frac{1}{\Omega_3^2} \frac{K + k - M\Omega_3^2}{mM(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)}. \quad (5,1)$$

V rovině, v níž tuhost rámu je nekonečná, máme

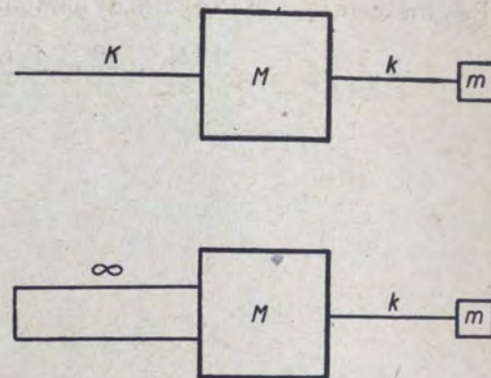
$$\Omega_2^2 = \frac{k}{m}, \quad p_2 = \frac{1}{k}. \quad (5,2)$$

Dále máme

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0,$$

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha,$$

$$\alpha_2 = \alpha + \frac{\pi}{2}.$$



Obr. 7.

Zavedme označení

$$\delta = \frac{\Omega_3^2 - \Omega_1^2}{\frac{k}{m}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{K}{M} - \frac{k}{m}\right)^2 + 2\frac{k}{M}\left(\frac{K}{M} + \frac{k}{m}\right) + \frac{k^2}{M^2}}}{\frac{k}{m}}, \quad (5,3)$$

$$\mu = \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{\Omega_3^2 - \Omega_1^2} = \frac{-\frac{K}{M} + \frac{k}{m} - \frac{k}{M} + \delta}{2\delta},$$

$$v = \frac{z - \Omega_1^2}{\Omega_3^2 - \Omega_1^2}.$$

Pak můžeme výrazy (5,1) a (5,2) upravit

$$p_1 = \frac{1}{\Omega_1^2} \frac{1}{\Omega_3^2 - \Omega_1^2} \frac{1}{m} \left(\frac{K}{M} + \frac{k}{M} - \frac{1}{2} \frac{K}{M} - \frac{1}{2} \frac{k}{M} - \frac{1}{2} \frac{k}{m} + \frac{1}{2} \frac{k}{m} \delta \right) =$$

$$= \frac{1}{m\Omega_1^2} (1 - \mu),$$

$$p_2 = \frac{1}{m\Omega_2^2},$$

$$p_3 = \frac{1}{m\Omega_3^2} \mu,$$

takže

$$g_1 = \frac{1 - \mu}{2m} \{ \cos \beta + \cos (2\alpha - \beta) \},$$

$$g_2 = \frac{1}{2m} \{ \cos \beta - \cos (2\alpha - \beta) \}, \quad (5,4)$$

$$g_3 = \frac{\mu}{2m} \{ \cos \beta + \cos (2\alpha - \beta) \}.$$

Dosadíme-li hodnoty (5,4) do výrazů (3,2) a (2,6), dostaneme po malé úpravě pro mezní rovnici

$$v^2(1 - v)^2 \{ \cos (2\alpha - \beta) - \cos \beta \} - (v - \mu)^2 \{ (1 - v)^2 - \mu(1 - 2v) \} \{ \cos (2\alpha - \beta) + \cos \beta \} = 0 \quad (5,5)$$

a pro charakteristickou rovnici

$$\frac{k}{r} = -\frac{1}{2\delta} \frac{\mu(1 - \mu) \{ \cos (2\alpha - \beta) + \cos \beta \} - 2v(1 - v) \cos \beta}{v(1 - v)(v - \mu)} \quad (5,6)$$

Abychom nemusili později přerušovat výklad, vyšetříme nejprve „výjimečné“ body, kde se stává rovnou nule současně s levou stranou rovnice (5,5) i její derivace (čili v podstatě vícenásobné kořeny mezní rovnice). Derivováním rovnice (5,5) podle v plyne

$$2v(1 - v)(1 - 2v) \{ \cos (2\alpha - \beta) - \cos \beta \} -$$

$$- 2(v - \mu) \{ (1 - v)^2 - \mu(1 - 2v) + (v - \mu)(-1 + v + \mu) \} \{ \cos (2\alpha - \beta) + \cos \beta \} = 0$$

a vyloučením poměru

$$\{ \cos (2\alpha - \beta) - \cos \beta \} : \{ \cos (2\alpha - \beta) + \cos \beta \}$$

z této rovnice a rovnice (5,5) dostaneme po vynechání faktoru

$$2v(1 - v)(v - \mu) :$$

$$(1 - 2v)(v - \mu) \{ (1 - v)^2 - \mu(1 - 2v) \} -$$

$$- v(1 - v) \{ (1 - v)^2 - \mu(1 - 2v) + (v - \mu)(-1 + v + \mu) \} = 0$$

a po zavedení nové neznámé

$$w = v - \frac{1}{2} :$$

$$- 2w(w + \frac{1}{2} - \mu) \{ w^2 + w(2\mu - 1) + \frac{1}{4} \} +$$

$$+ (w^2 - \frac{1}{4}) \{ w^2 + w(2\mu - 1) + \frac{1}{4} + w^2 - (\mu - \frac{1}{2})^2 \} = 0,$$

$$3w^2\mu(1 - \mu) + \frac{1}{4}\mu(1 - \mu) = 0.$$

Tato rovnice nemá reálných kořenů. Jedinými body mezní křivky, ve kterých se derivace levé strany výrazu (5,5) může stát nulou, jsou tedy nulové body vynechaného faktoru, t. j.

$$v = \mu,$$

$$v = 0, \quad v = 1.$$

Jim odpovídají podle rovnice (5,5) hodnoty

$$\cos (2\alpha - \beta) = \cos \beta,$$

resp.

$$\cos (2\alpha - \beta) = -\cos \beta,$$

čili podle obecné věty na konci 2. oddílu body na hranici oboru, kde mezní r přestává existovat (systém se stává stabilním pro všechna r). Všude jinde jsou kořeny mezní rovnice jednoduché; speciálně tedy je v nich $\frac{d\alpha}{dv} \neq 0$.

Přikročme nyní k výpočtu kořenů v_i mezní rovnice (5,5). Zavedme především označení

$$\cos \beta' = \frac{\cos \beta}{\cos (2\alpha - \beta)}; \quad (5,7)$$

v případech $2\alpha - \beta = 0$ a $2\alpha - \beta = \pi$, které nás budou nejvíce zajímat, je $\beta' = \beta$, resp. $\beta' = \pi - \beta$, jinak je $\beta' < \beta$, resp. $\beta' > \pi - \beta$; o případech, kdy vychází $|\cos \beta'| > 1$, víme z obecných vět 2. oddílu, že pro ně mezní r neexistuje (je nekonečné). S označením (5,7) lze mezní rovnici (5,5) psát

$$v^2(1 - v)^2(1 - \cos \beta') - (v - \mu)^2 \{ (1 - v)^2 - \mu(1 - 2v) \} (1 + \cos \beta') = 0. \quad (5,8)$$

Pro $\mu = 0$ jsou jediné kořeny této rovnice $v = 0$, $v = 1$. Pro malá μ leží tedy kořeny v okolí těchto hodnot. Píšeme-li rovnici (5,8) ve tvaru

$$\frac{v}{v-\mu} \operatorname{tg} \frac{\beta'}{2} = \pm \sqrt{1 - \mu \frac{1-2v}{(1-v)^2}}, \quad (5,9)$$

vidíme, že kořeny $v_{1,2}$ ležící v okolí bodu $v = 0$ jsou pro malá μ asymptoticky rovny:

$$v_{1,2} \sim \mu \frac{1}{1 \mp \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta'}. \quad (5,10)$$

Píšeme-li rovnici (5,8) ve tvaru

$$(1-v) \sqrt{\left(\frac{v}{v-\mu}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \beta' - 1} = \pm \sqrt{\mu} \sqrt{1 - 2(1-v)}, \quad (5,11)$$

vidíme podobně, že kořeny ležící v okolí bodu $v = 1$ jsou (pro malá μ) asymptoticky rovny

$$1 - v_{3,4} \sim \pm \sqrt{\mu} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \beta' - 1}}, \quad (5,12)$$

reálné pro $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta' > 1$ a komplexní pro $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta' < 1$.

Zaměníme-li v rovnici (5,5) μ za $1 - \mu$ a současně v za $1 - v$, rovnice se nezmění, ježto

$$(1-v)^2 - \mu(1-2v) = v^2 - [1 - 2(1-v)](1-\mu).$$

Dostaneme tedy asymptotické chování kořenů mezní rovnice v okolí hodnoty $\mu = 1$ z rovnic (5,10) a (5,12) s uvedenou záměnou. Srovnáme-li asymptotický průběh kořenů pro malá μ a μ blízká k 1 a použijeme-li dokázané věty, že pro $0 < \mu < 1$

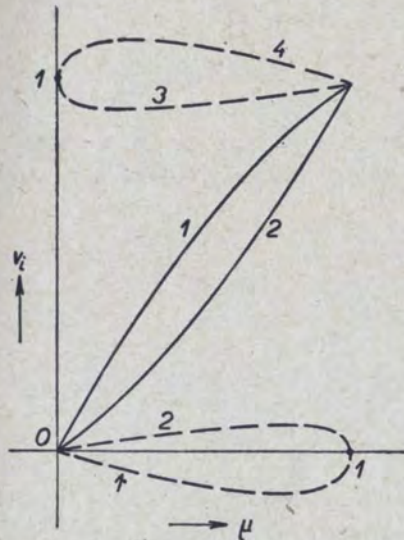
a $\cos \beta'$ různé od ± 1 nemá rovnice (5,5) vícenásobných kořenů, dostaneme průběh jednotlivých $v_i(\mu)$, znázorněný schematicky na obr. 8; plně vytažené čáry značí kořeny pro $\cos \beta' > 0$, čerchané vytažené pro $\cos \beta' < 0$. Pro

$$\cos(2\alpha - \beta) = \cos \beta \quad (\cos \beta' = 1)$$

plně křivky 1 a 2 splynou s přímkou $v = \mu$; pro

$$\cos(2\alpha - \beta) = -\cos \beta \quad (\cos \beta' = -1)$$

čerchané křivky 1 a 2 splynou s přímkou $v = 0$ a čerchané křivky 3 a 4 s přímkou $v = 1$. Pro jiné hodnoty α podle rovnice (5,5) nemůže stát v_i rovno ani 0 ani 1,



Obr. 8.

ani μ , takže na každé z křivek v_i má jmenovatel pravé strany (5,6) $v(1-v)$ ($v - \mu$) stále totéž znaménko.

Dosadíme-li asymptotické výrazy (5,10) a (5,12) do výrazu (5,6) pro $\frac{k}{r}$, dostaneme pro příslušná r_i asymptoticky v okolí bodu $\mu = 0$

$$\begin{aligned} \frac{k}{r_{1,2}} &\sim -\frac{\cos(2\alpha - \beta)}{2\delta\mu} \frac{1 + \cos \beta' + \frac{2 \cos \beta'}{1 \mp \operatorname{tg} \beta'/2}}{\pm \operatorname{tg} \beta'/2} = \\ &= -\frac{\cos(2\alpha - \beta)}{2\delta\mu} (1 \mp \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta') \frac{1 - \cos \beta' \mp (1 - \cos \beta') \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta'}{\pm \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta'} = \\ &= \frac{\cos(2\alpha - \beta)}{\delta\mu} (\sin \frac{1}{2} \beta' \mp \cos \frac{1}{2} \beta')^2, \end{aligned} \quad (5,13)$$

resp. (pro $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta' > 1$)

$$\frac{k}{r_{3,4}} \sim -\frac{1}{2\delta} \frac{\mu \{\cos(2\alpha - \beta) + \cos \beta\} \mp \frac{2\sqrt{\mu} \cos \beta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta'/2 - 1}}}{\pm \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta'/2 - 1}}} \sim \pm \frac{\cos \beta}{\delta}. \quad (5,14)$$

Zaměníme-li na pravé straně rovnice (5,6) μ za $1 - \mu$ a současně v za $1 - v$, změní se pouze znaménko. Ze souvislosti mezi chováním jednotlivých v_i v okolí bodů $\mu = 0$ a $\mu = 1$, jak je schematicky naznačena na obr. 8, dostaneme tedy analogické vztahy mezi jednotlivými r_i :

pro $\cos \beta' > 0$

$$r_1(1-\mu) = -r_2(\mu); \quad (5,15)$$

pro $\cos \beta' < 0$

$$r_1(1-\mu) = -r_4(\mu), \quad (5,16)$$

$$r_2(1-\mu) = -r_3(\mu).$$

Z rovnic (5,13) až (5,16) plynou vztahy pro asymptotické chování jednotlivých $r_i(\mu)$ a okolí bodu $\mu = 1$.

V případě $\cos(2\alpha - \beta) > 0$, ($\cos \beta' > 0$) existují pouze dva reálné kořeny v_i a dvě hodnoty $r_{1,2}$ jim odpovídající. Z výrazu (5,13) je patrné, že pro malá μ $\frac{1}{r_2} >$

$\frac{1}{r_1} > 0$, takže

$$r_m = r_2 \quad (5,17)$$

Pro μ blízké k 1 je podle vzorců (5,15) a (5,13) r_1 i r_2 záporné, takže

$$r_m = \infty.$$

Ježto je stále $\frac{1}{r_2}$ značně větší než $\frac{1}{r_1}$, je snadné numericky se přesvědčit, že r_m je i pro μ vzdálenější od 0 a 1 rovno buď r_2 , nebo ∞ . V případě $\cos(2\alpha - \beta) < 0$ ($\cos \beta' < 0$) je pro malá μ podle vzorců (5,13) a (5,14) kladné pouze r_3 , takže pro malá μ

$$r_m = r_3. \quad (5,18)$$

Podle vzorců (5,16) a (5,13) platí rovnice (5,18) i v okolí bodu $\mu = 1$, protože výrazy (5,13) jsou co do prosté hodnoty (značně) větší než (5,14); a numericky lze se i zde snadno přesvědčit, že rovnice (5,18) platí obecně.

Přistoupíme nyní k vyšetření mezní křivky (závislosti r_m na α). Parciální derivace pravé strany rovnice (5,6) podle v je na mezní křivce rovna nule, jak se snadno přesvědčíme (a jak plyne ostatně z toho, že tato pravá strana je rovna až na konstantní faktor $\Phi(z_i)$ a na mezní křivce $\Phi'(z_i) = 0$); při tom je na mezní křivce (kromě konce) $\frac{d\alpha}{dv} \neq 0$. Je tedy na mezní křivce

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{k}{r_i} \right) = - \frac{\mu(1-\mu)}{2\delta} \frac{1}{v_i(1-v_i)(v_i-\mu)} \frac{d}{d\alpha} \{ \cos(2\alpha - \beta) \}.$$

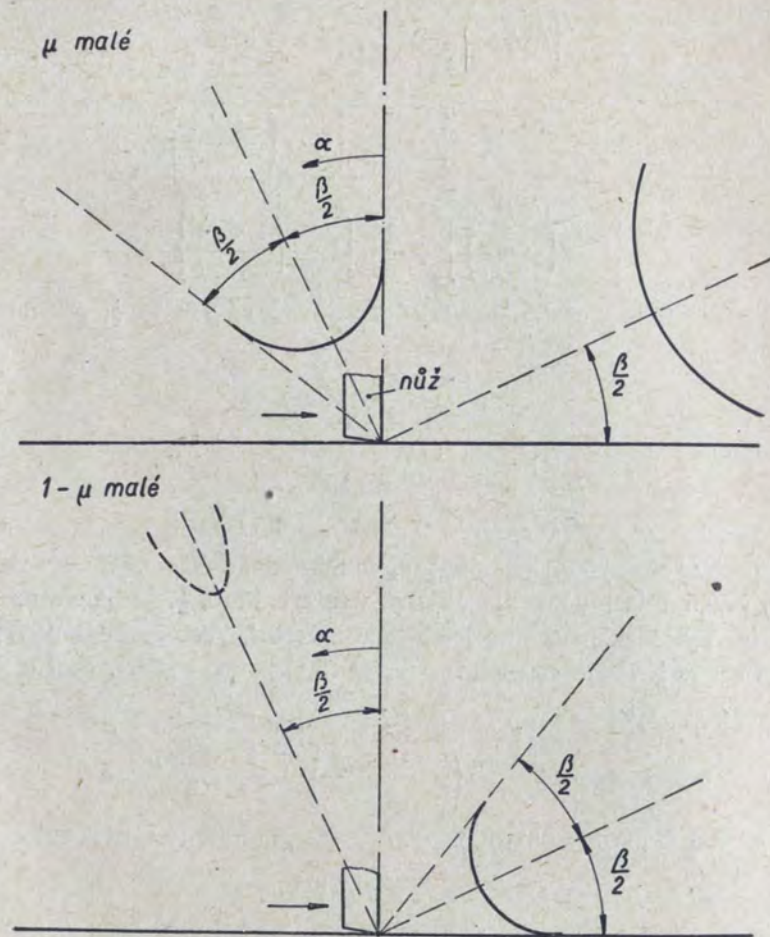
Na křivce r_2 je podle poznámky k obr. 8 $v_2(1-v_2)(v_2-\mu) < 0$, takže r_2 , a tedy r_m s $\cos(2\alpha - \beta)$ klesajícím od 1 do $\cos \beta$ stále roste. Na křivce r_3 je $v_3(1-v_3)(v_3-\mu) > 0$, takže v_3 , a tedy r_m s $\cos(2\alpha - \beta)$ rostoucím od -1 do $-\cos \beta$ také roste. Má tedy r_m v závislosti na α schematicky průběh podle obr. 9. Je-li μ velmi blízké jedničce ($\mu > 0,85$), zmizí úplně část mezní křivky na obr. 9 čerchaně naznačená.

Srovnajme nyní vypočtený průběh mezní křivky s průběhem, který bychom dostali, kdybychom systém idealisovali na systém o dvou stupních volnosti. Protože rám s tyčí uvažovaný jako celek má menší tuhost ve směru α , máme dostat podle theorie o dvou stupních volnosti nejmenší r_m pro úhel $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ a nekonečné r_m v okolí úhlu $\alpha = -(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\beta)$. Tato předpověď souhlasí aspoň hrubě s obr. 9 pro malá μ (t. j. podle rovnice (5,3) v případě, že vlastní frekvence $\sqrt{\frac{K}{M}}$ rámu leží nad vlastní frekvencí $\sqrt{\frac{k}{m}}$ tyče), ale liší se od něho diametrálně pro μ blízké jedničce.

Chceme-li průběh mezní křivky „vysvětlit“ pomocí theorie o dvou stupních volnosti, musíme uvažovat takto: Ve směru daném úhlem α máme dvě vlastní frekvence, jednu menší a jednu větší než vlastní frekvence ve směru na něj kolmém. Uvažujeme-li jen první z nich (menší) a kombinujeme ji s frekvencí ve směru kolmém, dostáváme konečné r_m v okolí směru $\alpha = \frac{1}{2}\beta$, uvažujeme-li druhou z nich (větší), dostaneme konečné r_m v okolí směru $\alpha = -(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\beta)$. Přitom menší r_m dostáváme (podle theorie pro dva stupně volnosti) pro tu kombinaci, při níž jsou obě kombinované frekvence bližší. Takto použitá theorie o dvou

stupních volnosti dává tedy v našem případě výsledky shodující se aspoň hrubě s úplnou theorií. V následující kapitole bude tento postup zobecněn a zpřesněn.

Systém, kterým se zabýváme (tyč na hmotném rámu), odpovídá vodorovně vyvrtávačce. Úhel α v tomto případě probíhá při otáčení nože všechny mož



Obr. 9.

hodnoty, takže k rozkmitání stroje stačí, je-li nestabilní pro některé α . Je tedy mezní r u horizontky dáno minimem r_m vzhledem k α . Podle předešlého víme, že toto minimum dostaneme, dosadíme-li do vzorce (5,6) pro mezní r buď $\cos(2\alpha - \beta) = 1$ a $v = v_2$, nebo $\cos(2\alpha - \beta) = -1$ a $v = v_3$; první alternativy dává menší hodnotu pro r , a tedy skutečné r_m pro malá μ , druhá pro μ blízká k 1. Potřebujeme tedy k výpočtu r_m znát jednak v_2 pro $\cos(2\alpha - \beta) = 1$ a pro hodnoty

μ od nuly až k jisté hodnotě μ_0 (blízké $\frac{1}{2}$), jednak v_3 pro $\cos(2\alpha - \beta) = -1$ a pro hodnoty μ od μ_0 do 1; to podle vzorců (5,16) opět vede na znalost v_2 pro μ od 0 do $1 - \mu_0$.

Abychom vypočetli v_2 v intervalu $(0, \frac{1}{2})$ s přesností větší, než dává asymptotický výraz (5,10), použijeme rovnice (5,9), v níž položíme

$$\sqrt{1 - \mu \frac{1 - 2v}{(1 - v)^2}} = 1 - \eta\mu,$$

takže

$$\eta = \eta(\mu) = \frac{1 - \sqrt{1 - \mu \left\{ 1 - \left(\frac{v}{1 - v} \right)^2 \right\}}}{\mu} \quad (5,19)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{v}{1 - v} \right)^2 \right\} + \frac{1}{8} \mu \left\{ 1 - \left(\frac{v}{1 - v} \right)^2 \right\}^2 + \dots$$

Pro malá μ (kdy také v je malé) je η takřka nezávisle na μ rovno $\frac{1}{2}$; přitom rovnice (5,9) plyne

$$v_2 = \frac{\mu - \eta\mu^2}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta' - \eta\mu} \quad (5,20)$$

Protože také

$$\frac{\partial v_2}{\partial \eta} = - \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta'}{(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta' - \eta\mu)^2} \mu^2 \quad (5,21)$$

je malé, projeví se chyba η v hodnotě v_2 velmi málo, takže stačí ve vzorci (5,20) položit $\eta = 0,5$ a dostaneme v_2 s chybou v intervalu $(0, \frac{1}{2})$ až na třetím desetinném místě. Výsledek je možno ještě dále zpřesnit, protože hodnoty v_i známe přesně pro $\mu = \frac{1}{2}$. Pak totiž plyne z rovnice (5,8) přímo při označení $w = v - \frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{4} - w^2 \right)^2 (1 - \cos \beta') - w^2 \left\{ \left(\frac{1}{2} - w \right)^2 + u \right\} (1 + \cos \beta') = 0,$$

$$-w^4 \cdot 2 \cos \beta' - w^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\cos \beta'}{4} \right) + \frac{1 - \cos \beta'}{16} = 0. \quad (5,22)$$

Pro $\cos \beta' = 0,3720$ ($\beta = 68^\circ 10'$, $2\alpha - \beta = 0$) jsou kořeny této rovnice

$$w_{1,2} = \pm 0,2364,$$

takže

$$v_2 = 0,2636$$

Pro $\cos \beta' = -0,3720$ ($\beta = 68^\circ 10'$, $2\alpha - \beta = \pi$) máme podobně

$$w_{3,2} = \pm 0,3354,$$

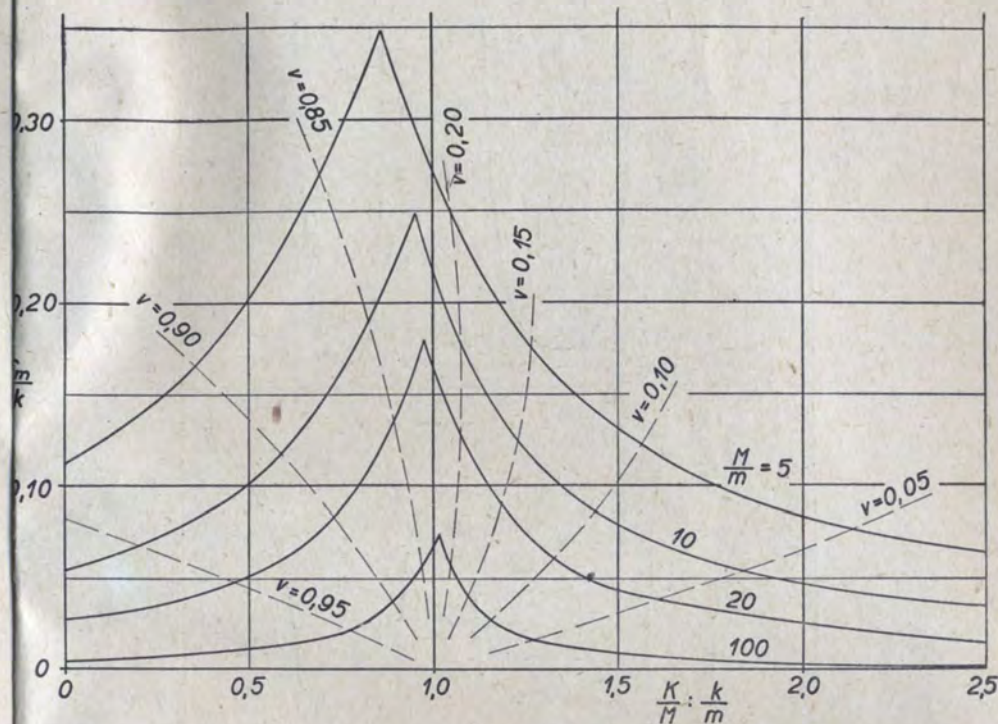
$$v_2 = \pm 0,1646,$$

$$v_3 = + 0,8354.$$

Srovnáme-li tyto hodnoty s hodnotami plynoucími ze vzorce (5,20), vidíme, že pro $\cos \beta' = +0,372$ dosavadní volba $\eta = 0,5$ a pro $\cos \beta' = -0,372$ volba $\eta = 0,55$ dává hodnoty v_2 přesné asi na jednu tisícinu pro $\mu = \frac{1}{2}$; a s pomocí

vzorce (5,21) a rozvoje (5,19) se dá snadno ukázat, že pak vzorec (5,20) dává tuto přesnost v celém intervalu $(0, \frac{1}{2})$. Známe-li v_2 , vypočteme pak r_m ze vzorce (5,16).

Takto získané hodnoty jsou vyneseny v diagramu na obr. č. 10. Z diagramu je patrné především, jak je důležité, aby vlastní frekvence tyče a rámu (v méně tuhém směru) nebyly od sebe příliš vzdálené, a za druhé, že lehčí a při tom třeba



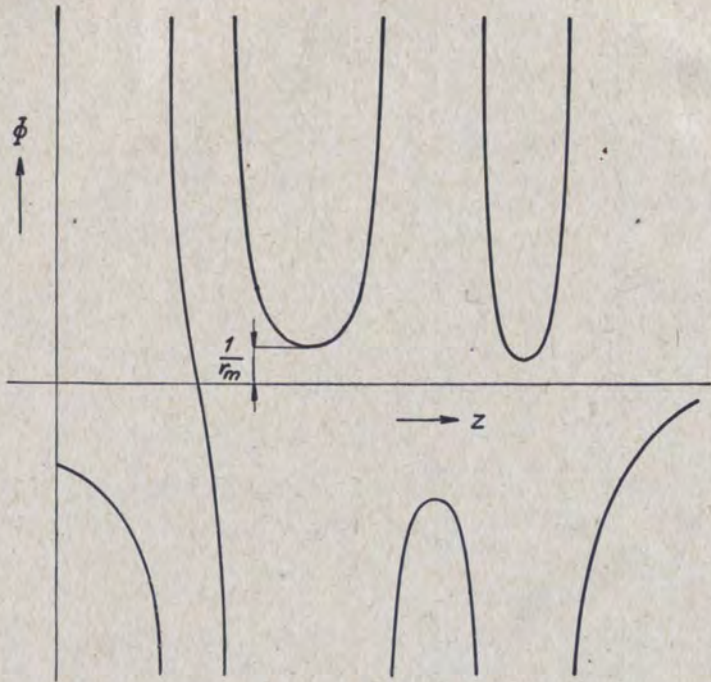
Obr. 10.

méně tužší rám je podstatně výhodnější než tuhý. Vliv správného naladění obou vlastních frekvencí je tak veliký, že leží-li vlastní frekvence rámu pod vlastní frekvencí tyče, zvětšení tuhosti tyče nemusí vždy vést ke zvětšení r_m . V takovém případě je nejúčinnějším prostředkem k zvětšení r_m zmenšení hmoty rámu; jiné možnosti jsou zvětšení tuhosti rámu nebo zvětšení hmoty nože.

6. Podružné stupně volnosti

Je-li dán stroj s počtem stupňů volnosti větším než tři, takže není možno použít našich diagramů, můžeme postupovat tak, že si nakreslíme průběh cha-

rakteristické funkce $\Phi(z)$ podle rovnice (2,6); mezní r je pak dáno převrtnou hodnotou pořadnice nejvyšší tečny k nakreslené křivce rovnoběžné s osou z (viz obr. 11). Tento postup je pracný v případě, kdy potřebujeme znát r_m v závislosti na jednom nebo několika parametrech, na př. již na úhlu nastavení nože k obráběnému povrchu, a nedává nám možnost rychlé orientace o tom, jak máme konstrukci stroje změnit, abychom jeho stabilitu zlepšili. Odvodíme



Obr. 11.

si proto v tomto oddílu věty ukazující, jakým způsobem je možno stroj idealisovat tak, abychom dostali aspoň hrubý obraz o jeho chování bez dlouhých výpočtů s použitím pouze theorie pro dva stupně volnosti nebo nejvýše s pomocí diagramů pro systémy o třech stupních volnosti.

Tvar charakteristické rovnice i příklad z předcházejícího odstavce nám napovídají, že máme při idealisování stroje vycházet od vlastních frekvencí a poddajností. Pokusíme se proto najít kriteria pro to, které vlastní frekvence mají největší vliv na r_m .

Všimněme si především, že kořen z_m mezní rovnice (odpovídající meznímu r_m) může ležet pouze v takovém intervalu $(\Omega_k^2, \Omega_{k+1}^2)$, pro který

$$g_k > 0, \quad g_{k+1} < 0 \quad (6,1)$$

(speciálně tedy také nemůže ležet v intervalech $(-\infty, \Omega_1^2)$ a (Ω_n^2, ∞)). V opačném případě totiž má charakteristická rovnice pro malé r v intervalu $(\Omega_k^2, \Omega_{k+1}^2)$ buď jeden kořen, nebo žádný (srov. obr. 11; přesný důkaz tohoto a dalších podobných tvrzení plyne na př. z věty Rouchéovy, viz [1]). Roste-li pak v charakteristické rovnici r spojitě od malé hodnoty až do r_m , má charakteristická rovnice (podle definice r_m) pouze reálné kořeny. Dvojnásobný kořen by tedy v intervalu $(\Omega_1^2, \Omega_{k+1}^2)$ mohl vzniknout jen tehdy, kdyby při uvedeném růstu r prošel některý jiný kořen charakteristické rovnice některým koncovým bodem uvažovaného intervalu $(\Omega_k^2, \Omega_{k+1}^2)$. Ale body Ω_k^2 nejsou kořeny charakteristické rovnice, jak je přímo patrné (vyloučíme-li případ, že některé g_k je rovno nule, srov. oddíl 2). Tím je věta dokázána.

Uvažujme nyní systém o dvou stupních volnosti, daný hodnotami $\Omega_k^2, g_k, \Omega_{k+1}^2, g_{k+1}$; při tom g_k, g_{k+1} splňují podmínku (6,1). Charakteristická funkce tohoto systému je

$$\Phi_o = \frac{g_k}{z - \Omega_k^2} + \frac{g_{k+1}}{z - \Omega_{k+1}^2}$$

Mezní r pro tento zjednodušený systém označme r_{mo} , kvadrát frekvence jemu příslušné z_{mo} . Pak plyne z rovnic (3,2) a (2,6)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Omega_{k+1}^2 - z_{mo}}{\Omega_k^2 - z_{mo}} \right)^2 &= \frac{-g_{k+1}}{g_k}, \\ z_{mo} &= \frac{\Omega_k^2 \sqrt{g_{k+1}} + \Omega_{k+1}^2 \sqrt{g_k}}{\sqrt{g_k} + \sqrt{-g_{k+1}}}, \\ \Omega_{k+1}^2 - z_{mo} &= \frac{\sqrt{-g_{k+1}}}{\sqrt{g_k} + \sqrt{-g_{k+1}}} (\Omega_{k+1}^2 - \Omega_k^2), \\ z_{mo} - \Omega_k^2 &= \frac{\sqrt{g_k}}{\sqrt{g_k} + \sqrt{-g_{k+1}}} (\Omega_{k+1}^2 - \Omega_k^2), \\ \frac{1}{r_{mo}} &= \frac{(\sqrt{g_k} + \sqrt{-g_{k+1}})^2}{\Omega_{k+1}^2 - \Omega_k^2}; \end{aligned} \quad (6,3)$$

při tom nedbáme na druhý kořen mezní rovnice, který dává záporné r . Vzorec (6,3) ukazuje, že mezní r je při daných g_k, g_{k+1} tím menší, čím jsou příslušné vlastní frekvence bližší, a stane se rovným nule, když splynou; a dále, že r_m zůstává konečné, i když jedna z hodnot g_k, g_{k+1} se blíží k nule. Oba tyto výsledky ve skutečnosti vlivem tlumení přestanou platit, jsou-li obě vlastní frekvence velmi blízké nebo některé g_k velmi malé, ale ukazují nám, že i velmi „slabé“ (málo poddajné) stupně volnosti mohou mít na stabilitu podstatný vliv.

Vraťme se nyní k původnímu systému o n stupních volnosti a vyberme ze spektra jeho vlastních frekvencí všechny dvojice, jimž příslušná g_k, g_{k+1} splňují podmínku (6,1) (neexistuje-li ani jedna taková dvojice, je systém stabilní pro všechna r ; srov. oddíl 2).

Převratná hodnota mezního r celého systému je dána minimem funkce $\Phi(z)$ v intervalu tvořeném některou z uvedených dvojic a je tedy menší než $\Phi(z_{m0})$, kde z_{m0} je dáno výrazem (6,2) pro příslušný interval. Máme tedy podle rovnice (6,3)

$$\frac{1}{r_m} \leq \frac{(\sqrt{g_k} + \sqrt{-g_{k+1}})^2}{\Omega_{k+1}^2 - \Omega_k^2} + \sum_{i \neq k, k+1} \frac{g_i}{z_{m0} - \Omega_i^2},$$

$$z_{m0} = \frac{\Omega_k^2 \sqrt{-g_{k+1}} + \Omega_{k+1}^2 \sqrt{g_k}}{\sqrt{g_k} + \sqrt{-g_{k+1}}}. \quad (6,4)$$

Nerovnnina (6,4) je cenná proto, že nám dává pro r_m dolní odhad čili odhad na straně „vyšší bezpečnosti“. Její cena je zvyšována tím, že tento odhad leží blízko skutečného r_m . Neboť pro interval $(\Omega_k^2, \Omega_{k+1}^2)$, ve kterém leží skutečné z_m platí zřejmě

$$\frac{1}{r_m} = \Phi(z_m) \geq \frac{(\sqrt{g_k} + \sqrt{-g_{k+1}})^2}{\Omega_{k+1}^2 - \Omega_k^2} + \sum_{i \neq k, k+1} \frac{g_i}{z_m - \Omega_i^2}. \quad (6,5)$$

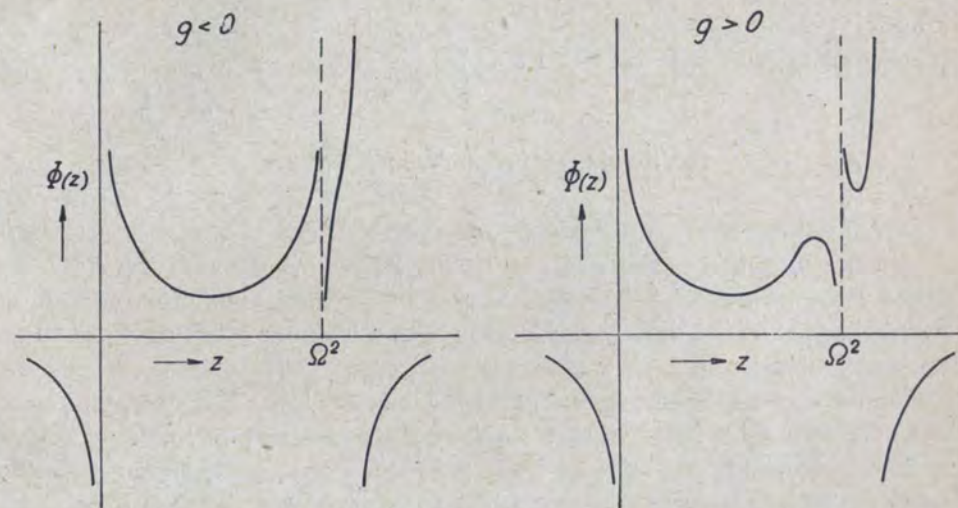
V normálních případech, kdy $g_k, -g_{k+1}$ nejsou příliš malá proti ostatním g_k a Ω_k, Ω_{k+1} neleží příliš blízko k sousedním frekvencím, je druhý člen na pravé straně rovnice (6,4) nebo (6,5) menší než první a nezávisí mnoho na volbě hodnoty z_{m0} nebo z_m , takže pravé strany rovnic (6,4) a (6,5) se takřka shodují.

Ve vztahu (6,4) platí tedy takřka znaménko rovnosti a rovnice z ní tak vzniklá nám dává dobrou aproximaci pro mezní r . Při tom pravou stranu vztahu (6,4) dovedeme (na rozdíl od pravé strany vztahu (6,5), jejíž výpočet by vyžadoval řešení rovnice pro z_m) snadno spočítat. K určení mezního r musíme spočítat pravou stranu vztahu (6,4) pro všechny dvojice (g_k, g_{k+1}) , splňující podmínku (6,1) a ze vzniklých čísel vybrati největší; vyjde-li pro všechny dvojice záporná, znamená to, že systém je stabilní pro všechna r .

Pravá strana rovnice (6,4) dává, jak bylo již naznačeno, špatné přiblížení pro $\frac{1}{r_m}$ v případě, že v blízkosti vlastních frekvencí použité dvojice Ω_k, Ω_{k+1} leží další vlastní frekvence. V takovém případě dostaneme často lepší přiblížení tím, že ke g_k přičteme součet všech g_i , jimž příslušné vlastní frekvence leží v blízkosti Ω_k , a podobně u g_{k+1} (pokud tím g_k nebo g_{k+1} nezmění znaménko; tím by se dvojice stala nepoužitelnou); v součtu Σ ve vzorci (6,4) přičtená g_i pak ovšem vypustíme. Často můžeme též dosáhnout lepšího přiblížení tím, že místo dvojice vlastních tvarů kmitání použijeme tři a určíme jim příslušné r_{m0} z diagramů pro tři stupně volnosti (viz oddíl 4); ve vzorci (6,4) pak dosadíme na pravé straně místo prvního sčítance $\frac{1}{r_{m0}}$ a v součtu Σ vypustíme sčítance příslušné všem třem použitým vlastním tvarům kmitání.

Pokusíme se nyní odpovědět na otázku, podle jakého kritéria lze rozhodnout, je-li určitý tvar kmitání (co do svého vlivu na mezní r) výrazný nebo

podružný. Vzorce (6,4) a (6,5) ukazují, že za podružný lze pokládat takový tvar kmitání, pro který je prostá hodnota výrazu $\frac{g}{z - \Omega^2}$ malá (oproti $\frac{1}{r_m}$); přitom z značí kvadrát frekvence hrozcích samobuzených kmitů a jeho hodnota není tedy vždy předem patrná. Z toho plyne aspoň ten závěr, že pro nízké vlastní frekvence rozhoduje o podružnosti tvaru kmitání hodnota g , kdežto pro vysoké hodnota $\frac{g}{\Omega^2}$, čili v podstatě částečná poddajnost. Pro střední vlastní



Obr. 12a).

Obr. 12b).

frekvence lze říci jen to, že hranice pro g , od které příslušný tvar kmitu přestává být podružným, roste úměrně se vzdalováním vlastní frekvence od hrozcí frekvence samobuzených kmitů.

Z předchozího víme, že sebeslaběji zastoupený tvar kmitání může někdy podstatně ovlivnit mezní r , čili že existuje kritérium podružnosti nezávislé na g (kromě jeho znaménka). Tento zjev souvisí s tím, že rovnice

$$\Phi'(z) \equiv \Phi'_0(z) - \frac{g}{(z - \Omega^2)^2} = 0 \quad (6,6)$$

má pro malá g vedle kořenů v okolí kořenů z_{i0} rovnice $\Phi'_0(z) = 0$ také pár kořenů $z \pm$ v okolí pólu $z = \Omega^2$ přidaného členu (jak plyne na př. z Rouchéovy věty, viz [1]). Z rovnice (6,6) plyne, že tyto kořeny (rovné asymptoticky $\Omega^2 \pm \pm \sqrt{\frac{g}{\Phi'_0(\Omega^2)}}$), jsou pro $\frac{g}{\Phi'_0(\Omega^2)} > 0$ reálné, takže jim pak odpovídají podle rovnice

(7,3) r ležící v okolí hodnoty $\frac{1}{\Phi_0(\Omega^2)}$. Je-li tato hodnota kladná a menší než mezní funkce $\Phi_0(z)$, nastoupí místo ní, a to pro sebemenší (g). Odvodili jsme tedy kritérium, že tvar kmitání s vlastní cyklickou frekvencí Ω není podružný pro sebemenší prostou hodnotu (g), jestliže

$$g\Phi_0'(\Omega^2) > 0 \quad (6,7)$$

$$0 < \frac{1}{\Phi_0(\Omega^2)} < r_m;$$

již tom $\Phi_0(z)$ značí charakteristickou funkci vzniklou vynecháním tohoto tvaru kmitání. Průběh charakteristické funkce pro obě možné alternativy znaménka g schematicky znázorněn na obr. 12a), b).

7. Vliv tlumení a pochvěného povrchu

Pro nestabilní obory vede dosavadní, ryze elastická theorie k výsledku, že v nich existují kmity se skutečně negativním útlumem, tedy narůstající. Naproti tomu v oborech, které jsme dosud nazývali (elasticky) stabilními, dává dosavadní theorie kmity s nulovým útlumem; o tom, budou-li tyto kmity ve skutečnosti ubývat nebo narůstat, rozhodnou vlivy dosud neuvažované. V tomto posledním odstavci, který má podat spíše výhled na další rozvoj theorie, probereme nejvýznamnější z těchto vlivů, totiž tlumení a pochvěný povrch.

Předpokládejme tedy nyní na rozdíl od předchozích odstavců, že jednotlivé tvary kmitu jsou tlumené s útlumy λ_k , čili že ve výchozím vzorci (1,3) je nutno náť $\omega - j\lambda_k$ místo ω . Tatáž změna se pak objeví ve vzorci (1,6) a (1,7), v determinantu oddílu 2, a tedy i v charakteristické rovnici (2,2), která nabude tvar

$$\sum \frac{g_k}{(\omega - j\lambda_k)^2 - \Omega_k^2} - \frac{1}{r} = 0. \quad (7,1)$$

Z rovnice (7,1) plyne především, že je-li

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \tilde{\lambda},$$

pak každému kořenu ω charakteristické rovnice bez tlumení odpovídá kořen rovnice (7,1)

$$\omega + j\tilde{\lambda}.$$

Čili z ní plyne, je-li

$$\lambda_k = \tilde{\lambda} + \Delta\lambda_k,$$

tedy korekce $\Delta\lambda_k$ jsou malé veličiny, pro korekci $\Delta\omega$ těmito veličinami způsobenou v prvním přiblížení

$$\Delta\omega \sum \frac{g_k}{(\omega^2 - \Omega_k^2)^2} = \sum \frac{jg_k\Delta\lambda_k}{(\omega^2 - \Omega_k^2)^2}. \quad (7,2)$$

Jsme-li v oboru (elastické) stability, takže ω je reálné, dostaneme roztržením na reálnou a imaginární část pro výsledný útlum λ po malé úpravě

$$\lambda = \frac{\sum \frac{g_k\lambda_k}{(\omega^2 - \Omega_k^2)^2}}{\sum \frac{g_k}{(\omega^2 - \Omega_k^2)^2}} = \frac{\sum \frac{g_k\lambda_k}{(\omega^2 - \Omega_k^2)^2}}{-\Phi'(\omega^2)}. \quad (7,3)$$

Z rovnice (7,3) je patrné, že tlumení různých normálních tvarů kmitání se projeví s různou účinností ve výsledném útlumu λ vznikajících kmitů. Nemá-li systém být elasticky stabilní pro jakékoli r , musí, jak víme z oddílu 2, některá g_k být kladná a některá záporná, tlumení některých tvarů kmitání tedy dokonce zmenšuje výsledný útlum a může, je-li tlumení ostatních dosti malé, způsobit samobuzení. Zda působí tlumení k -tého normálního tvaru kmitu stabilizačně nebo naopak, závisí na znaménku výrazu

$$\frac{g_k}{\Phi'(\omega_i)}$$

Protože pak v elasticky stabilním oboru, probíhá-li ω_i všechny možné hodnoty pro cyklické frekvence vynikajících kmitů, může $\Phi'(\omega_i^2)$ (kromě případů, kdy všechna g_k mají stejné znaménko, srov. obr. 5) nabýt hodnot jak kladných, tak záporných, nalezne se vždy možný způsob kmitání, pro který zvětšování určitého λ_k je škodlivé. Nestačí proto zvyšovat jen některé λ_k , abychom dosáhli útlumu. Nestejná účinnost tlumení jednotlivých tvarů kmitání se projevuje tím silněji, čím je $\Phi'(\omega^2)$ bližší k nule, čili čím jsme blíže k mezi stability. Na mezi stability, kde hlavní (vypsaný) člen na levé straně rovnice (7,2) vypadne, takže levá strana začíná členem $K(\Delta\omega)^2$ nebo vyšším, každá kombinace (malých) $\Delta\lambda_k$, pro které je pravá strana rovnice (7,2) od nuly různá, dává u některého $\Delta\omega$ zápornou imaginární část, a tedy nestabilitu (samobuzení). Účinek, s jakým se tlumení k -tého tvaru kmitu projeví (ať ve smyslu kladném nebo záporném) ve výsledném útlumu, závisí podle vzorce (7,3) na výrazu $\frac{g_k}{(\omega^2 - \Omega_k^2)^2}$, kdežto

účinek na r_m závisí podle oddílu 6 na výrazu $\frac{g_k}{\omega^2 - \Omega_k^2}$. Může se proto silně uplatnit tlumení i podružného tvaru kmitání, je-li jeho vlastní frekvence blízká frekvenci vznikajících kmitů. Podle oddílu 6 (vzorec (6,2)) frekvence vznikajících kmitů leží mezi oběma vlastními frekvencemi dvojice, splňující podmínku (6,1) (a to blíže k frekvenci slabšího tvaru kmitání); jsou-li pak obě vlastní frekvence blízké, předpovídá theorie bez tlumení, vyložená v oddílu 6, nízké r_m . Právě v tomto případě lze však podle předešlého očekávat, že tlumení bude mít velký vliv a theorie bez tlumení tedy nebude platit. Podotkněme ještě, že vzorec (7,3), a tedy i důsledky z něho činěné, platí jen pro malá $\Delta\lambda_k$. Pro větší $\Delta\lambda_k$ (zhruba asi od $\Delta\lambda_k \sim \Omega_k - \omega_i$) vzorec (7,3) neplatí a vliv $\Delta\lambda_k$ na λ může být i opačný než vzorec (7,3) předpovídá.

Znalost výsledného útlumu λ nám dává aspoň hrubou představu o tom, jak vysoce je daný systém stabilní. Ke skutečnému rozhodnutí, je-li elasticky stabilní systém v daném případě stabilní nebo nestabilní, nestačí znát výsledný útlum způsobený tlumením, nýbrž je nutno znát i samobudicí vliv a odvodit si rovnici pro spolupůsobení tohoto vlivu a tlumení. V následujícím textu bude tato rovnice odvozena pro nejdůležitější známý samobudicí vliv, totiž vliv pochvěného povrchu.

Odvodíme si nejprve rovnici pro amplitudu vynucených kmitů vznikajících pochvěním povrchu kmity dané amplitudy a dané frekvence. Označme \mathbf{x}_0 amplitudu vektoru výchylky nože způsobené tím, že nůž sleduje pochvěný povrch a \mathbf{x} amplitudu vektoru výchylky nože měřené od myšleného nepochvěného (středního) povrchu. Z vektoru \mathbf{x}_0 je velikostí pochvění ve skutečnosti určena jen složka kolmá k obráběnému povrchu; složku tangenciální si myslíme doplněnu tak, aby směry vektorů \mathbf{x} a \mathbf{x}_0 v prostoru (nikoli v komplexní rovině časových vektorů!) splývaly. Ve shodě s touto definicí si normální souřadnice q_{k0} vektoru \mathbf{x}_0 myslíme definovány vztahy

$$q_{k0} = q_k \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{e}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}}. \quad (7,4)$$

Pak zůstanou rovnice (1,3) a (1,4) formálně beze změny, kdežto v rovnici (1,5) je nutno psát na levé straně $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ místo \mathbf{x} . Stejným postupem jako v oddílu dostaneme pak pro amplitudy kmitů q_k , způsobené předepsaným pochvěním q_{k0} systém rovnic

$$q_i \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_i^2} \right) + r(\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i) \sum (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_k) p_k (q_k - q_{k0}) = 0. \quad (7,5)$$

Jde-li o tlumený systém, je nutno v systému (7,5) psát $\left(\frac{\omega - j\lambda_i}{\Omega_i} \right)^2$ místo $\frac{\omega^2}{\Omega_i^2}$.

Podmínka pro to, aby nově vzniklé pochvění bylo právě tak velké jako výchozí, čili aby se pochvění stále reprodukovalo, je, aby hloubka $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}$ vzniklých kmitů nože se rovnala hloubce $\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{e}$ výchozího pochvění, až na eventuální fázový posuv φ , čili podle rovnice (7,4)

$$q_k = e^{i\varphi} q_{k0}$$

nebo

$$q_k - q_{k0} = (1 - e^{-i\varphi}) q_k. \quad (7,6)$$

Dosadíme-li tuto podmínku do rovnic (7,5), dostaneme systém rovnic pro neznámé q_k formálně shodný se systémem (1,6) nebo (1,7), v němž místo r stojí $r(1 - e^{-i\varphi})$. Podmínka pro to, aby tento systém měl nenulové řešení, je tedy analogicky s rovnicí (2,2), resp. (7,1) při respektování tlumení

$$\sum \frac{g_k}{(\omega - j\lambda_k)^2 - \Omega_k^2} - \frac{1}{r(1 - e^{-i\varphi})} = 0. \quad (7,7)$$

Stroj s tlumením a s odebráním třísky na pochvěném povrchu je tedy stabilní,

jestliže všechny kořeny ω rovnice (7,7) při libovolném (reálném) φ mají imaginární části kladné nebo nulové.

Úplná theorie samobuzených kmitů obráběcího stroje by vyžadovala rozboru chování kořenů rovnice (7,7), který zde nebude proveden. Ukážeme pouze na jeden jednoduchý důsledek rovnice (7,7). Je-li r o něco větší než $\frac{1}{2}r_m$, kde r_m značí mezní r při odebrání třísky na nepochvěném povrchu, má rovnice (7,7) pro $\varphi = \pi$ podle definice r_m aspoň jeden kořen se zápornou imaginární částí. Mezní r při odebrání třísky na pochvěném povrchu je tedy rovno nejvýše polovině mezního r téhož stroje při odebrání třísky na nepochvěném povrchu.

8. Závěr

V této kapitole je vypracována obecná theorie polohové vazby kmitavého systému obráběcího stroje. Stroj je při tom uvažován jako lineární konservativní (bezztrátový, ryze elastický) systém s libovolným počtem stupňů volnosti, řezná síla je předpokládána závislá pouze na okamžité poloze nože, a to lineárně (ovšem se směrem odchylným od normály k obráběnému povrchu, jinak by samobuzení nemohlo nastat). Je ukázáno, že za těchto předpokladů mohou podle hodnot elastických konstant stroje a konstanty úměrnosti řezné síly ve stroji vzniknout buď jen ustálené kmity („elasticky stabilní případ“), nebo vedle ustálených a tlumených kmitů také narůstající (elasticky nestabilní případ). Výsledkem theorie jsou rovnice (3,2), (3,3), a (2,5), dovolující vypočítat, při které hodnotě „hloubkového koeficientu řezné síly“ přestane být stroj elasticky stabilní; protože závislost hloubkového koeficientu na velikosti třísky je známa, je tím určena přípustná mezní hodnota velikosti třísky.

Výpočet mezního hloubkového koeficientu vyžaduje řešení algebraické rovnice vyššího stupně. K usnadnění výpočtu jsou pro tři stupně volnosti hodnoty mezního hloubkového koeficientu v bezrozměrném tvaru v závislosti na bezrozměrných parametrech stroje (utvořených z vlastních frekvencí stroje a částečných poddajností jim příslušných) sestaveny v diagramy (oddíl 4, diagramy list 1—5). Vedle toho je pro libovolný počet stupňů volnosti odvozen přibližný vzorec (6,4) (jenž je současně dolním odhadem) pro mezní hodnotu hloubkového koeficientu. Vzorec (6,4) ukazuje názorně, že převratná hodnota mezní hodnoty hloubkového koeficientu je dána hodnotou, vypočtenou podle theorie pro dva stupně volnosti z vhodně zvoleného páru sousedních vlastních frekvencí v nestabilní orientaci, k níž se přidávají korekce od ostatních vlastních frekvencí (se znaménky závislými na prostorové orientaci a na tom, leží-li nad či pod frekvencemi základního páru).

Jako příklad užití theorie k zvětšení mezní třísky obráběcího stroje je propočítána vodorovná vyvrtávačka. Výsledek je znázorněn na diagramu (obr. 10). Vedle výsledků zřejmých bez theorie plyne z tohoto diagramu, že (v běžných

případech, kdy je vlastní frekvence rámu nižší než vlastní frekvence tyče) prospívá zmenšovat hmotu rámu (i za cenu zmenšení jeho tuhosti) a zvětšovat hmotu nože.

Nakonec je nastíněna zobecněná theorie respektující tlumení a vliv postupného rozkmitávání (rovnice (7,7)). Z této theorie plyne, že při pochvřeném povrchu je mezni tříska rovna nejvýše polovině hodnoty, kterou by měla bez pochvění.

Literatura

- [1] Smirnov V. I., Kurs vyšší matematiky, Moskva — Leningrad 1951.
[2] B. Hostinský, Mechanika tuhých těles, Praha 1924.



STUDIE A PRAMENY

sekce technická

sv. 5

Ing. Jiří Tlustý, *laureát státní ceny*
a RNDr Ladislav Špaček, *laureát státní ceny*

SAMOBUZENÉ KMITY V OBRÁBĚCÍCH STROJÍCH

Vědecký redaktor Ing. Dr Přemysl Breník

Vydalo Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1954. Redaktoři nakladatelství: hlavní redaktor Dr Milan Skalník, redaktorka publikace Věra Klusáčková, technický redaktor František Končický. Obálku navrhl Hugo Kratoška. Z nové sazby písmem F. R. Face vytiskly Pražské tiskárny n. p., provozovna 05, Praha VIII. I. vydání, náklad 1650 (1—1650) výtisků. Podepsáno k tisku 9. IX. 1954.

301 05/10 — 17701/53/III/2 — D-00869 — 244 — Sazba 22. 2. 1954, tisk 2. 10. 1954 — Plánovacích archů 23,75, autorských archů 30,40, vydavatelských archů 30,83 — Stran 380, obrázků 240 — Papír 7208-11, formát 70×100, 80 g

Cena brož. výtisku 39 Kčs.
(1. 10. 1953)