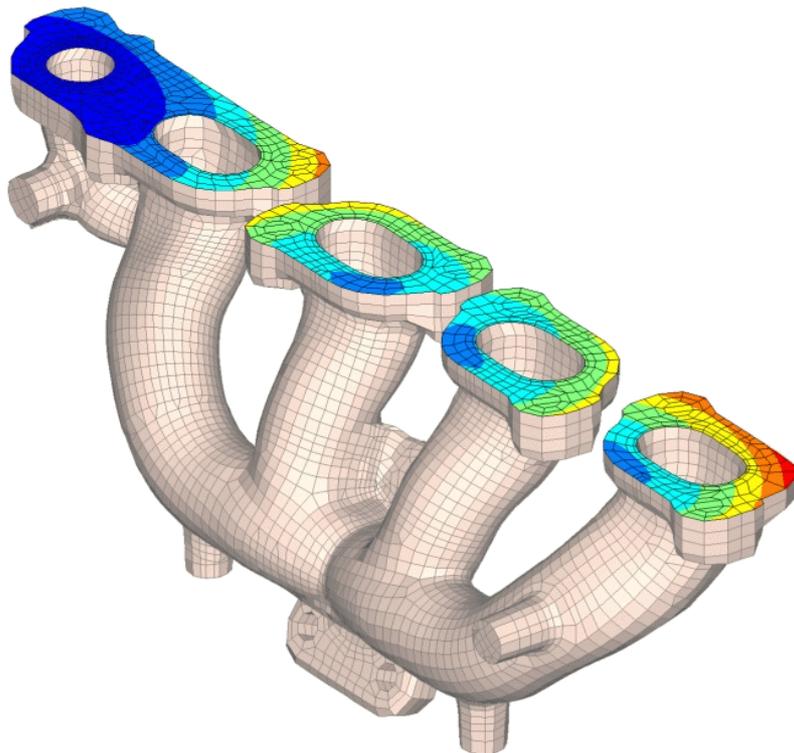


UNIVERSITE DE LIEGE
Faculté des Sciences Appliquées

Analyse de gammes d'usinage par la méthode des éléments finis

Luc Masset

Docteur en Sciences Appliquées de l'Université de Liège
Ingénieur civil électricien-mécanicien (aérospatiale)



Thèse de doctorat

2004

UNIVERSITE DE LIEGE
Faculté des Sciences Appliquées

Analyse de gammes d'usinage par la méthode des éléments finis

Luc Masset

Docteur en Sciences Appliquées de l'Université de Liège
Ingénieur civil électricien-mécanicien (aérospatiale)

Thèse de doctorat

2004

Thèse défendue, avec succès, le 17 juin 2004, pour l'obtention du grade scientifique de Docteur en Sciences Appliquées de l'Université de Liège.

Jury : Claude FLEURY, Professeur à l'Université de Liège, président
Jean-François DEBONGNIE, Professeur à l'Université de Liège, promoteur
Serge CESCOTTO, Professeur à l'Université de Liège
Michel HOGGE, Professeur à l'Université de Liège
Benoît RAUCENT, Professeur à l'Université Catholique de Louvain
Walter BELLUCO, RENAULT SA, Rueil-Malmaison, France
Didier GRANVILLE, SAMTECH SA, Liège

Cette thèse a été partiellement supportée par un contrat avec la firme RENAULT de 1995 à 1998.

© Laboratoire de Méthodes de Fabrication, 2005
Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées,
Institut de Mécanique
Chemin des chevreuils, 1
B-4000 Liège

Tous droits réservés.

Toute reproduction, même partielle, sous quelque forme ou sur quelque support que ce soit, est strictement interdite.

Dépôt légal : D/2005/0480/36
ISBN 2-9600313-2-6
EAN 9782960031324

Introduction

L'objectif de ce travail est de réaliser un *outil d'analyse de gammes d'usinage*. Les bases du travail ont été établies lors d'un projet de recherche effectué en collaboration avec la firme RENAULT entre 1995 et 1998 [ren98]. De ce fait, le cadre de recherche est centré sur les problèmes spécifiques de l'industrie automobile, sans pour autant être limité à ce seul domaine.

La conception de gammes d'usinage est la tâche principale du bureau des méthodes (BM). Elle consiste à établir toutes les étapes de la fabrication d'un produit avant de lancer la production en grande série. Cette phase de pré-production est relativement longue. Elle débute parfois deux à trois ans avant la mise en production. *In fine*, il faut respecter deux contraintes majeures (figure 1) : les spécifications du bureau d'études (BE), qui portent sur le produit fini, et les contraintes de production, en particulier les cadences de production. Dans le domaine automobile, celles-ci sont très élevées. Pour donner un ordre de grandeur, le groupe RENAULT produit environ 2,4 millions de moteurs par an.

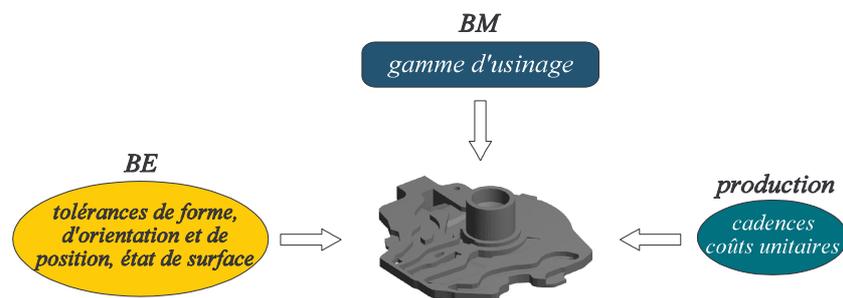


Figure 1 : contraintes imposées sur une pièce

La conception de la gamme de fabrication implique un grand nombre de choix : les opérations, les outils, les conditions de coupe, les prises de pièce, ..., jusqu'à la sélection des moyens de production. Une des décisions initiales importantes est le choix du type de ligne de production : *transfert* ou *flexible*. Sur une ligne transfert, la pièce est convoyée d'une machine à l'autre et chaque machine est mono-tâche. Par contre, une ligne flexible est constituée de machines polyvalentes, appelées aussi centres d'usinage, capables de réaliser plusieurs types d'opérations et de pièces. L'avantage des lignes flexibles est de pouvoir adapter la production à l'évolution de la demande. Par contre, les machines-transferts autorisent généralement des cadences de production plus élevées et ont un meilleur comportement dynamique que les machines flexibles (plus grande rigidité). Comme la réalisation d'une nouvelle ligne représente un investissement de quelques dizaines de millions d'euros, ce type de décision doit s'entourer d'un maximum de précautions.

Les outils numériques utilisés par le bureau des méthodes pour concevoir des gammes d'usinage sont des logiciels de CFAO, par exemple CATIA ou PRO-ENGINEER. Ils permettent d'effectuer la plupart des tâches classiques comme le calcul des chaînes de cotes, la détermination des temps de cycle ou l'écriture des programmes machines. Cependant, à l'heure actuelle, ces logiciels n'intègrent pas encore tous les

problèmes liés à l'usinage. L'objectif du travail est d'enrichir la chaîne de CFAO en y intégrant deux fonctionnalités essentielles, le calcul des *erreurs géométriques* des surfaces usinées et la prévision des *problèmes de vibration*.

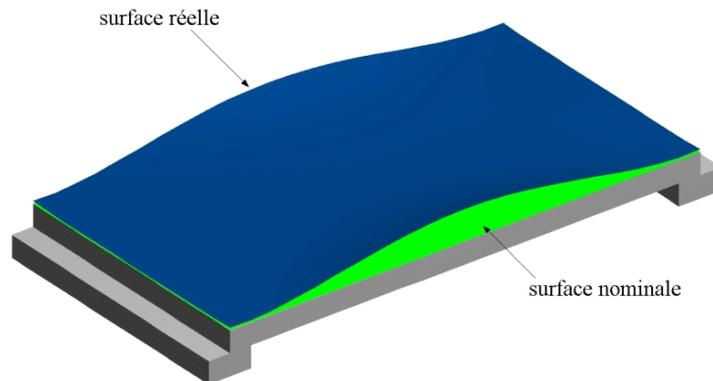


Figure 2 : surface usinée réelle et surface nominale

Par essence, toute opération d'usinage engendre une surface imparfaite car le système pièce-outil-machine n'est pas infiniment rigide. A cause des sollicitations mécaniques et thermiques induites par la coupe, il subit des déformations durant l'usinage. La surface usinée *réelle* présente donc systématiquement des déviations par rapport à la surface nominale *théorique* (figure 2). Les erreurs géométriques de la surface usinée sont de plusieurs natures :

- erreur de forme,
- erreur d'orientation,
- erreur de position.

Elles doivent être plus petites que les tolérances imposées sur la surface par le bureau d'études (tolérances de forme, d'orientation et de position). Pour l'exemple de la figure 2, l'erreur de forme s'appelle l'erreur de *planéité*, c'est-à-dire la déviation de la surface par rapport à un plan.



Figure 3 : surface usinée avec et sans broutement [har04a]

Durant l'opération d'usinage, les sources de vibration sont multiples : chocs lors des entrées répétées de l'outil dans la pièce, discontinuités de la matière coupée, forces de coupe périodiques, ... Il y a deux mécanismes de vibration : les *vibrations forcées* et les *vibrations auto-excitées*, qu'on appelle aussi *broutement*. Dans certaines conditions, les vibrations ont tendance à croître, ce qui provoque une usure prématurée de l'outil, voire la casse pure et simple de l'outil et/ou de la machine. De plus, lorsque le niveau de vibrations est trop élevé, la surface obtenue est de très mauvaise qualité (figure 3). Les

problèmes de vibration sont résolus soit en modifiant les conditions de coupe comme la fréquence de rotation, soit en modifiant les caractéristiques mécaniques du système (rigidité, amortissement).

L'intérêt de la simulation des erreurs géométriques et des problèmes de vibrations est triple :

- vérifier que les opérations de la gamme d'usinage sont conformes aux tolérances imposées et correspondent à des conditions de fonctionnement stables d'un point de vue dynamique;
- améliorer le réglage de chaque opération en comparant les différentes solutions possibles;
- faire des recommandations au bureau d'études sur la géométrie de la pièce.

Ce dernier point est très important. Il est essentiel que, lors des premières étapes de la *conception d'une pièce*, le bureau des méthodes puisse détecter certains problèmes et proposer au bureau d'études les modifications à apporter à la pièce : augmenter la rigidité à certains endroits, diminuer les zones en porte-à-faux, modifier les zones de fixation, ... De manière plus générale, la simulation doit permettre aux concepteurs de gammes d'usinage de fonder leurs choix sur des éléments *concrets* et non plus de manière empirique. La simulation a aussi un caractère *didactique*, en ce sens qu'elle permet de comprendre pourquoi certaines conceptions sont bonnes et d'autres pas.

Tous les composants du système pièce-outil-machine ont leur propre flexibilité. Ils ont donc tous une influence sur les erreurs de la surface usinée et sur le comportement dynamique du système. Cependant, selon le type d'opération, certains éléments ont plus d'influence que d'autres. Ainsi, dans le domaine aéronautique, les surfaces réalisées requièrent très souvent des outils minces (usinage de poches, perçages, réalisation de surfaces complexes, ...) dont la grande flexibilité est la cause de broutement. Ce type de problème a été largement étudié depuis les années soixante, car il représentait un frein à l'augmentation de la productivité autorisée par l'amélioration des performances des outils de coupe. A l'heure actuelle, les problèmes de broutement dus à la flexibilité de l'outil sont relativement bien maîtrisés. Il existe d'ailleurs des logiciels spécialisés qui permettent de déterminer des conditions de fonctionnement stables.

Dans le domaine automobile, la plupart des opérations consistent à réaliser des surfaces planes ou cylindriques avec des outils beaucoup plus rigides que ceux utilisés dans le domaine aéronautique. Dans ces conditions, on peut admettre que la partie la plus flexible du système est la pièce elle-même, et négliger la flexibilité de l'outil et de la machine-outil. Dès lors, nous n'étudierons dans ce travail que les opérations d'usinage pour lesquelles cette hypothèse est avérée, à savoir le fraisage en bout, le tournage et l'alésage, ce qui correspond à une grande partie des opérations réalisées dans le domaine automobile. Les pièces réalisées selon ces procédés sont, entre autres, les faces des carters-cylindres, les fûts de cylindres, les culasses, les moyeux et les carters de boîtes de vitesses et les disques de frein. C'est sur ce type de pièces que les tolérances sont très fines et que la maîtrise des erreurs géométriques a une grande importance.

Pour modéliser le système, limité à la pièce et aux éléments de serrage, nous avons choisi la *méthode des éléments finis*. Pour des applications réalistes, il faut utiliser des maillages volumiques de grande taille pour lesquels le temps de calcul est élevé. Le but de ce travail n'est pas seulement de mettre au point une méthode de simulation de l'usinage mais de développer un outil qui puisse être utilisé de manière intensive en milieu industriel. Cet outil doit permettre de tester un grand nombre de configurations sans que le coût de calcul ne soit prohibitif. Il faut donc porter une attention particulière à l'efficacité du calcul.

1. Exposé du problème

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il nous semble utile d'exposer quelques notions de base sur l'usinage. Tout d'abord, nous rappelons quelques grandes étapes du développement des machines-outils. Cet exposé montre que le principe même de l'usinage par enlèvement de copeaux est ancien et que les machines modernes ne sont somme toute que des descendantes sophistiquées des premières machines comme le tour de potier. En outre, il met en relief la place prépondérante qu'occupe le domaine automobile en tant que débouché pour les machines-outils. Ensuite, nous présentons quelques notions de base sur les principaux procédés d'usinage par enlèvement de copeaux qui sont abordés dans le présent travail - le tournage, le fraisage et l'alésage. Enfin, nous décrivons les grands principes de la coupe des métaux ainsi que les premiers modèles théoriques qui ont permis de mieux comprendre ce processus, notamment les travaux d'Ernst et Merchant. Nous dressons également un état des lieux de la connaissance dans le domaine de la coupe. En conclusion, nous établissons les différents objectifs que nous désirons atteindre au terme de ce travail, à savoir l'analyse des erreurs de forme et celle des phénomènes d'instabilité dynamique.

1.1. Historique de la machine-outil

Le tour de potier est la première machine-outil de l'histoire. Les plus anciens remontent au mésolithique (-10000 à -4000). Leur principe était déjà le même que celui des tours modernes : la pièce tourne et l'outil façonne la forme. L'entraînement de la pièce était assuré par un système de pédalier. Les premières applications furent la poterie et le travail du bois. Les outils étaient soit des outils de forme ou la main de l'artisan pour la poterie, soit des ciseaux à bois.



Figure 4 : tour de potier et tour à bois

Il faut attendre le début du Moyen Age pour voir apparaître des machines destinées à travailler le métal de façon précise. Les premières réalisations furent des pièces d'horlogerie (axes et roues dentées). Vers le milieu du 16^{ème} siècle apparurent des machines de plus grande taille entraînées par l'énergie hydraulique et destinées à aléser les fûts de canons. Avec l'avènement du moteur à vapeur, mis au point par James Watt en 1776, le développement des machines-outils s'accéléra. Il fut favorisé par plusieurs facteurs. Tout d'abord, grâce au moteur à vapeur, les industries manufacturières purent s'installer et se développer partout puisqu'elles n'étaient plus dépendantes de l'énergie hydraulique. Ensuite, aux 18^{ème} et 19^{ème} siècles, l'industrialisation de plus en plus rapide (chemins de fer, industries textiles, ...) fournit un grand nombre de débouchés nouveaux pour les machines-outils. Enfin, les progrès réalisés en métallurgie permirent de mettre au point des outils de plus en plus performants. Le progrès le plus significatif fut l'apparition des *aciers rapides* (*High Speed Steel*, HSS), découverts par Mushet en 1868. Il s'agit d'aciers fortement alliés (chrome, tungstène) et à haute teneur en carbone. Vers la fin du 19^{ème}, Taylor et White mirent au point le traitement thermique qui rendit les aciers rapides capables de supporter de hautes températures, de l'ordre de 600°C, ce qui permit d'atteindre des vitesses de coupe beaucoup plus élevées qu'auparavant.

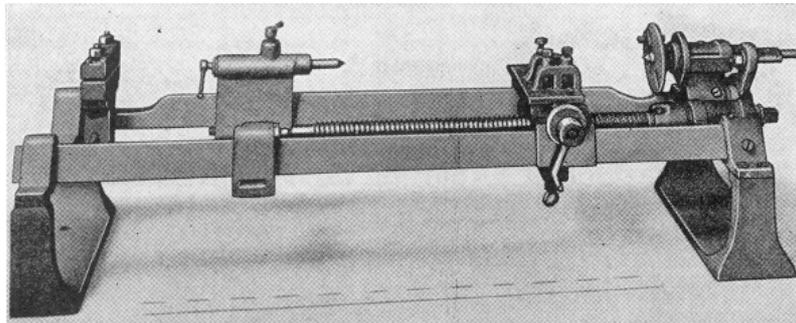


Figure 5 : tour à fileter vers 1740 [sou40]

Au début du 20^{ème} siècle, les machines-outils étaient déjà très similaires aux machines actuelles, d'autant plus que le moteur électrique avait commencé à remplacer le moteur à vapeur. L'industrie automobile offrit aux fabricants de machines-outils le plus vaste marché qu'ils aient jamais eu¹. En effet, la fabrication d'automobiles requiert non seulement des pièces de grande précision (moteur et transmission) mais surtout des volumes de production considérables. La fabrication en série, prônée par Henry Ford, allait avoir une grande influence sur la conception des machines-outils. Celles-ci devaient être de plus en plus spécialisées, voire même mono-tâche, les pièces étant convoyées automatiquement d'une station à l'autre sur la ligne de production. L'investissement en capital, très lourd pour ce type de machines, fut compensé par une cadence de production beaucoup plus grande et, consécutivement, un coût unitaire moindre.



Figure 6 : centres d'usinage modernes [nic04, mcm04, dan04]

Jusqu'au début du 20^{ème} siècle, les fabricants de machines-outils se trouvaient en Europe (Angleterre, Allemagne, France et Belgique) et aux Etats-unis. Par la suite, de nombreux pays s'industrialisèrent rapidement (Japon, Union Soviétique, ...). Les deux guerres mondiales contribuèrent aussi fortement au développement de nouvelles conceptions de machines, de nouveaux outils et de nouvelles techniques. Ainsi, dans les années vingt, l'entreprise allemande *Krupp* mit au point les plaquettes en carbure de tungstène, ce qui représenta un nouveau bond dans les performances des outils de coupe. A la fin de la seconde guerre mondiale, l'industrie aéronautique devint un des marchés les plus importants de la machine-outil. Il faut noter que les besoins des entreprises aéronautiques sont très différents de ceux de l'industrie automobile. En effet, il s'agit plutôt de petites séries de pièces très complexes pour lesquelles il faut des machines polyvalentes capables de réaliser toute une gamme d'opérations diverses (fraisage, rainurage, perçage, taraudage, ...). Avec le développement des ordinateurs apparut une des dernières

¹ A l'heure actuelle, l'industrie automobile demeure le premier marché des machines-outils.

innovations majeures dans le domaine de l'usinage : la commande numérique.

A côté des machines classiques, dont le principe de fonctionnement est l'enlèvement de copeaux (tours, fraiseuses, aléseuses, ...), apparaissent des machines-outils basées sur des techniques différentes, comme l'électroérosion, le découpage par jet d'eau et le découpage au laser. Ces procédés d'usinage sont utilisés pour des applications spécifiques (usinage du verre, découpage de tôles minces, ...). A cause de leur coût d'utilisation élevé et de leur champ d'applications limité, ces machines restent beaucoup moins répandues que les machines-outils classiques.

1.2. Aspects technologiques

1.2.1. Interactions pièce-outil-machine

Une machine-outil est composée d'un élément fixe, qu'on appelle le bâti, sur lequel sont disposés des éléments mobiles qui assurent les différents mouvements nécessaires à l'usinage de la pièce (figure 7a). Le bâti de la machine est fixé directement sur le sol ou sur un socle spécial qui permet de l'isoler des vibrations engendrées par les machines-outils voisines. Le bâti est réalisé dans un matériau amortissant comme la fonte, de manière à absorber le plus possible les vibrations générées lors de l'usinage.

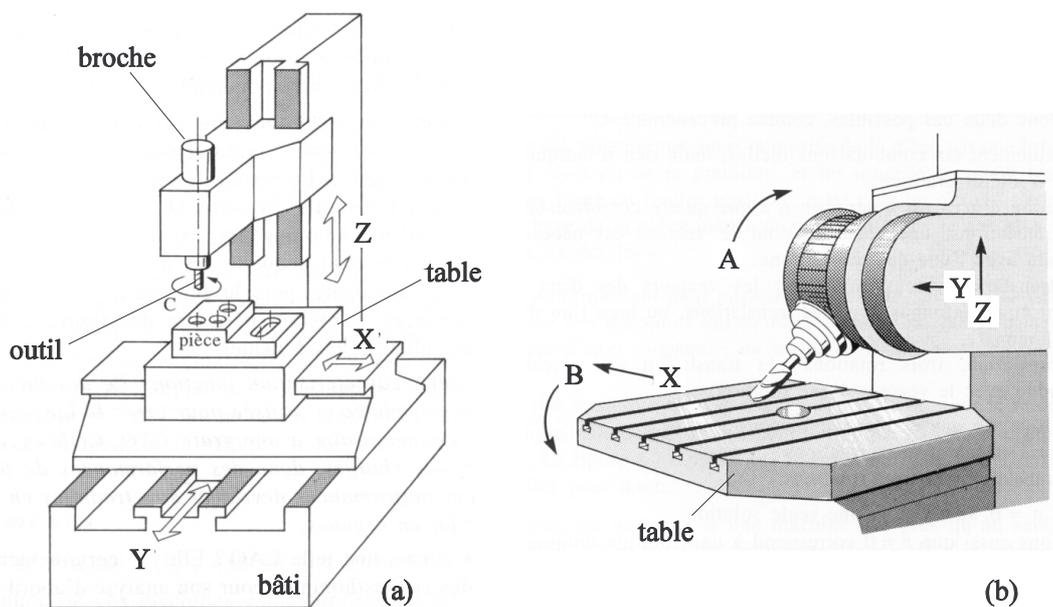


Figure 7 : éléments d'une machine-outil (a) et définition des axes d'une machine 5-axes (b) [pru93a]

L'enlèvement de la matière est produit par deux types de mouvements : un *mouvement de coupe* et un *mouvement d'avance*. La coupe correspond à un déplacement relatif de l'outil dans la matière à une vitesse très élevée, qu'on appelle *vitesse de coupe*. Sur un tour, le mouvement de coupe est assuré par la rotation de la pièce tandis que sur une fraiseuse, il est assuré par la rotation de l'outil. L'élément qui fait tourner la pièce ou l'outil s'appelle la *broche*. La puissance nécessaire pour usiner est principalement absorbée par la coupe.

Le mouvement d'avance est assuré par les déplacements relatifs de la pièce et de l'outil. Ces différents

déplacements dépendent du type de machine. Sur une fraiseuse trois-axes, la *table* de la machine, sur laquelle est fixée la pièce, se déplace sur des glissières selon les trois axes principaux X , Y et Z . Le déplacement selon l'axe Y est parfois assuré par le déplacement de la tête de la fraiseuse, qui contient la broche. Sur les centres d'usinage, un ou plusieurs degrés de liberté de rotation (figure 7b) sont ajoutés aux trois déplacements de base : rotation de la table dans le plan horizontal, basculement de la table, ... On parle alors de machine quatre-axes, cinq-axes, ... Sur un tour classique, l'outil peut se déplacer selon deux axes, l'axe de rotation de la pièce Z et l'axe perpendiculaire (radial) noté X .

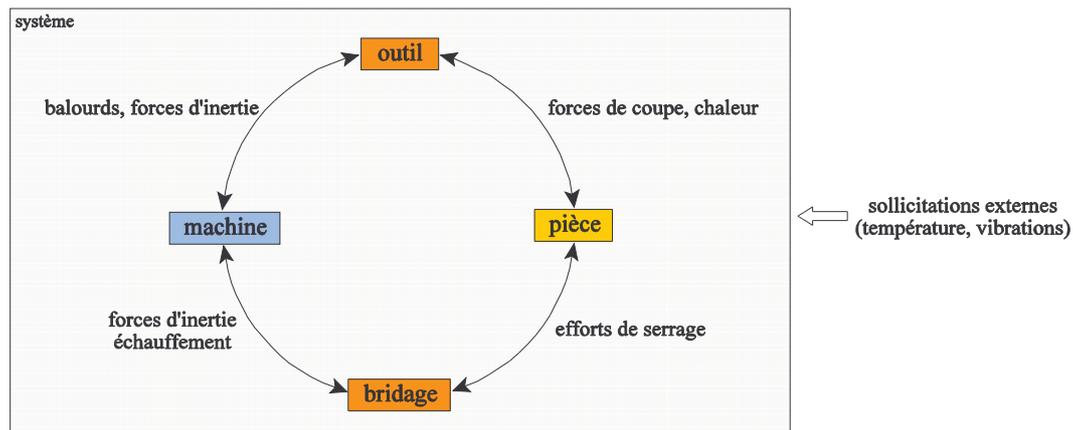


Figure 8 : sollicitations du système

Durant l'usinage, l'ensemble pièce/outil/machine forme un système en boucle fermée où tous les éléments interagissent les uns avec les autres (figure 8). Les sollicitations internes sont des sollicitations mécaniques (forces d'inertie dues aux déplacements de la table, présence d'un balourd au niveau de la broche, ...) et thermiques (chaleur générée par la coupe, échauffement des pièces en mouvement, ...). Le système subit également des sollicitations externes dues à l'environnement de la machine (variations de la température ambiante, vibrations). Toutes ces sollicitations ont une influence sur le processus d'usinage.

Dans ce travail, nous nous intéressons plus spécialement à la *pièce usinée* et donc aux éléments du système qui sont en contact direct avec la pièce : l'outil et le dispositif de fixation de la pièce sur la machine (bridage). Nous étudierons uniquement les opérations d'usinage pour lesquelles on peut admettre que les éléments les plus flexibles du système sont la pièce et les éléments de fixation. La flexibilité des différents composants de la machine-outil (bâti, table, broche, ...) ainsi que celle de l'outil seront négligées. Le système étudié se limite donc à la pièce supportée par des structures flexibles qui la relie à la machine. Seules les sollicitations *mécaniques* appliquées directement sur la pièce seront prises en compte :

- les efforts engendrés par la coupe,
- les efforts de serrage.

1.2.2. Tournage, fraisage, alésage

Dans ce travail, nous étudions uniquement trois types d'opérations d'usinage : le fraisage en bout, le tournage et l'alésage. Pour ces trois opérations, l'outil est relativement rigide par rapport à la pièce, ce qui permet de négliger sa flexibilité propre dans l'analyse du comportement du système. Notons que les déformations de la pièce sont intrinsèques à toutes les opérations d'usinage par enlèvement de copeaux.

Dès lors, la modélisation proposée dans ce travail n'est pas limitée à ces trois seules opérations.

Tournage

Le tournage est le plus ancien des procédés d'usinage. Son principe est exactement celui du tour utilisé par les potiers où la pièce en argile est entraînée en rotation et façonnée par des outils de mise à forme ou par la main du tourneur.

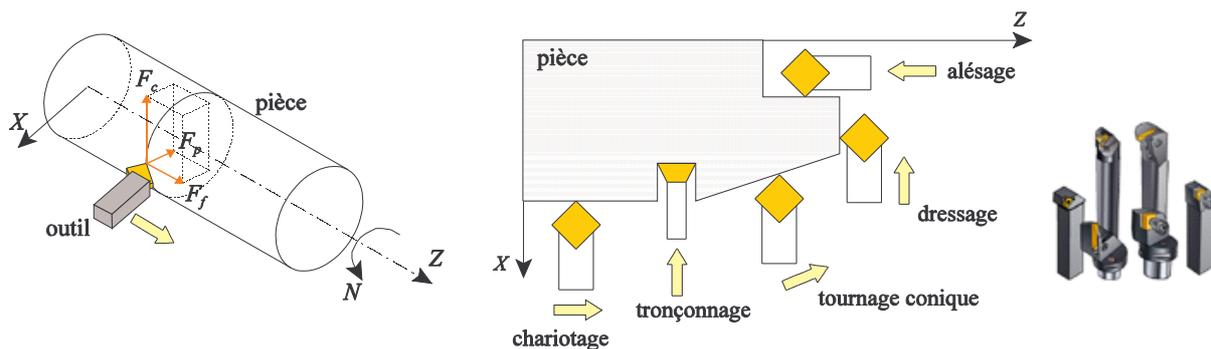


Figure 9 : axes du tour, opérations au tour et outils de tour [san04]

La pièce tourne autour de l'axe Z avec une fréquence de rotation N (figure 9). La forme de la pièce usinée est engendrée par le déplacement de l'outil dans le plan ZX , où X est l'axe radial. Plusieurs opérations peuvent être réalisées au tour. Chaque opération se caractérise par la trajectoire de l'outil dans le plan ZX et le type d'outil (figure 9). Dans ce travail, seuls le dressage et le chariotage sont étudiés. Ces deux opérations correspondent à l'essentiel des opérations réalisées dans le domaine automobile : arbres de transmission, disques de freins, manetons de vilebrequin ou d'arbre-à-cames, carters de boîte de vitesses, ... Le tournage conique pourrait être modélisé comme le chariotage en considérant une direction d'avance inclinée sur l'axe Z .

Les deux composantes de la vitesse relative entre l'outil et la pièce sont la vitesse de coupe v , qui est tangentielle, et la vitesse d'avance v_f dans la direction de déplacement de l'outil. La vitesse de coupe dépend de la fréquence de rotation et du diamètre de la pièce usinée D , soit

$$v = \pi D N \quad (2)$$

Le diamètre usiné D correspond au double de la distance entre le bas de l'outil et l'axe de rotation. La vitesse d'avance dépend de l'avance par tour f et de la fréquence de rotation N , soit

$$v_f = f N \quad (3)$$

L'avance par tour a une grande importance car elle détermine l'épaisseur du copeau, les forces de coupe et la rugosité de la surface usinée. L'outil applique un effort total F que l'on décompose usuellement selon trois directions :

- la force de coupe F_c selon la direction de la vitesse de coupe,

- la force d'avance F_f selon la direction de la vitesse d'avance,
- la force passive F_p qui est perpendiculaire aux deux autres et à la surface usinée.

La puissance à la broche, qu'on appelle aussi puissance de coupe, est égale au produit de la force de coupe F_c par la vitesse de coupe v . La puissance nécessaire pour déplacer l'outil est quant à elle égale au produit de la vitesse d'avance v_f par la force d'avance F_f . Enfin, la troisième force est qualifiée de passive car elle ne développe aucune puissance, la vitesse selon cette direction étant nulle.

Pour les opérations réalisées au tour, les efforts de coupe ne fluctuent quasiment pas, sauf lorsque la matière coupée n'est pas uniforme : inégalités de la surépaisseur de la pièce brute, mauvais alignement de l'axe de la pièce et de l'axe de rotation ou discontinuités de la surface usinée (figure 10). Dans ce cas, on retrouve dans le contenu fréquentiel des forces de coupes des multiples de la fréquence de rotation du tour N , $2N$, ...

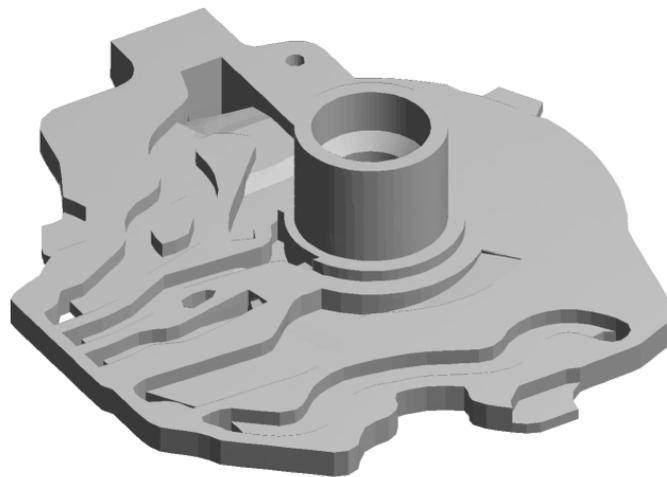


Figure 10 : moyeu d'alimentation d'huile de boîte de vitesses

Fraisage

Une fraise présente plusieurs dents ou plaquettes qui travaillent simultanément. Il existe une grande variété d'opérations de fraisage (figure 11) et de types de fraises (figure 12). Dans ce travail, nous nous intéressons uniquement au fraisage en bout, c'est-à-dire aux opérations de surfacage. Les applications typiques du fraisage en bout sont le surfacage des carters-cylindres, des culasses ou des carters d'huile.

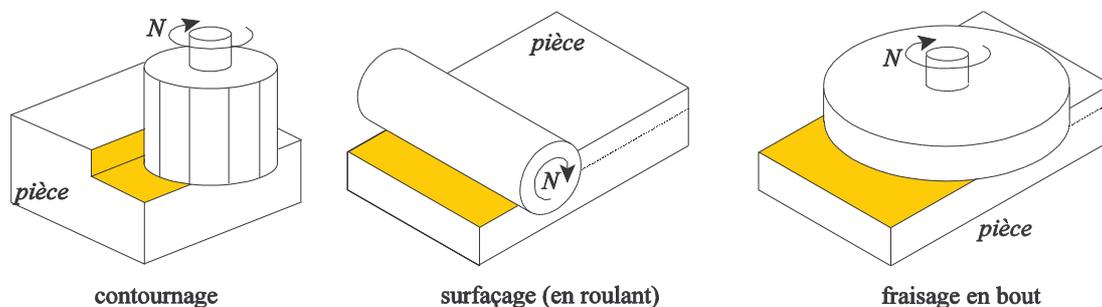


Figure 11 : opérations de fraisage; les surfaces usinées sont coloriées en jaune



Figure 12 : types de fraises [san04]

En fraisage, la rotation de l'outil est assurée par la broche de la machine-outil. La vitesse de coupe dépend de la fréquence de rotation de la broche N et du diamètre de la fraise D selon

$$v = \pi D N \quad (4)$$

La vitesse d'avance est liée à la fréquence de rotation, à l'avance par dent f_z et au nombre de dents de la fraise Z par

$$v_f = Z f_z N \quad (5)$$

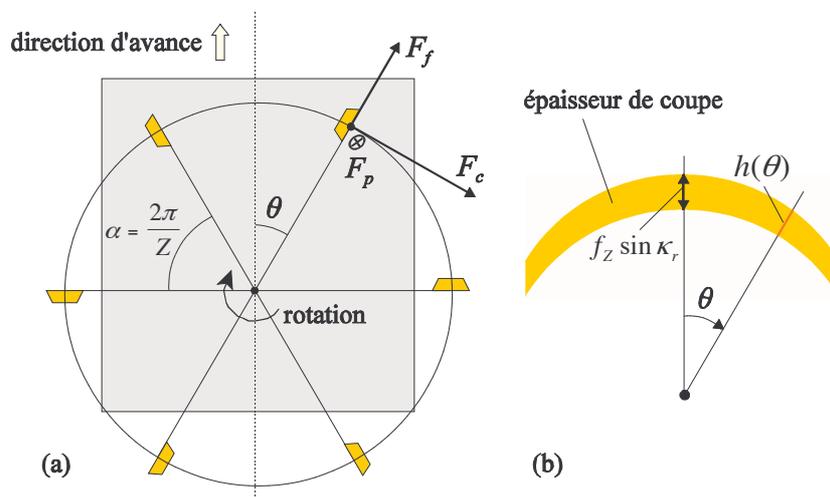


Figure 13 : forces de coupe en fraisage en bout (a) et épaisseur de coupe (b)

L'effort total appliqué par une dent est décomposé de la même manière qu'en tournage. La force de coupe F_c est tangentielle à la trajectoire de la dent, la force d'avance F_f est exercée selon la direction radiale et la force passive F_p est perpendiculaire aux deux autres et pointe vers la pièce (figure 13a). En fraisage en bout, l'épaisseur de coupe varie avec la position angulaire de la dent par rapport à l'axe d'avance, mesurée par l'angle θ (figure 13b). Elle vaut

$$h(\theta) = f_z \sin \kappa_r \cos \theta \tag{6}$$

où κ_r est l'angle de direction d'arête de l'outil (cf. chapitre 1.2.4). L'épaisseur de coupe est maximale lorsque la dent se trouve sur la direction d'avance pour laquelle l'angle θ est nul. Chaque dent suit une trajectoire cycloïdale puisqu'il s'agit d'un mouvement simultané de translation et de rotation.

Toutes les opérations de fraisage engendrent des efforts de coupe périodiques, à cause des entrées et sorties continues des dents dans la matière. La figure 14 illustre l'évolution des forces exercées par l'outil selon les trois directions lors du fraisage en bout d'une plaque rectangulaire. Une analyse du contenu fréquentiel des forces montre que les seules composantes que l'on retrouve dans le signal sont des multiples de la fréquence d'entrée des dents : ZN , $2ZN$, ... (figure 15).

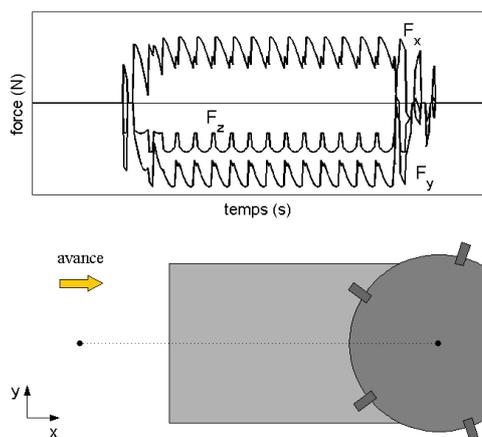


Figure 14 : évolution des forces de coupe en fraisage en bout

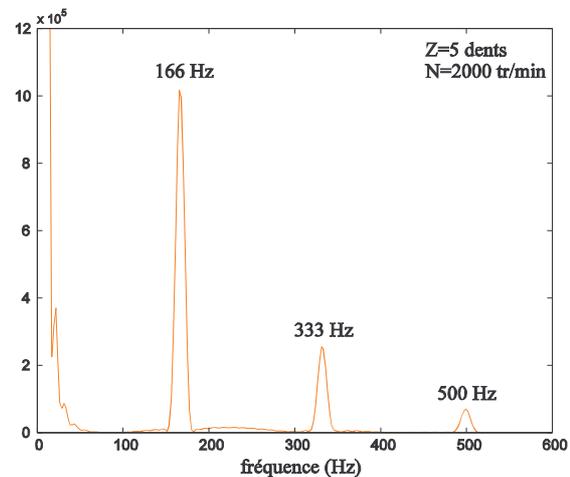


Figure 15 : composantes fréquentielles

En réalité, les plaquettes d'une fraise ne sont jamais parfaitement réglées (figure 16). C'est ce qui explique que la rugosité en fraisage en bout est proportionnelle à l'avance par tour $f = Zf_z$ et non à l'avance par dent f_z . Les efforts appliqués varient d'une plaquette à l'autre, si bien que le contenu fréquentiel des forces appliquées par la fraise n'est pas aussi net que celui présenté à la figure 15 : on retrouve également dans le signal des composantes en N , $2N$, ... qui restent cependant nettement plus faibles que les harmoniques principaux.

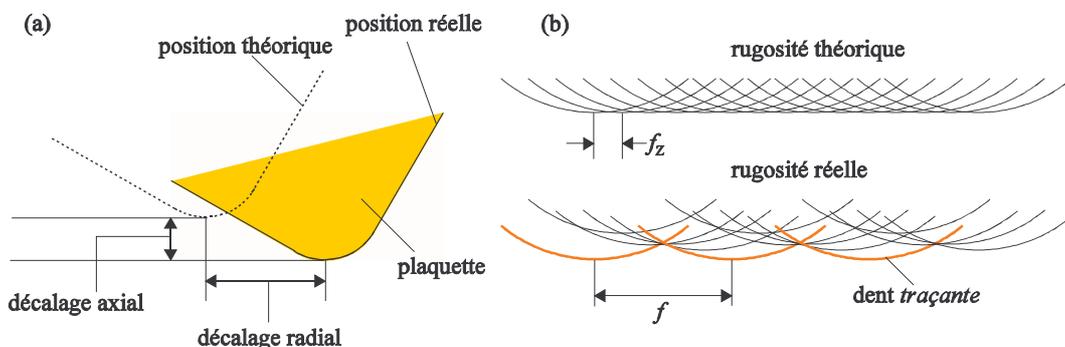


Figure 16 : décalages axial et radial d'une plaquette (a) et rugosités théorique et réelle (b)

Alésage

Contrairement au fraisage en bout et au tournage, l'alésage est un usinage *intérieur*, ce qui signifie que l'outil se trouve à l'intérieur de la pièce. Il existe plusieurs techniques d'alésage :

- au tour,
- au grain,
- à la barre à aléser,
- à l'alésoir.

L'alésage au tour est en tous points similaire au tournage. On utilise cette technique uniquement pour les alésages courts, vu la flexion importante que subirait un outil trop long. En alésage au grain (figure 17a), l'outil présente une ou plusieurs plaquettes de coupe, appelées *grains*. Le mouvement de coupe est assuré par la rotation de l'outil. L'axe d'avance est l'axe de rotation. Pour les alésages profonds, on utilise plutôt une barre à aléser montée sur une machine-outil spécifique et généralement supportée aux deux extrémités (figure 17b). Dans les deux cas, l'outil peut être muni de galets qui le guident sur la surface déjà usinée. On utilise une barre à aléser pour usiner les paliers de vilebrequin et les paliers d'arbre-à-cames. L'alésage au grain est quant à lui utilisé pour usiner les fûts de cylindres et les logements de soupapes. Enfin, les alésoirs ne sont utilisés que pour les alésages de petit diamètre. Ce sont des outils monoblocs : ils n'ont pas de plaquettes mais des arêtes de coupe taillées directement dans le corps d'outil.

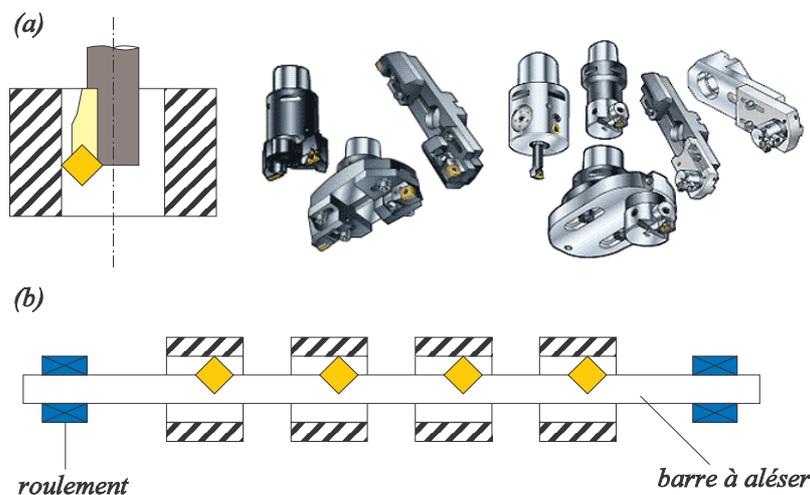


Figure 17 : outils d'alésage [san04]

Remarquons que, pour toutes les opérations d'alésage, il ne s'agit pas de percer une pièce pleine mais de mettre à dimension un trou préexistant. Celui-ci est réalisé par perçage pour les petits diamètres ou en fonderie lors de la réalisation de la pièce brute. En alésage, l'hypothèse que l'outil est beaucoup plus rigide que la pièce n'est pas toujours vérifiée. Pour une barre à aléser, elle ne l'est manifestement pas. Dans ce travail, nous n'étudierons que l'alésage au tour, qui est assimilable à du tournage, et l'alésage au grain.

1.2.3. Prise de pièce

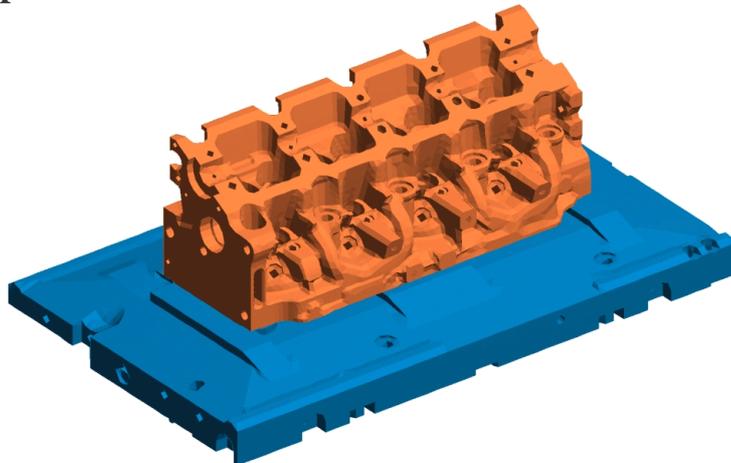


Figure 18 : culasse du moteur F9 sur son adaptateur (RENAULT)

Il existe une très grande variété d'éléments de serrage et de mise en position. Pour la réalisation de pièces unitaires ou de petites séries, on utilise souvent des éléments standard car il n'est pas rentable de fabriquer des éléments spécifiques. Par contre, pour les moyennes et grandes séries, il s'agit quasiment toujours d'éléments de fixation réalisés spécialement pour un montage donné. La figure 18 illustre une culasse sur son adaptateur. Il s'agit d'un support sur lequel la culasse est fixée et qui sert à la fois de dispositif de bridage de la pièce et de convoyeur entre les différents postes d'usinage. Nous décrivons ci-dessous deux modes classiques de fixation : le serrage en mandrin et le serrage par un dispositif bride/support.

Serrage en mandrin

Le serrage en mandrin est utilisé uniquement pour les opérations effectuées au tour. La chaîne cinématique se compose de la broche terminée par le plateau du tour sur lequel est fixé le mandrin. Le mandrin le plus classique est le mandrin concentrique à trois mors qui sert à fixer les pièces cylindriques (figure 19). L'effort de serrage doit être suffisamment important pour que le frottement entre les mors et la pièce empêche celle-ci de glisser sous l'effet du couple exercé par la force de coupe.

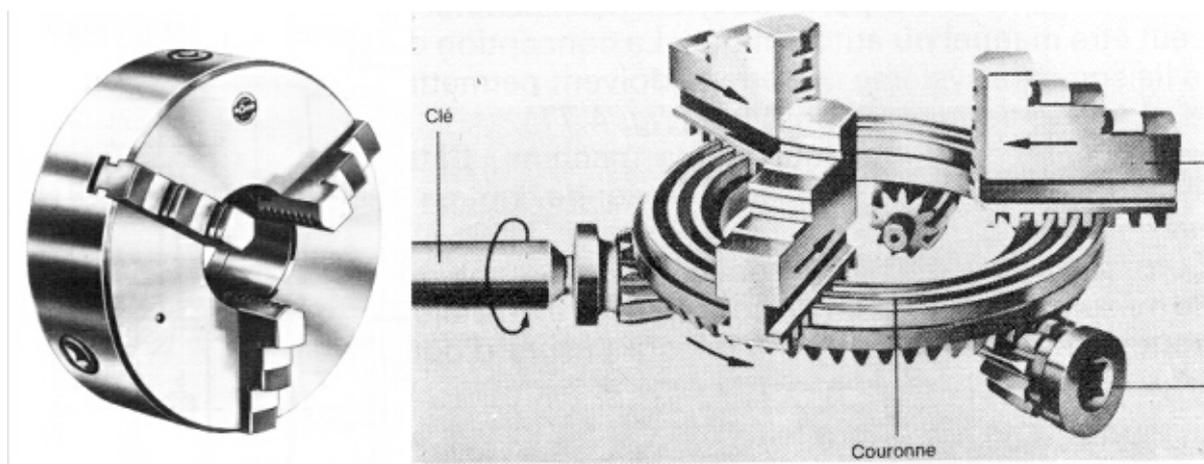


Figure 19 : mandrin concentrique à trois mors [jac92] et mécanisme de serrage à spirale [lon85]

Pour les pièces courtes, on utilise le *montage en l'air* pour lequel la pièce est uniquement tenue dans le mandrin (figure 20). C'est le cas des disques de freins par exemple. Pour les pièces plus longues, deux types de montages sont utilisés : le *montage mixte*, où une extrémité de la pièce est fixée dans le mandrin et l'autre supportée par une contre-pointe, et le *montage entre pointes*. Pour ce dernier, la pièce est supportée par une pointe fixe solidaire du plateau du tour et par une contre-pointe mobile, l'entraînement de la pièce étant réalisé au moyen d'un toc. Comme la contre-pointe mobile doit tourner avec la pièce, elle est montée sur un roulement.

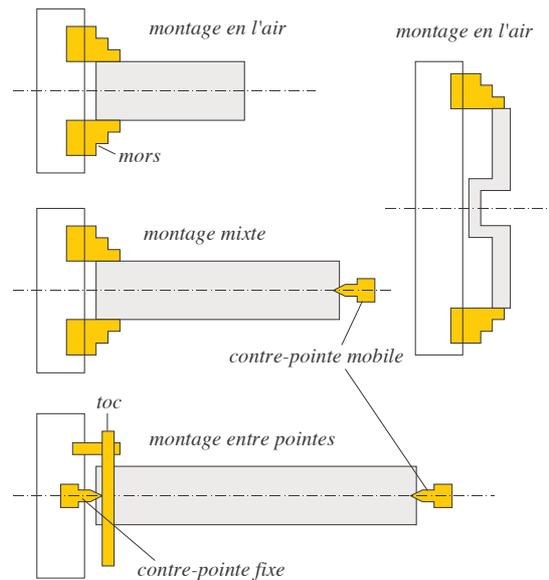


Figure 20 : types de montage au tour

Système bride/support

Pour les pièces prismatiques, le système de fixation le plus courant consiste à poser la pièce sur des supports et à la maintenir en position grâce à des brides qui appuient sur la pièce en vis-à-vis des supports (figure 21). Une fois les brides serrées et pour autant que les forces de serrage soient suffisantes, on peut considérer que le système support/pièce/bride est un assemblage où chacun des composants résiste aux sollicitations exercées par l'outil durant l'usinage.

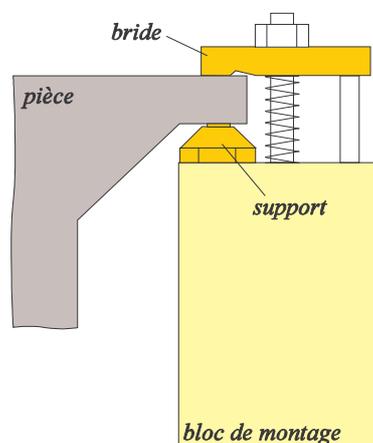


Figure 21 : exemple de montage

Le type de support utilisé dépend de la nature des surfaces d'appuis. Pour des surfaces usinées, ce sont généralement des supports à bout plan. Par contre, pour des surfaces brutes, on utilise parfois des appuis à bout sphérique de manière à limiter la surface de contact entre la pièce et le support. Pour ce type d'appui, il s'agit de contact Hertzien pour lequel le déplacement normal u ne varie pas linéairement avec la charge axiale sur l'appui F (figure 22). Notons que les appuis sphériques ne sont généralement pas utilisés pour supporter des surfaces fonctionnelles car ils provoquent un enfoncement local permanent.

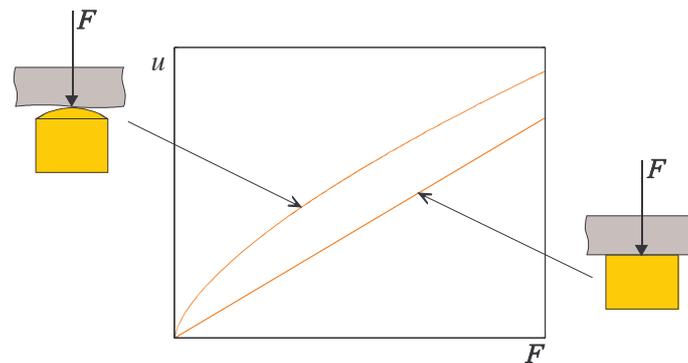


Figure 22 : appui plan et appui sphérique

1.2.4. Géométrie de coupe

La géométrie des outils de coupe est très complexe. Dans ce chapitre, nous décrivons les caractéristiques géométriques les plus importantes et leurs influences sur la coupe, notamment sur les efforts développés par l'outil.

Outil de rabotage

Prenons d'abord le cas d'un outil simple : l'outil à raboter. Par rapport aux autres opérations, le rabotage se caractérise par le fait que le mouvement de coupe est généré par un déplacement rectiligne de l'outil ou de la pièce. C'est le même principe que le rabot du menuisier. Lorsque l'arête de coupe est perpendiculaire à la vitesse de déplacement de l'outil, on parle de *coupe orthogonale*. De part et d'autre de l'arête de coupe se trouvent la face de coupe et la face de dépouille de l'outil (figure 23). L'angle de coupe normal γ_n mesure l'inclinaison de la face de coupe. Il est mesuré dans le plan P_n , normal à l'arête de coupe. La face de dépouille de l'outil est inclinée pour ne pas frotter sur la surface usinée. Cette inclinaison est mesurée par l'angle de dépouille normal α_n . L'angle de taillant β_n est celui formé par la face de coupe et la face de dépouille.

L'arête de coupe d'un outil n'est jamais parfaitement pointue. Elle présente en fait un arrondi dont le rayon r_n est de l'ordre du centième de millimètre. C'est pour cette raison qu'en pratique, on ne peut pas prendre un copeau dont l'épaisseur est trop petite car l'outil ne couperait plus la matière mais celle-ci fluerait sous l'outil.

Pour des opérations d'ébauche, où l'on enlève un copeau de grande épaisseur, on utilise fréquemment des outils avec un angle de taillant proche de 90° de façon à ce que l'outil soit plus massif et résiste mieux aux sollicitations. Dans ce cas, l'angle de coupe γ_n est négatif. Toute chose étant constante, les efforts de coupe augmentent sensiblement quand l'angle de coupe diminue.

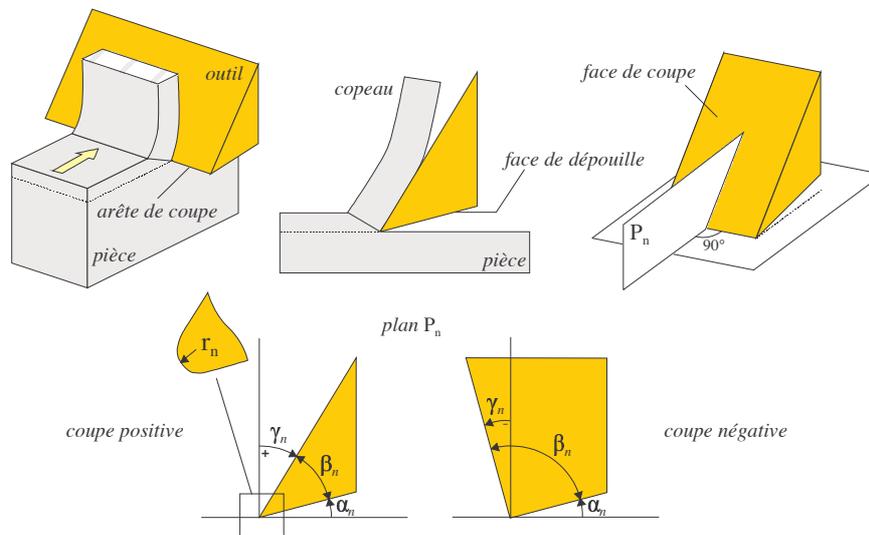


Figure 23 : angles de coupe dans le plan normal

Si l'arête de coupe n' n'est pas orthogonale à la direction de coupe, il s'agit de *coupe oblique* pour laquelle le copeau s'écoule latéralement par rapport à la direction de coupe. L'angle formé par la normale à l'arête et la direction de coupe s'appelle l'angle d'inclinaison d'arête λ_s . L'inclinaison de l'arête contrôle la façon dont le copeau s'écoule et, par conséquent, sa forme.

Outil de tour

Pour les opérations comme le tournage ou le fraisage, les outils sont plus complexes car l'arête de coupe n'est plus rectiligne. Prenons le cas d'un outil de tour classique. L'arête est constituée de deux parties rectilignes, l'arête principale et l'arête secondaire, reliées par une partie arrondie qu'on appelle le bec de l'outil et dont le rayon est noté r_ϵ (figure 24). Les angles d'outil sont définis dans plusieurs plans² :

- le plan de travail P_f , qui contient les directions de coupe et d'avance,
- le plan de référence P_r , perpendiculaire à la direction de coupe,
- le plan normal P_n , perpendiculaire à l'arête de coupe principale,
- le plan de l'arête de l'outil P_s , qui contient l'arête et est perpendiculaire à P_r ,
- le plan vers l'arrière P_p , perpendiculaire à P_r et à P_f .

Dans le plan P_r sont définis l'angle de direction d'arête κ_r , l'angle de pointe ϵ_r et l'angle de direction d'arête secondaire κ_r' . L'angle κ_r est très important car il règle la section du copeau et la répartition des forces de coupe dans le plan P_r . Plus κ_r est grand, plus la force d'avance augmente et plus la force passive diminue. L'angle κ_r est généralement compris entre 45 et 95° selon le type d'opération de tournage. Il contrôle également la progressivité de l'attaque de la pièce. Plus il est proche de 90° et plus la rentrée de l'outil dans la matière se produit brutalement, ce qui diminue la durée de vie des plaquettes.

² En réalité, on distingue deux systèmes de référence : le système de l'outil en main et le système de l'outil en travail, qui correspond à la géométrie effective de l'outil lors de l'usinage. Pour les opérations que nous étudions, les différences entre ces deux systèmes sont minimes.

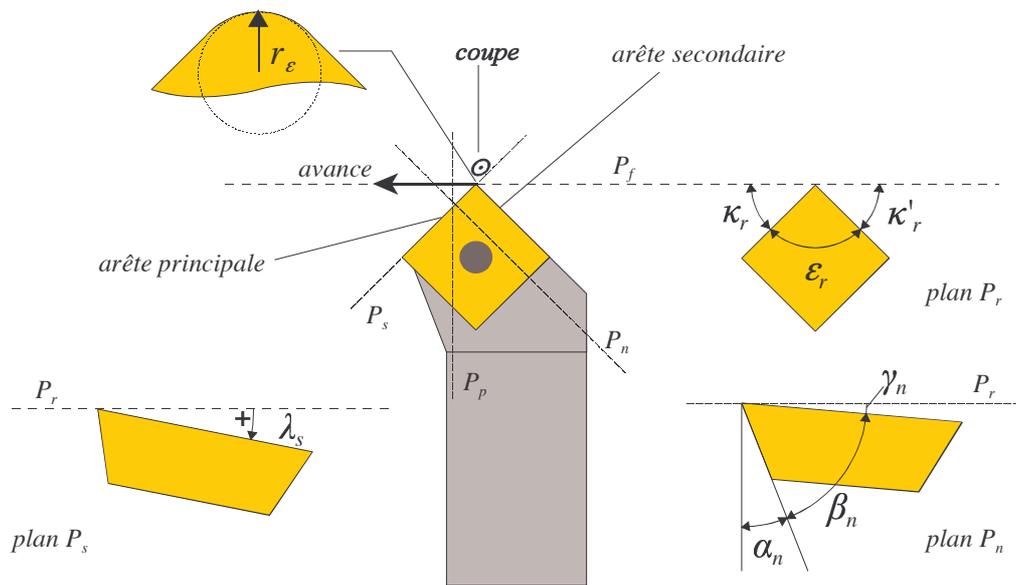


Figure 24 : outil de tour (coupe positive)

Pour des opérations de finition, on utilise des plaquettes à coupe positive comme celle illustrée à la figure 24, c'est-à-dire une plaquette avec un angle de coupe normal γ_n et un angle d'inclinaison d'arête λ_s positifs ou nuls. Pour des opérations d'ébauche avec des matériaux difficiles à usiner (fontes, alliages à haute résistance, usinage avec chocs), on utilise plutôt une plaquette à géométrie négative, ce qui signifie que ces deux angles sont négatifs (figure 25). On remarque la différence de forme de la plaquette à coupe négative qui est plus massive. Avec une coupe positive, on obtient généralement un meilleur état de surface, ce qu'on recherche en finition.

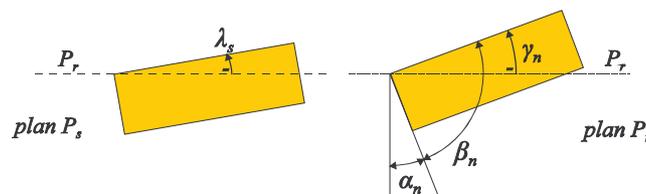


Figure 25 : coupe négative

Fraise

Une fraise en bout possède plusieurs plaquettes, généralement toutes identiques. Leur géométrie est définie dans le même système de plans que celle des outils de tour. Cependant, en fraisage, on utilise plus fréquemment les angles γ_f et γ_p pour caractériser la géométrie de la plaquette. Ils sont définis respectivement dans les plans P_f et P_p (figure 26). Les relations entre ces deux angles et les angles γ_n et λ_s de l'outil de tour s'écrivent

$$\begin{bmatrix} \tan \gamma_p \\ \tan \gamma_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \kappa_r & \sin \kappa_r \\ \sin \kappa_r & -\cos \kappa_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tan \gamma_n \\ \cos \lambda_s \\ \tan \lambda_s \end{bmatrix} \tag{7}$$

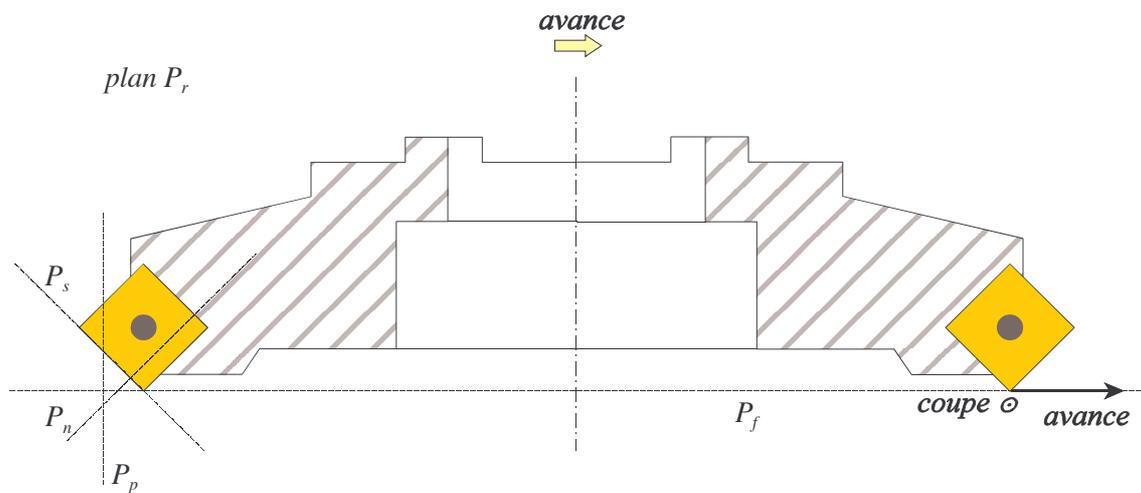


Figure 26 : géométrie d'une fraise en bout

Plus encore qu'en tournage, l'angle de direction d'arête κ_r est extrêmement important en fraisage car les plaquettes entrent et sortent continuellement de la pièce. Les plaquettes de coupe n'ont pas toujours une forme aussi simple que le modèle *classique* composé de deux arêtes rectilignes reliées par un arrondi. Il existe des plaquettes avec un chanfrein, avec un très petit rayon de bec, avec plusieurs faces, ... De plus, pour les opérations de finition, on peut disposer une ou plusieurs plaquettes *racleuses* sur la fraise (figure 27). Celles-ci coupent de la même façon que les autres mais une partie de l'arête secondaire est parallèle au plan P_f , ce qui permet de couler les sillons laissés par les plaquettes *normales* et, par conséquent, d'obtenir un meilleur état de surface.

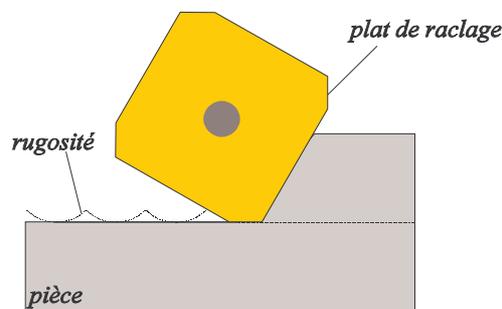


Figure 27 : plaquette racleuse

Section de coupe

Pour une plaquette de forme classique, la section de coupe est illustrée à la figure 28a. En pratique, on remplace la section de coupe réelle par un parallélogramme dont les dimensions sont l'épaisseur de coupe h et la largeur de coupe b . Ces deux grandeurs sont liées à l'avance f et à la profondeur de passe a , appelé aussi engagement, par l'angle de direction d'arête κ_r , soit

$$\begin{cases} h = f \sin \kappa_r \\ b = \frac{a}{\sin \kappa_r} \end{cases} \quad (8)$$

En fraisage, il faut remplacer l'avance f par l'avance par dent f_z . L'aire A de la section de coupe vaut environ bh ou af , pour autant que l'avance soit petite et que la profondeur de passe soit grande par rapport au rayon de bec de l'outil r_ϵ . L'aire de coupe a une très grande importance car les forces de coupe en dépendent *quasi* linéairement.

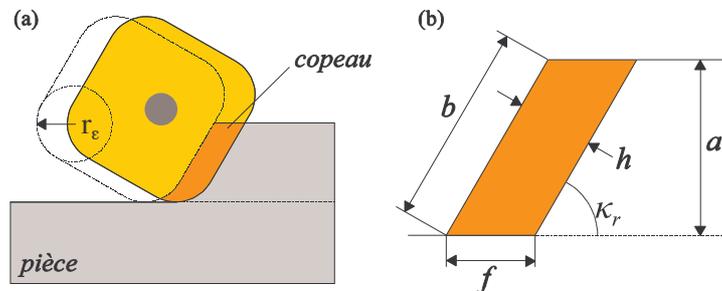


Figure 28 : géométrie de coupe pour une plaquette classique

1.2.5. Erreur de forme

La déviation d'une surface usinée par rapport à la surface *nominale* est décomposée en trois déviations primaires : la forme, l'ondulation et la rugosité (figure 29). Chacune est caractérisée par un pas, c'est-à-dire la distance entre deux pics consécutifs. C'est le pas qui permet de séparer les trois déviations sur les machines à mesurer (profilomètre, rugosimètre).

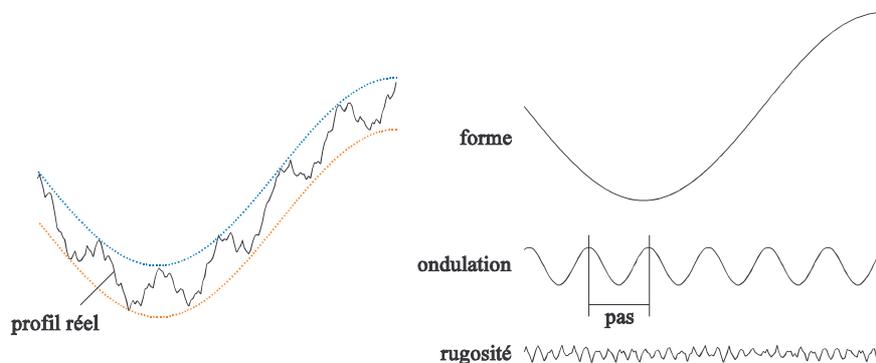


Figure 29 : décomposition de l'erreur totale d'un profil

La surface usinée nominale est la surface définie par le réglage de la cote de l'outil (figure 30). Elle correspond à l'enveloppe des creux de rugosité. La surface nominale est différente de la surface *mesurée* qui correspond à l'enveloppe des sommets de rugosité. En tournage, la rugosité totale théorique R_t dépend de l'avance par tour f et du rayon de bec de l'outil r_ϵ , soit

$$R_t = 0.125 \frac{f^2}{r_\epsilon} \quad (9)$$

La rugosité totale est la distance entre les creux et les sommets. C'est une erreur systématique de cote. Dans ce travail, nous n'étudions que la *déviation de forme* de la surface nominale.

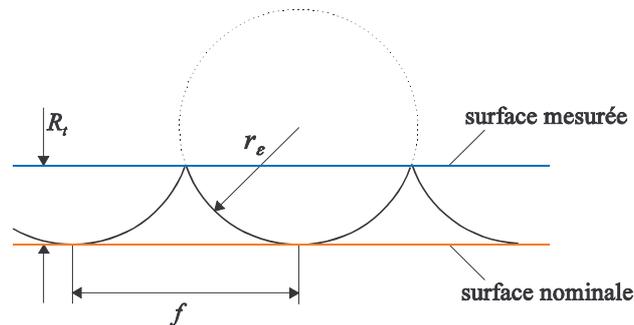


Figure 30 : surface nominale et surface mesurée

1.2.6. Gamme d'usinage

La gamme d'usinage est la suite des opérations à réaliser pour passer de la pièce *brute* à la pièce *finie*. Dans le domaine automobile, la pièce brute est quasiment toujours réalisée en fonderie afin de limiter le volume de matière à enlever. Une surface finie est rarement obtenue en une seule opération. Généralement, on effectue trois, voire quatre passes pour l'obtenir. Par ordre chronologique, ces opérations sont :

- l'*ébauche* (appelée aussi *dégrossissage*),
- la *semi-finition*,
- la *finition*,
- la *super-finition*.

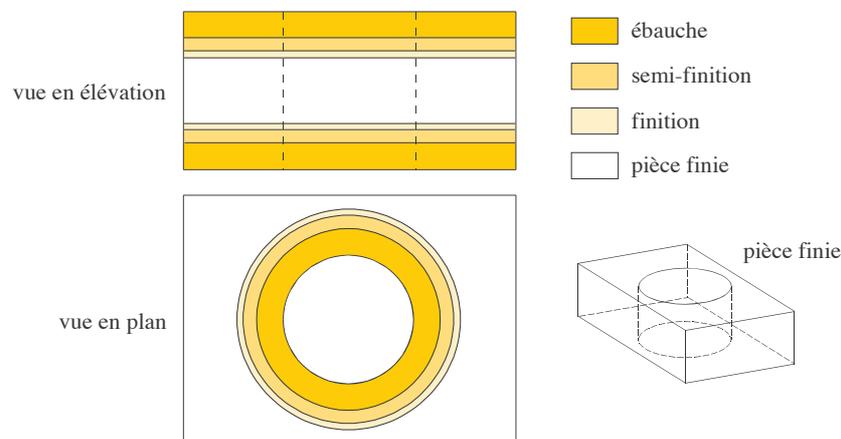


Figure 31 : exemple de gamme - les faces supérieure et inférieure et l'alésage sont usinés

Pour définir les engagements pour chaque passe, on utilise la technique des *chaînes de cotes*. Elle consiste à partir de la pièce finie et à considérer les opérations dans le sens anti-chronologique, en déterminant pour chaque opération l'engagement en fonction de certains critères bien définis (état de surface, type d'usinage, intervalle de tolérance, ...). Les dimensions *minimales* de la pièce brute sont connues lorsqu'on a calculé la profondeur de passe en ébauche pour chaque surface à usiner (figure 31).

Une pièce brute réalisée en fonderie présente une couche externe, appelée *croûte de fonderie*, qui est due à l'oxydation du métal et à la diffusion du matériau du moule dans le métal. L'épaisseur de cette couche

est de l'ordre du millimètre. Son usinabilité est très mauvaise : d'une part, si le moule est en sable, la silice est très abrasive et use rapidement les outils et, d'autre part, le métal oxydé est difficile à usiner. Lors de l'ébauche, on doit donc couper une épaisseur de matière telle que toute la matière polluée soit enlevée. Pour déterminer l'engagement en ébauche, il faut prendre en compte l'épaisseur de matière polluée et les variations possibles du positionnement de la pièce, qui dépendent des incertitudes sur la forme de la pièce brute. L'engagement est souvent très grand, entre 2 et 4 mm environ, de même que l'avance. Dès lors, les forces de coupe générées lors de l'ébauche sont très élevées, ce qui produit une surface de mauvaise qualité, tant du point de vue de la forme que du point de vue de l'état de surface. Pour respecter les tolérances (forme ou rugosité) imposées sur la surface finie, on doit dans la plupart des cas réaliser une ou deux passes supplémentaires pour obtenir la précision voulue, ce qui correspond aux passes de semi-finition et de finition.

Lorsqu'il faut obtenir un très bon état de surface, on doit effectuer une passe de super-finition. Pour celle-ci, on fait appel à des techniques d'usinage particulières comme le rodage ou la rectification. C'est le cas des fûts de cylindres dont la surface est obtenue par *honage*.

Outre la définition des engagements, la définition de la gamme inclut également, pour chaque opération, le choix :

- de la machine-outil et de l'outil,
- de la prise de pièce,
- des conditions de coupe (vitesse de coupe, avance, ...) et de la trajectoire de l'outil.

1.3. La coupe des métaux

1.3.1. Formation du copeau

La première étude scientifique portant sur la coupe des métaux remonte à 1798. Dans un papier présenté à la Société Royale de Londres, le comte Rumford notait que l'alésage des fûts de canons produisait *une grande quantité de chaleur* et que celle-ci semblait inépuisable. Cela contredisait la théorie largement admise à l'époque qui stipulait que la chaleur était transportée par un fluide appelé *calorique* et que celui-ci était libéré du matériau coupé. Selon Rumford, la chaleur était une forme d'énergie comme le travail mécanique. En immergeant les canons dans l'eau et en mesurant l'accroissement de température et la force nécessaire à l'usinage, il estima le facteur de conversion entre les unités de chaleur et le travail mécanique.

A partir du milieu du 19^{ème} siècle, de nombreuses études ont été menées pour établir les puissances nécessaires pour diverses opérations d'usinage, cela afin de dimensionner les moteurs à vapeur entraînant les machines. Le travail le plus connu est celui de Hartig [har73] qui fut une référence durant de nombreuses années. Dans le même temps, plusieurs études sur le mécanisme de la coupe ont été publiées, notamment par Tresca [tre73]. En examinant des copeaux issus de divers procédés d'usinage, les auteurs remarquèrent que *la formation du copeau était due au cisaillement*. Cependant, au début du 20^{ème} siècle, la théorie émise par Reuleaux [reu00], pour qui la formation du copeau était générée par une fissure se propageant devant l'outil, allait faire autorité pendant de nombreuses années, ce qui montre que les connaissances théoriques dans le domaine étaient encore loin d'être bien établies.

Il faut attendre le milieu du 20^{ème} siècle pour voir apparaître des modèles théoriques probants sur la coupe des métaux. Il s'agit principalement des travaux de Piispanen [pii37], d'Ernst et Merchant [ern38, mer45] et de Lee et Shaffer [lee51] portant sur la physique de la formation du copeau et de ceux de Trigger et Chao [tri51] et de Loewen et Shaw [loe54] qui développèrent des modèles précis des

températures de coupe.

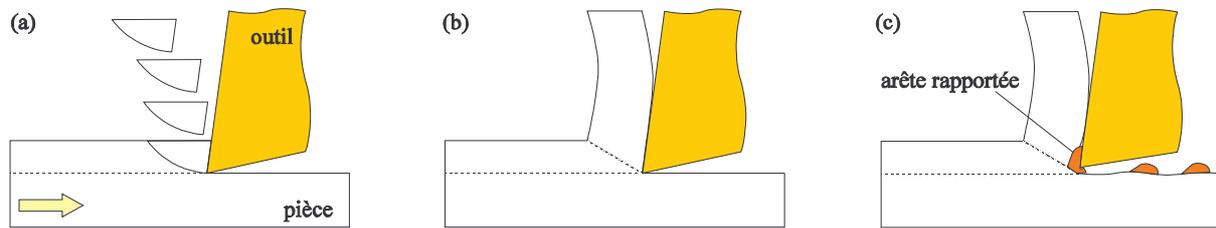


Figure 32 : mécanismes de formation du copeau

En pratique, on peut observer trois mécanismes de formation du copeau (figure 32) :

- a) copeau discontinu,
- b) copeau continu,
- c) copeau continu avec arête rapportée (*built-up edge*).

La formation de copeaux discontinus est caractéristique des matériaux fragiles (fontes). Pour les matériaux ductiles (aciers, alliages d'aluminium), on obtient généralement un copeau continu. Cependant, lorsque la vitesse de coupe est trop faible, il arrive que le métal adhère à la pointe de l'outil, ce qui produit une *arête rapportée*. Il s'agit d'un régime de coupe instable. L'arête rapportée croît puis se disloque partiellement lorsqu'elle atteint une taille critique. Elle adhère alors à la surface usinée tandis qu'une nouvelle arête rapportée se forme. On s'efforce toujours d'éviter ce régime de coupe à cause du mauvais état de surface obtenu et de l'usure importante des outils.

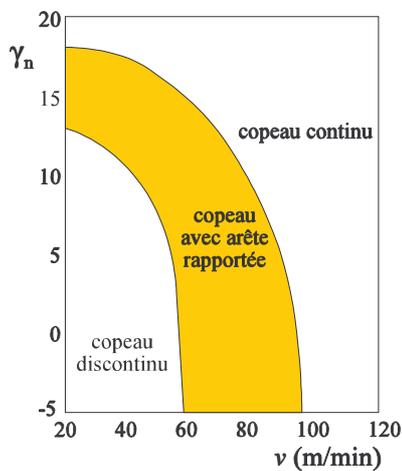


Figure 33 : types de copeau

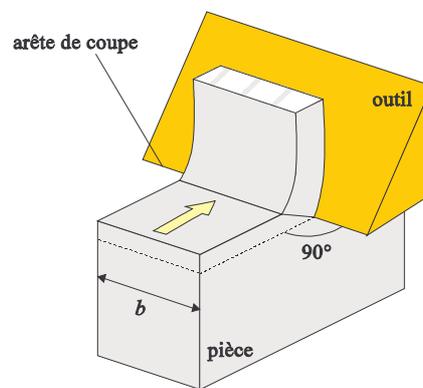


Figure 34 : rabotage

Un même matériau peut former les trois types de copeau selon les conditions de coupe. La figure 33 illustre l'influence de la vitesse de coupe et de l'angle de coupe normal sur le type de copeau formé.

1.3.2. Modélisation de la coupe orthogonale

Pour expliquer la physique de la coupe, les scientifiques se sont dans un premier temps limités au modèle de la *coupe orthogonale ouverte*. L'arête de coupe est perpendiculaire à la direction de coupe et l'outil est plus large que la pièce, ce qui rend le problème bi-dimensionnel. Ce type de coupe ne se rencontre en pratique que pour des opérations comme le rabotage d'une pièce moins large que l'outil (figure 34) ou le dressage au tour d'un cylindre creux.

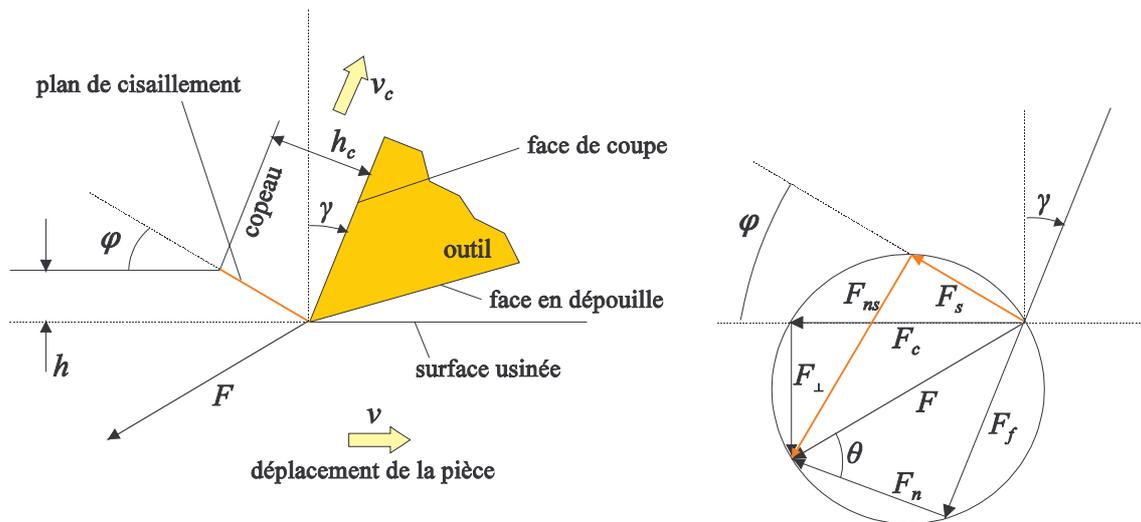


Figure 35 : plan de cisaillement et décompositions de l'effort total appliqué par l'outil

La face de coupe de l'outil est inclinée d'un angle γ par rapport à la normale à la surface usinée. Cet angle est appelé *l'angle de coupe*. L'épaisseur du copeau formé h_c est toujours plus grande que l'épaisseur de coupe h . Le rapport de coupe r_c , qui est le rapport entre h et h_c , est donc toujours inférieur à l'unité. La vitesse relative entre l'outil et la pièce est la vitesse de coupe v . La conservation du débit de matière implique que la vitesse d'écoulement du copeau v_c est toujours inférieure à la vitesse de coupe, ce qui correspond au fait que l'outil freine la matière.

L'analyse théorique de la formation du copeau présuppose que :

- le copeau est continu,
- l'outil est indéformable et parfaitement pointu.

D'après Piispanen, le copeau est formé par cisaillement le long d'un plan incliné d'un angle φ sur la surface usinée (figure 35). L'angle de cisaillement φ est lié au rapport de coupe $r_c = h / h_c$ et à l'angle de coupe γ par

$$\tan \varphi = \frac{r_c \cos \gamma}{1 - r_c \sin \gamma} \quad (10)$$

L'angle de cisaillement φ peut être obtenu expérimentalement en mesurant l'épaisseur du copeau h_c , l'épaisseur de coupe h et l'angle de coupe γ étant connus. L'effort total appliqué par l'outil sur la pièce est noté F . Il peut être décomposé selon plusieurs systèmes d'axes suivant le référentiel choisi,

$$\begin{array}{l}
 F_n = F \cos \theta \\
 \text{face de coupe :} \quad F_t = F \sin \theta \\
 \tan \theta = \frac{F_t}{F_n} = \mu \\
 \hline
 F_c = F \cos(\theta - \gamma) \\
 \text{axes de coupe :} \quad F_{\perp} = F \sin(\theta - \gamma) \\
 \hline
 F_s = F \cos(\varphi + \theta - \gamma) \\
 \text{plan de cisaillement :} \quad F_{ns} = F \sin(\varphi + \theta - \gamma)
 \end{array}$$

Les forces F_c et F_{\perp} peuvent être mesurées grâce à une platine dynamométrique, ce qui permet de déterminer l'angle θ , appelé angle de frottement, par

$$\theta = \gamma + \arctan \frac{F_{\perp}}{F_c} \quad (11)$$

Connaissant la valeur de l'effort total F et les angles φ et θ , on calcule aisément les décompositions de l'effort total selon la face de coupe et le plan de cisaillement. L'aire du plan de cisaillement A_s est donnée par

$$A_s = \frac{A}{\sin \varphi} = \frac{b h}{\sin \varphi} \quad (12)$$

où b est la largeur de coupe (figure 34), h est l'épaisseur de coupe et A est l'aire initiale du copeau. La contrainte de cisaillement apparente, notée τ_s , est égale à F_s / A_s . Pour des matériaux ductiles tels que les aciers à faible pourcentage de carbone et les alliages d'aluminium, la contrainte de cisaillement τ_s est sensiblement constante et vaut environ un tiers de la dureté Brinell du matériau [ste97].

La base du modèle de Ernst et Merchant est que *l'angle de cisaillement φ doit rendre minimum la puissance nécessaire à la coupe*. La puissance de coupe est égale au produit de la vitesse de coupe v par la force de coupe F_c . Pour trouver la condition de minimum, il faut d'abord exprimer F_c en fonction de l'angle de cisaillement φ . En utilisant les diverses décompositions de l'effort total F et la définition de τ_s , on obtient

$$F_c = \frac{\tau_s A}{\sin \varphi} \frac{\cos(\theta - \gamma)}{\cos(\varphi + \theta - \gamma)} \quad (13)$$

En dérivant par rapport à φ , on trouve que la puissance de coupe est minimum lorsque l'angle de cisaillement φ vérifie l'expression suivante

$$\varphi = 45^\circ - \frac{\theta}{2} + \frac{\gamma}{2} \tag{14}$$

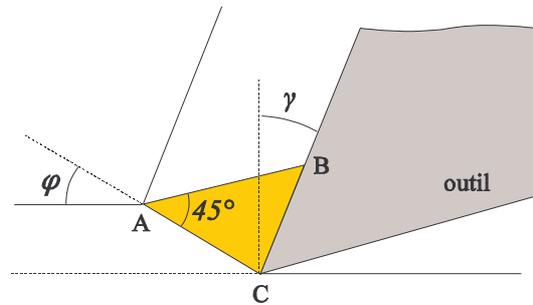


Figure 36 : zone de plasticité

Lee et Shaffer [lee51] ont proposé un modèle basé sur la *théorie de la plasticité*. Le comportement du matériau est supposé *parfaitement rigide plastique*, c'est-à-dire que les déformations élastiques sont négligées. Le matériau est en état de plasticité naissante dans une zone représentée par le triangle ABC (figure 36), qui va de la pointe de l'outil à la surface libre selon un angle φ et qui rejoint la face de coupe au point B. L'équilibre du triangle ABC donne la relation suivante

$$\varphi = 45^\circ - \theta + \gamma \tag{15}$$

La figure 37 montre la relation entre l'angle de cisaillement φ et l'angle $\theta - \gamma$ obtenue expérimentalement pour trois matériaux et les solutions de Ernst et Merchant et de Lee et Shaffer. Pour un grand nombre de matériaux, ces deux solutions ne coïncident pas avec les résultats obtenus expérimentalement.

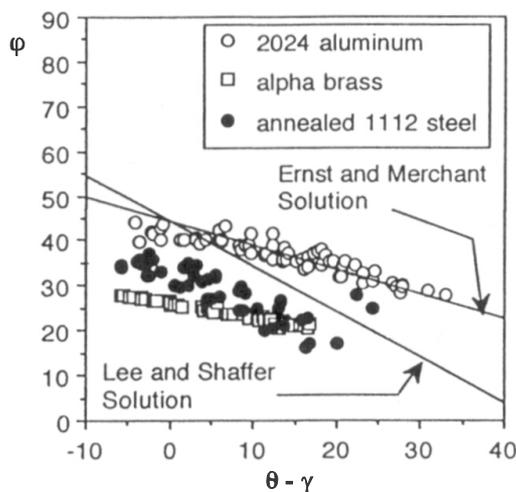


Figure 37 : solutions de Ernst et Merchant et de Lee et Shaffer [ste97]

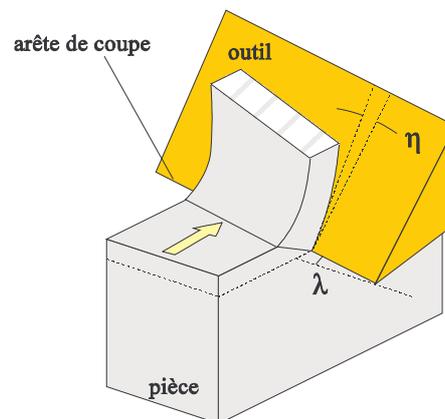


Figure 38 : coupe oblique

Des modèles semblables ont été développés pour la *coupe oblique* (figure 38) par Merchant [mer44], Shaw *et al.* [sha52] et Zorev [zor66]. En coupe oblique, l'arête de coupe n'est plus orthogonale à la direction de déplacement mais forme un angle noté λ . Le copeau s'écoule selon un angle η qui, d'après la loi de Stabler [sta51], est égal à l'angle d'inclinaison de l'arête λ . D'après Debongnie [deb04], l'écoulement du copeau suit une loi similaire à celle de Descartes relative à la diffraction de la lumière (figure 39a), soit

$$\sin \eta = \frac{v_c}{v} \sin \lambda \quad (16)$$

où v_c est la vitesse d'écoulement du copeau et v est la vitesse de coupe. La matière est toujours freinée par l'outil, ce qui correspond à un angle d'écoulement toujours plus petit que l'angle d'inclinaison (figure 39b). Cependant, il est possible d'observer expérimentalement des angles d'écoulement plus grands que l'angle d'inclinaison de l'arête car, en coupe oblique, la largeur du copeau b_c peut être plus petite que la largeur de coupe b [bro64].

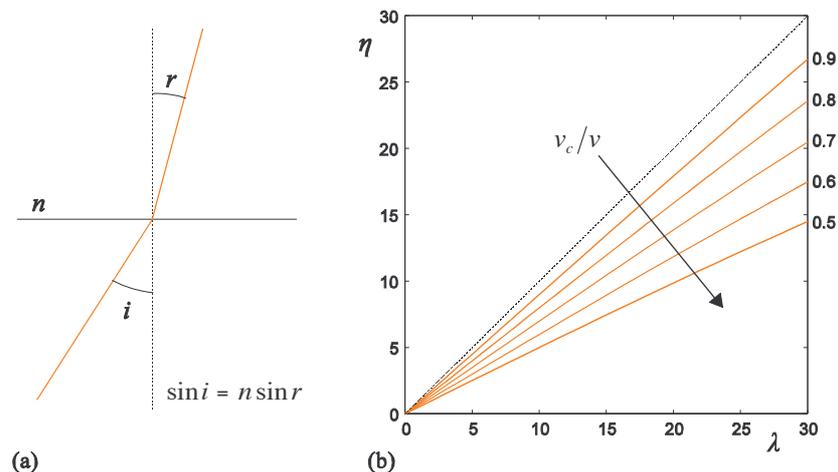


Figure 39 : loi de Descartes (a) et loi d'écoulement du copeau (b)

1.3.3. Complexité de la modélisation de la coupe

Plusieurs raisons peuvent expliquer la faible concordance entre les premiers modèles analytiques et la réalité :

- la zone de déformation ne se limite pas à un plan,
- le matériau s'écroute à cause de la vitesse de déformation,
- la température adoucit le matériau,
- le frottement est en partie collant et en partie glissant.

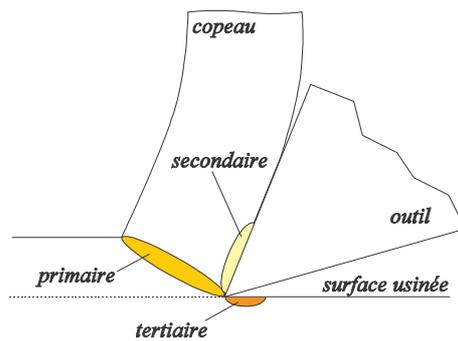


Figure 40 : zones de déformation

On distingue généralement trois zones de cisaillement (figure 40) : la première va de la surface libre jusqu'à la pointe de l'outil, la seconde se trouve le long de la face de coupe et la troisième se trouve en dessous de la face en dépouille de l'outil. Dans ces zones, le taux de déformation est très élevé (figure 41). Comme la taille des zones de déformations est relativement petite et que le débit de matière est très important, la vitesse de déformation de la matière atteint des valeurs extrêmement élevées, que l'on ne rencontre dans aucun autre procédé, excepté les impacts balistiques. Avec les matériaux de coupe actuels, on peut atteindre des vitesses de coupe de l'ordre de 10000 m/min pour les alliages d'aluminium, ce qui équivaut à des vitesses de déformation de l'ordre de 10^6 ou 10^7 s^{-1} .

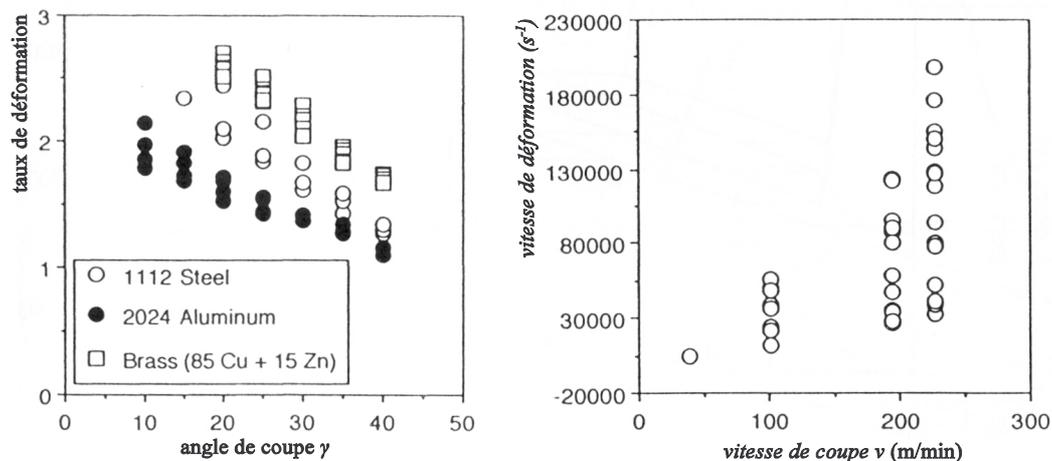


Figure 41 : taux de déformation et vitesse de déformation [ste97]

Lors de la coupe, la contrainte de cisaillement atteint des valeurs plus élevées que les contraintes mesurées lors de tests de traction ou de torsion réalisés à faible vitesse. Cela s'explique par le fait que la plupart des métaux se durcissent lorsqu'ils atteignent des vitesses de déformation supérieures à 10^4 s^{-1} [ste97]. *A contrario*, la température atteinte dans les zones de déformation a pour effet d'adoucir le matériau. La température augmente environ comme la racine carrée de la vitesse de coupe. Pour des matériaux comme les alliages d'aluminium, la température peut approcher localement la température de changement de phase.

Le frottement entre le copeau et l'outil joue un très grand rôle dans la coupe des métaux. Il influence notamment la température atteinte dans le copeau et dans l'outil, et il est à l'origine de l'usure de l'outil. Le moyen le plus simple de prendre en compte le frottement est de considérer un coefficient de

frottement moyen $\mu = \tan \theta$ égal au rapport entre la force normale F_n et la force tangentielle à la face de coupe F_t . Expérimentalement, on constate que le coefficient de frottement augmente avec l'angle de coupe et qu'il dépend de la vitesse de coupe (figure 42). Il est maximum pour de faibles vitesses de coupe puis il tend vers une valeur plus faible lorsque la vitesse augmente. Sur le graphique, on voit clairement la présence d'un phénomène d'arêtes rapportées (*built-up edges*) pour de faibles vitesses de coupe et pour un angle de coupe (*rake angle*) de 10° . On remarque aussi que le coefficient de frottement peut atteindre des valeurs plus grandes que l'unité, contrairement à ce que donnent des tests de frottement classiques. Cela s'explique par le fait que la surface du copeau en contact avec l'outil est une *surface naissante* et donc automatiquement propre [ste97].

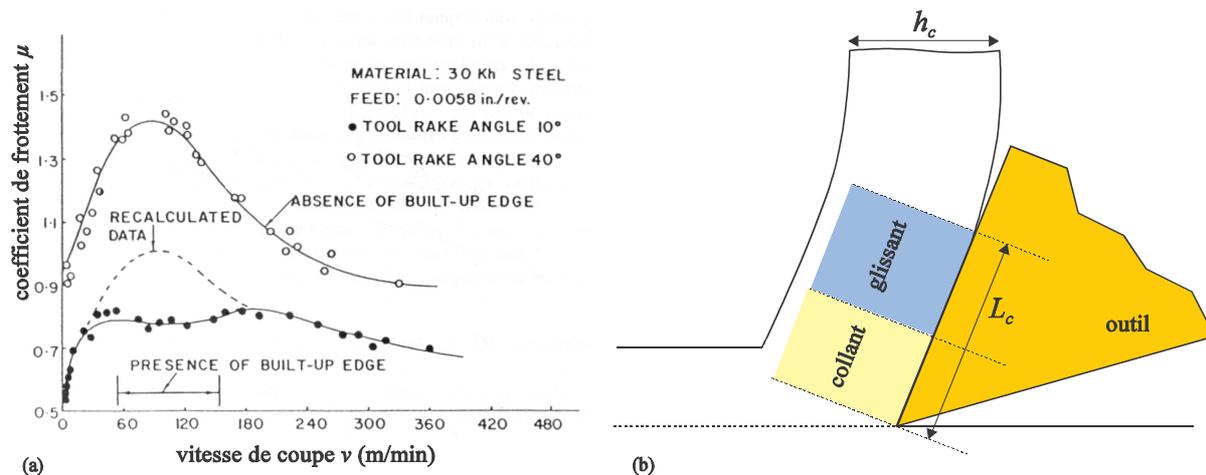


Figure 42 : coefficient de frottement moyen [ste97] et frottement collant/glissant sur la zone de contact copeau/outil

La longueur de contact entre le copeau et l'outil, notée L_c , est proportionnelle à l'épaisseur du copeau formé h_c . Selon les matériaux, elle vaut entre 1.5 et 2 fois l'épaisseur. Le frottement n'est pas constant sur toute la zone de contact (figure 42a). Sur la première partie, du côté de l'arête de coupe (figure 42b), il s'agit de frottement collant tandis que sur la seconde partie, il s'agit de frottement classique. Des tests ont montré que ces deux zones ont sensiblement la même longueur [ste91].

A partir des années 50, de nombreux scientifiques ont tenté d'améliorer et d'enrichir les modèles de la coupe. Tous ces travaux sont basés sur le fait que le cisaillement du matériau se produit dans un volume (*Shear zone models*) et plus seulement sur un plan. Ils intègrent les phénomènes propres à la coupe comme le durcissement du matériau, l'effet de la température et le frottement à l'interface copeau/outil. Le modèle le plus connu est celui de Palmer et Oxley [pal59, oxl89]. La grande majorité de ces modèles n'ont pas eu une très grande diffusion car ils requièrent un grand nombre de paramètres difficiles à identifier à partir de mesures simples.

Les premiers modèles purement numériques sont apparus au début des années 70. Ils étaient basés sur une approche *lagrangienne* : la pièce est fixe tandis que l'outil se déplace, la topologie du maillage restant constante. Ce type d'approche requiert de partir de l'état initial de la pièce, ce qui la rend peu adaptée à la modélisation de la coupe en régime établi (copeau continu), vu le coût de calcul important associé à ce type d'analyse. Plus tard, une formulation *eulérienne* a été adoptée. Elle consiste à voir l'outil comme un volume fixe et le matériau comme un fluide s'écoulant autour de ce volume (figure 43). Contrairement à l'approche lagrangienne, elle ne nécessite pas de partir de l'état initial, ce qui permet d'analyser la formation du copeau en régime établi. A l'heure actuelle, ce type d'analyse est basé sur une approche mixte (ALE - *Arbitrary Lagrangian Eulerian*).

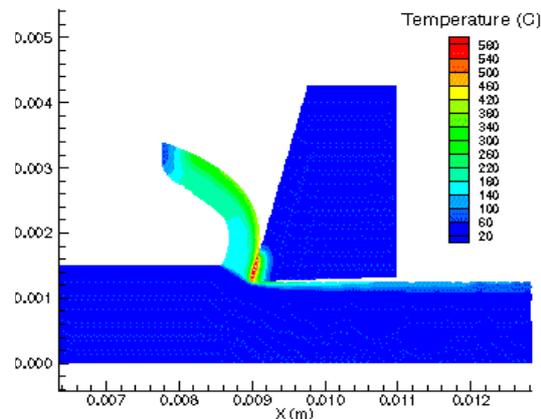


Figure 43 : formulation eulérienne [thi04]

Le but de la simulation de la coupe est de prévoir le comportement du système comme l'usure de l'outil, la température ou les forces de coupe, ce qui doit permettre de s'affranchir des mesures expérimentales. Malheureusement, elle présente encore à l'heure actuelle de nombreuses difficultés :

- le coût de calcul reste très élevé malgré le développement des méthodes de calcul et des ordinateurs; une analyse à deux dimensions nécessite quelques heures de calcul; la modélisation de la coupe générale *oblique* et *fermée*, qui correspond à la grande majorité des opérations d'usinage (fraisage, tournage), requiert une analyse à trois dimensions, ce qui augmente considérablement le temps de calcul;
- les modèles de comportement du matériau sont encore trop peu fiables car on n'arrive pas encore à reproduire expérimentalement les conditions réelles de la coupe, en particulier les vitesses de déformation. Le dispositif expérimental permettant de s'approcher le plus près des conditions réelles ne permet de reproduire que des vitesses de déformation de 100 à 1000 fois plus faibles que celles observées lors de la coupe. On utilise donc en simulation de la coupe des modèles de comportement du matériau qui ne sont pas validés expérimentalement;
- la majorité des modèles ne sont applicables qu'au seul cas du copeau continu; pour les copeaux discontinus, caractéristiques des matériaux fragiles comme les fontes, et pour les arêtes rapportées, il existe peu de résultats probants.

Depuis maintenant une trentaine d'années, de nombreuses équipes de recherche travaillent sur le développement de modèles numériques. Les travaux les plus importants sont ceux de Strenkowski et Caroll [str85], Strenkowski et Moon [str90] et Iwata *et al.* [iwa84]. Cependant, la simulation de la coupe est encore fort peu utilisée dans l'industrie. A l'heure actuelle, il n'y a guère que les principaux fabricants d'outils (SECO, SANDVIK-COROMANT) qui soient directement intéressés par les développements dans ce domaine.

Les industries manufacturières se préoccupent surtout des pièces qu'elles produisent. Les problèmes d'usure et de durée de vie des outils sont souvent réglés par les fournisseurs d'outils coupants ou grâce à des méthodes empiriques. Les forces de coupe, qui ont un effet direct sur les déformations des pièces et des éléments de serrage, sont également calculées grâce à des modèles empiriques, comme celui de Kienzle par exemple (*cf.* chapitre 2.3). Ainsi, malgré son réel attrait, la simulation de la coupe des métaux mettra sans doute encore très longtemps avant d'être utilisée à grande échelle car il subsiste encore de nombreuses questions de fond qui ne trouveront sans doute de réponses que dans un avenir assez lointain.

La simulation de la coupe est très souvent dénommée de manière abusive *simulation de l'usinage*, alors

même que la coupe n'est que l'aspect local de l'usinage. Dans le présent travail, nous étudions plutôt l'aspect global du problème : les déformations du système et les effets induits sur les pièces réalisées, à savoir les déviations géométriques des surfaces usinées et les problèmes de vibrations. Ce type d'approche correspond sans doute mieux que la simulation de la coupe aux besoins des entreprises manufacturières pour lesquelles la pièce reste la préoccupation numéro un.

1.4. Conception de gammes d'usinage

1.4.1. Outils d'aide à la conception

Pour effectuer leur travail, les concepteurs de gammes d'usinage s'appuient sur des logiciels de CFAO comme CATIA/DELMIA ou PRO-ENGINEER. Ces logiciels intègrent depuis quelques années des modules spécifiques à la fabrication. A partir d'une maquette numérique de la pièce, toutes les tâches classiques comme la création de chaînes de cotes ou l'écriture de programmes machines sont automatisées, ce qui allège considérablement le travail des *gammistes*.

Cependant, ces logiciels ne reflètent pas le comportement réel de l'usinage car ils sont limités à un concept très restrictif : le système pièce-outil-machine est *infinitement rigide*. Or, la flexibilité du système est la cause de deux problèmes majeurs :

- les *déviations géométriques* des surfaces usinées par rapport aux surfaces nominales,
- les *problèmes de vibration*.

Concevoir une gamme sans intégrer ces deux problèmes représente toujours un risque. En pratique, les gammes sont toujours validées expérimentalement avant de lancer la production. Cette phase de test est réalisée sur des pré-séries. Elle demande beaucoup d'investissements en temps et en moyens : réaliser les pièces brutes et les éléments du montage, usiner les pièces, contrôler les surfaces, ... En cas de non-conformité, il faut alors modifier la gamme, voire même modifier la conception de la pièce, ce qui allonge énormément les temps de mise au point. L'intégration des erreurs géométriques et des aspects dynamiques dans la chaîne de CFAO permet de limiter fortement le risque de mauvaises conceptions.

La prévision des erreurs géométriques et des problèmes d'instabilités dynamiques a pour but de régler au mieux les *opérations* et la *conception de la pièce*. Au niveau de la conception de la pièce, le bureau des méthodes peut proposer des modifications au bureau d'études afin d'améliorer les propriétés de la pièce d'un point de vue usinage : rigidifier certaines zones, modifier les zones de bridage, ...

Pour une opération d'usinage, les trois paramètres sur lesquels on peut jouer sont :

- la prise de pièce,
- l'outil et sa trajectoire,
- les conditions de coupe.

La prise de pièce est un des aspects les plus critiques dans la conception d'une gamme d'usinage. Les efforts de serrage doivent être suffisamment importants pour empêcher la pièce de bouger. Par contre, il faut éviter au maximum de déformer la pièce pour ne pas engendrer un défaut de forme trop grand lors de l'usinage. Satisfaire ces deux exigences n'est pas toujours simple, surtout si la pièce est relativement souple. Le rôle du bridage est aussi de limiter les déformations de la pièce durant l'usinage. Théoriquement, plus les points d'appuis de la pièce sont nombreux, plus elle est rigide, ce qui est bénéfique tant pour les erreurs de la surface que pour les problèmes de vibrations. Cependant, en pratique, on doit limiter le nombre de supports car les surfaces d'appui ne sont jamais parfaites et la

multiplication des supports risquerait de déformer la pièce lors du serrage³. Il faut donc trouver les zones d'appuis les plus appropriées en testant plusieurs configurations du bridage.

Le choix de l'outil et de sa trajectoire est aussi un aspect très important, spécialement en fraisage où l'on a une grande latitude sur les paramètres : diamètre, nombre de plaquettes, trajectoire centrée ou non, direction de déplacement, trajectoire complexe (plusieurs segments rectilignes et circulaires). En tournage et en alésage par contre, il y a moins de choix possibles, notamment pour la trajectoire. Enfin, le choix des conditions de coupe est fortement lié au choix de l'outil et on a donc moins de liberté sur ces paramètres.

Le problème des erreurs géométriques ne se limite pas aux opérations de finition. Il arrive très souvent qu'une surface soit usinée afin de servir de surface d'appui pour une opération ultérieure. En effet, pour les passes de finition, on évite généralement de s'appuyer sur des surfaces brutes car celles-ci ne permettent pas un positionnement précis et une fixation optimale de la pièce à cause de leur trop grandes déviations géométriques (cote, forme). Pour obtenir un bon résultat, une surface d'appui doit aussi satisfaire des tolérances, même si ce n'est pas une surface finie de la pièce. Dans ce cas, ce ne sont plus des tolérances imposées par le bureau d'études mais des *tolérances de fabrication*. L'exemple de la figure 44 illustre ce principe. Lorsqu'on ébauche la face inférieure du carter-cylindres, l'erreur de planéité de cette face doit être inférieure à une certaine tolérance car elle sert de surface d'appui pour les opérations ultérieures.

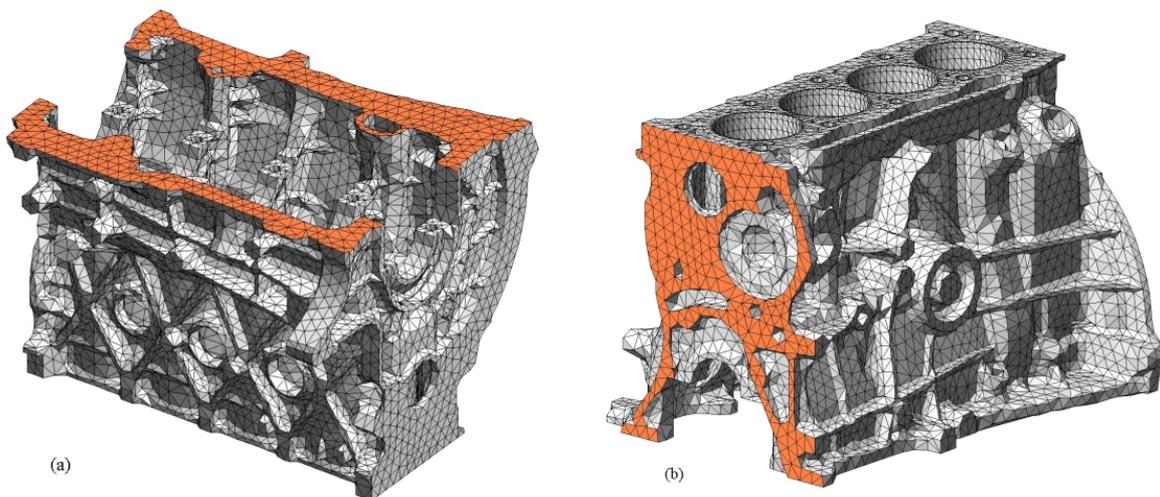


Figure 44 : ébauche de la face 600 du carter-cylindres (a) et posage sur la face 600 pour usiner la face 300 (b)

1.4.2. Erreurs géométriques

Lors d'une opération d'usinage, le système pièce-outil-machine se déforme. Ces déformations peuvent être de plusieurs natures : mécaniques, thermiques, ... En un point de la surface usinée, la hauteur de matière coupée n'est donc pas égale à la valeur prescrite. Comme l'outil se déplace, les déformations du système varient durant l'usinage. Les déviations de la surface usinée par rapport à la surface nominale (un plan ou un cylindre) sont dues au fait que la hauteur de matière coupée fluctue tout au long de la surface. Dans ce travail, nous ne considérons que les déformations de la pièce et du dispositif de fixation,

³ En fait, seules des conditions d'appui *isostatiques* assurent un serrage non-déformant (cf. chapitre 2.2).

le reste du système étant supposé infiniment rigide.

Afin d'illustrer ce qu'est le défaut d'usinage, prenons le cas du chariotage d'un barreau cylindrique monté entre pointes (figure 45a). Supposons que seule la pièce se déforme sous l'effet de la force passive (radiale) appliquée par l'outil. Le barreau peut être modélisé par une poutre de longueur L et de diamètre D simplement supportée à ses extrémités et soumise à une charge radiale constante F_p qui se déplace d'une extrémité à l'autre (figure 45b). Lorsque l'outil est situé en $z = a$, la déformée de la pièce est donnée par

$$\begin{cases} x(z) = \frac{F_p (L-a)z}{6LEI} [z^2 - a(2L-a)] & \text{pour } z \leq a \\ x(z) = \frac{F_p a(L-z)}{6LEI} [(L-z)^2 + a^2 - L^2] & \text{pour } z > a \end{cases} \quad (17)$$

où E le module de Young du matériau et I le moment d'inertie de la section circulaire [mas86]. Le déplacement radial de la pièce au droit de l'outil vaut

$$d(a) = -\frac{F_p a^2 (L-a)^2}{3LEI} \quad (18)$$

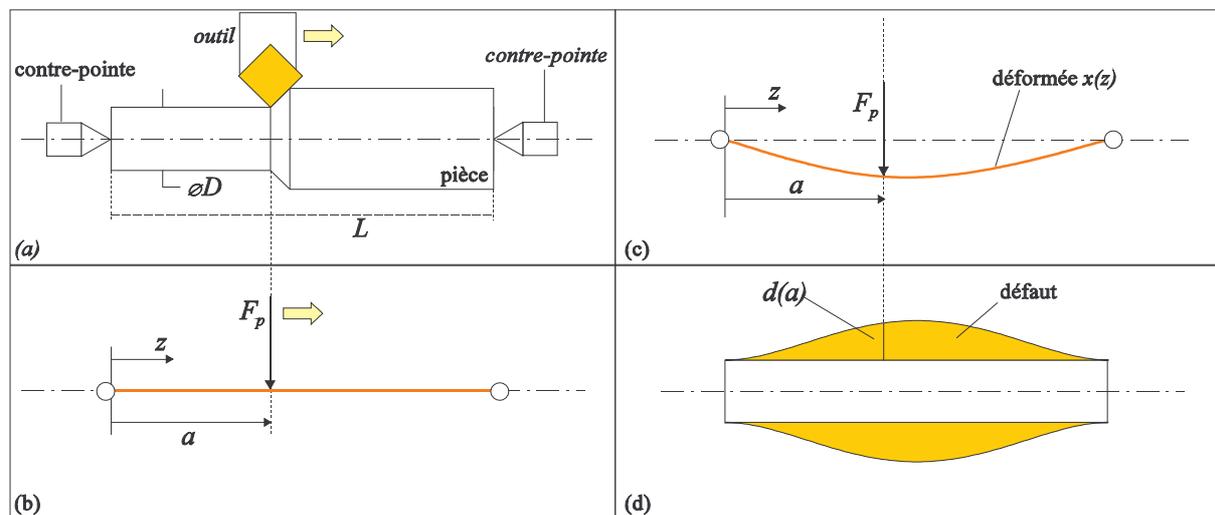


Figure 45 : modélisation et défaut de forme d'un barreau monté entre pointes

Comme la pièce recule par rapport à l'outil, celui-ci laisse donc en chaque point de la surface une hauteur de matière, que nous appellerons *défaut*, égale à $-d(a)$. Le défaut est nul aux extrémités et maximum au milieu du barreau où il vaut $F_p L^3/48EI$. L'équation (18) est aussi l'équation de la génératrice de la surface usinée obtenue après l'opération d'usinage (figure 45d).

Des modèles plus complets du chariotage de barreaux cylindriques ont été proposés par plusieurs auteurs [deb94, deb95, kop93, may00]. Tous ces modèles sont basés sur les formules classiques de la résistance des matériaux. Les différents types de montage d'un barreau sont étudiés. Outre l'effet de la force passive, ils permettent aussi de prendre en compte l'effet de la force d'avance (axiale) et la souplesse des

éléments du montage (mandrin ou contre-pointe). Enfin, l'effet de l'enlèvement de matière peut également être modélisé en considérant un barreau constitué de deux cylindres de diamètres différents, le diamètre initial d_1 et le diamètre final d_2 (figure 46).

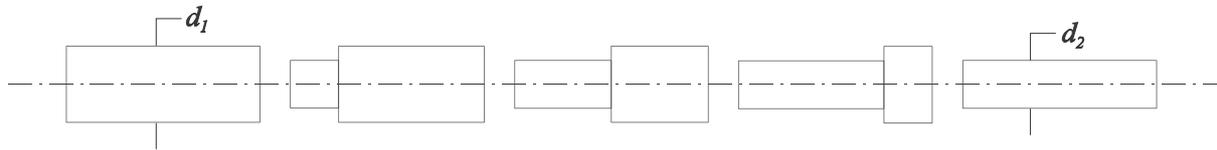


Figure 46 : prise en compte de l'enlèvement de matière dans la modélisation du défaut d'un barreau cylindrique

Ces modèles analytiques ne s'appliquent qu'aux pièces cylindriques. Cependant, on peut déjà observer plusieurs aspects essentiels propres à la modélisation des erreurs géométriques :

- le défaut en un point de la surface usinée est engendré lorsque l'outil coupe ce point. La valeur du défaut en ce point est égale à l'opposé du déplacement compté sur la normale à la surface usinée;
- l'erreur globale de la surface est obtenue en calculant le défaut de plusieurs points, ce qui requiert le calcul de plusieurs déformées de la pièce;
- la géométrie de la pièce évolue au cours de l'usinage. Comme l'outil enlève de la matière, la raideur de la pièce diminue constamment.

1.4.3. Problèmes dynamiques

Les vibrations font partie intégrante de l'usinage. Le système machine-outil-pièce est, par essence, toujours enclin à vibrer. Les vibrations se manifestent par le fait que le déplacement relatif entre la pièce et l'outil oscille, ce qui engendre une ondulation sur la surface usinée. Outre la dégradation de la surface réalisée, les vibrations entraînent aussi une diminution de la durée de vie des outils, à cause des chocs et du frottement qu'elles génèrent. Dans certains cas, les vibrations peuvent entraîner la casse de l'outil ou de la broche. Un niveau de vibration trop élevé est toujours à proscrire. Il faut veiller à limiter les vibrations par un choix approprié des conditions de coupe ou des caractéristiques dynamiques du système (raideur, amortissement). En usinage, les deux principaux mécanismes de vibration du système sont les vibrations forcées et les vibrations auto-excitées.

Vibrations forcées

Les vibrations forcées se produisent lorsque le système est soumis à une sollicitation périodique dont la fréquence est proche d'une des fréquences propres du système. Ce type de vibrations survient la plupart du temps pour des opérations où les forces de coupe fluctuent (coupe interrompue). En cas de vibrations forcées, les ondulations sur la surface usinée ont la même période que celle de la force d'excitation. La meilleure manière de se prémunir contre les vibrations forcées est de s'assurer que la fréquence d'excitation est suffisamment loin des fréquences propres du système. Celles-ci peuvent être obtenues grâce à une analyse modale ou à un calcul par éléments finis des modes propres.

Vibrations auto-excitées (broutement)

A cause des chocs produits durant l'usinage, ceux dus à l'entrée des dents dans la matière par exemple, les différents composants du système ont une tendance naturelle à vibrer, généralement à une fréquence proche de leur première fréquence propre. Normalement, ces vibrations *libres* s'éteignent d'elles-mêmes à cause de l'amortissement du système. Cependant, dans certaines conditions, elles peuvent se régénérer. On parle alors de vibrations auto-excitées ou de *broutement*, *chatter* en anglais, à cause du bruit caractéristique que cela produit et qui fait penser à un *bavardage*. Le broutement est un phénomène très courant en usinage. Contrairement aux vibrations forcées, la fréquence de broutement correspond *toujours* à peu près à une des fréquences propres du système. C'est cette propriété qui permet de déterminer en pratique s'il s'agit de broutement ou de vibrations forcées. Si l'on change la fréquence de rotation de la machine et que la fréquence de vibration reste quasiment inchangée, il s'agit de broutement. Dans le cas contraire, il s'agit de vibrations forcées.

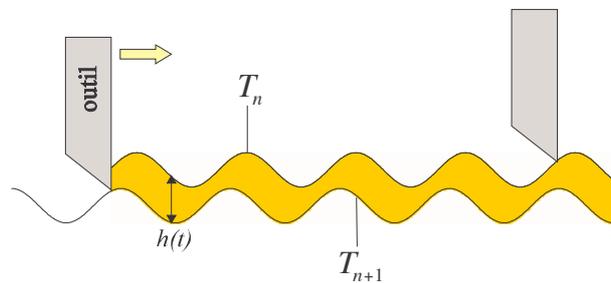


Figure 47 : variation de l'épaisseur du copeau

Le mécanisme du broutement peut s'expliquer selon le schéma de la figure 47. Prenons le cas du tournage d'un barreau. Supposons que seul l'outil vibre durant l'usinage à une fréquence f proche de sa fréquence naturelle f_0 . La surface *coupée*, c'est-à-dire la surface coupée continuellement par l'outil, présente une ondulation qui est engendrée par la vibration de l'outil. Au $n^{\text{ème}}$ passage, l'outil a laissé sur la surface coupée une ondulation noté T_n . Au passage suivant, l'outil laisse une ondulation T_{n+1} qui est déphasée par rapport à T_n d'un angle ε . Le nombre de périodes entre deux passages successifs vaut

$$n_p = \frac{f}{N} = n_e + \frac{\varepsilon}{2\pi} \quad (19)$$

où N est la fréquence de rotation du tour et n_e est le nombre de périodes entières entre deux passages successifs de l'outil.

L'épaisseur de coupe instantanée $h(t)$ est la différence entre les deux ondulations T_n et T_{n+1} . Elle présente une composante moyenne et une composante dynamique qui varie avec la même fréquence f que celle de l'ondulation. L'amplitude de la partie dynamique de $h(t)$ est nulle lorsque le déphasage ε est nul et elle augmente à mesure qu'il s'approche de 180° (figure 48). L'effort de coupe appliqué par l'outil dépend quasi linéairement de l'épaisseur de coupe. Par conséquent, il présente également une composante dynamique de fréquence f , ce qui tend à *entretenir* la vibration de l'outil. Si l'amortissement du système n'est pas suffisant pour dissiper l'énergie apportée par la composante dynamique de l'effort de coupe, la vibration de l'outil se régénère et le broutement apparaît.

Comme l'effort de coupe dépend linéairement de la largeur de coupe b , la force de régénération est d'autant plus grande que l'engagement de l'outil est grand. En pratique, le broutement se produit le plus souvent lors des *opérations d'ébauche*. Les opérations qui nécessitent un outil mince et/ou élancé sont

fort sujettes au broutement, comme par exemple l'usinage de poches, le contournage, le perçage, ... Notons que ces opérations représentent une grosse part du travail réalisé dans le domaine aéronautique, ce qui explique pourquoi le broutement est un des soucis majeurs dans ce domaine.

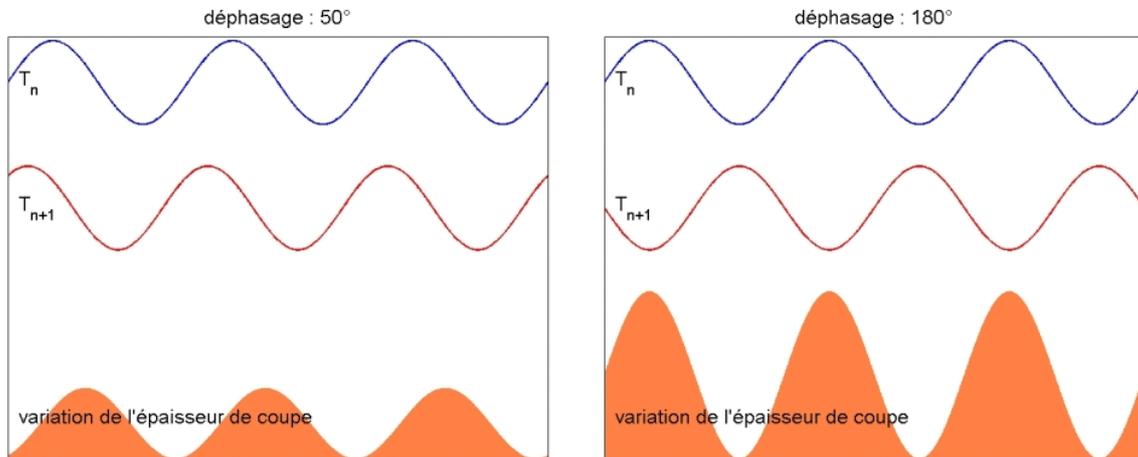


Figure 48 : amplitude de la partie dynamique de l'épaisseur de coupe en fonction du déphasage

Le broutement peut aussi être dû à un manque de rigidité de la pièce ou d'une partie de la pièce : parois minces, éléments en porte-à-faux, ... Par exemple, le fraisage d'ébauche des faces supérieures des carters-cylindres engendre très souvent du broutement à cause de la grande flexibilité des baignoires d'huile (figure 49).

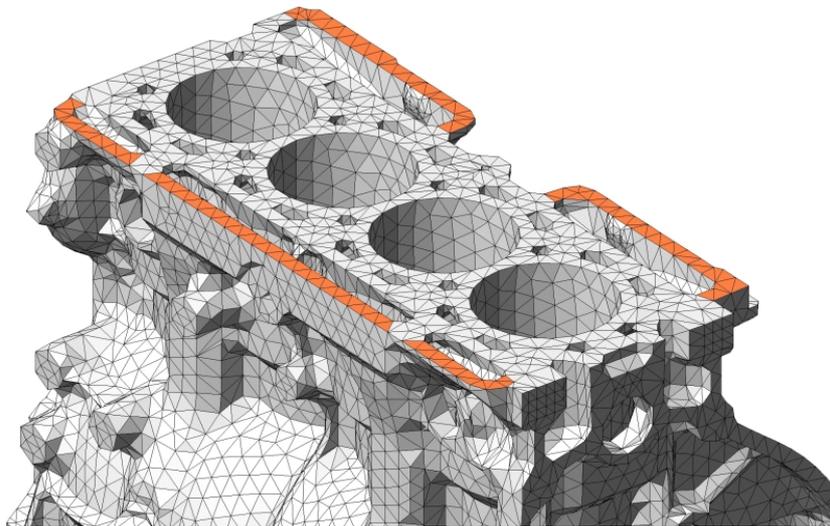


Figure 49 : baignoires d'huile du carter-cylindres D4 (RENAULT)

C'est ce type de problème que nous étudierons plus particulièrement dans le présent travail. Ici, le but de la modélisation n'est pas de déterminer la forme de la surface usinée comme pour les erreurs géométriques, mais de prévoir les conditions pour lesquelles les instabilités dynamiques peuvent survenir.

2. Modélisation

Les déviations géométriques de la surface usinée sont engendrées par les déformations du système durant l'usinage. Pour des pièces de forme quelconque, la réponse du système ne peut être obtenue que par voie numérique. Dans ce travail, nous utilisons la méthode des éléments finis pour calculer les déformations de la pièce sous les forces exercées par l'outil et par les éléments de serrage. En analysant les quelques travaux publiés dans la littérature scientifique, il ressort que deux méthodes sont utilisées pour obtenir la forme de la surface usinée : l'interpolation entre plusieurs déformées et la description temporelle du procédé d'usinage. Toutes deux présentent des inconvénients. Dès lors, nous proposons une modélisation originale basée sur la reconstitution de la forme de la surface usinée à partir du calcul des défauts aux noeuds du maillage. Pour le type d'applications que nous étudions dans ce travail, le comportement de la pièce peut être modélisé par une analyse en statique linéaire, mais celle-ci comporte un grand nombre de cas de charge. Le reste de ce chapitre est consacré à la modélisation des conditions de fixation, au calcul et à l'application des forces de coupe et à la modélisation de la recoupe en fraisage.

2.1. Modélisation du défaut d'usinage

2.1.1. Revue de la littérature

Schulz et Bimschas [sch93, sch94, bim94] proposent un modèle de simulation des opérations de fraisage et de tournage. Le principe est de calculer le défaut en plusieurs points de la surface usinée. A chaque point correspond une position de l'outil. Pour cette position, la géométrie de la pièce, décrite par un modèle CAO, est maillée avec un maillage volumique. Les forces de coupe sont alors appliquées au modèle d'éléments finis et la déformée correspondant à cette position de l'outil est calculée. La forme de la surface usinée s'obtient en interpolant les résultats aux points de calcul (figure 50) sur le maillage de surface de la pièce finie (figure 51).

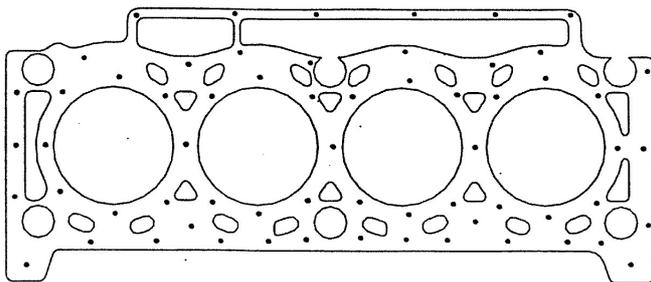


Figure 50 : points de calcul [sch94]

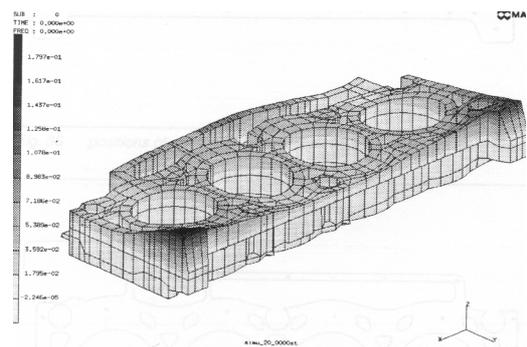


Figure 51 : interpolation [sch94]

Budak et Altintas [bud95] étudient les opérations de contournage (appelé aussi fraisage tangentiel) de plaques minces (figure 52). Ils prennent en compte les déformations de la pièce et de l'outil ainsi que la diminution de raideur due à l'enlèvement de matière. La fraise "deux tailles" est modélisée par une poutre élastique. Le modèle d'éléments finis ne présente qu'une seule couche d'éléments selon l'épaisseur de la pièce. La figure 53 montre la procédure utilisée pour tenir compte de l'enlèvement de matière : le noeud A et ceux situés en dessous sont déplacés transversalement de manière à passer de l'épaisseur initiale t_u à l'épaisseur finale t_c .

Les auteurs montrent que, pour ce type d'application où la raideur du système est relativement faible, il est nécessaire de tenir compte des déformations dans le calcul des forces de coupe. En effet, les déformations de l'outil et de la pièce sont sensiblement du même ordre de grandeur que la valeur nominale de l'engagement. Dès lors, le calcul est réalisé de manière itérative : forces → déformations → engagements → forces ...

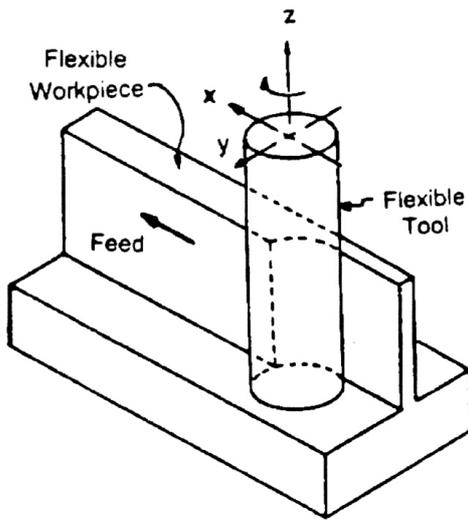


Figure 52 : contournage [bud95]

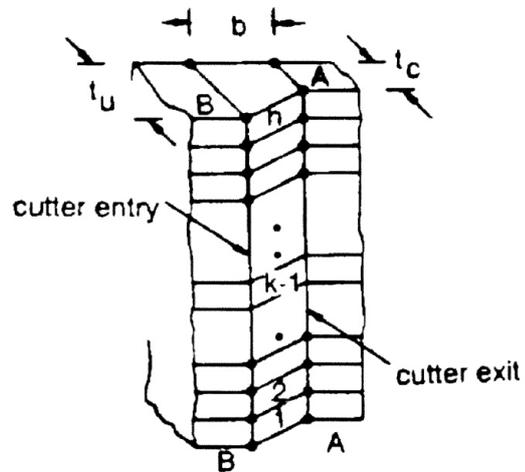


Figure 53 : mise à jour du maillage [bud95]

Gu *et al.* [gu97] proposent un modèle permettant de prédire le défaut de planéité d'une surface obtenue par fraisage en bout. Leur modèle est basé sur une description temporelle de l'usinage. A chaque pas de temps dt , l'outil avance d'une distance $v_f dt$ et tourne d'un angle $2\pi N dt$, v_f étant la vitesse d'avance et N la fréquence de rotation de l'outil. Pour chaque position, le défaut est calculé en un certain nombre de points qui correspondent aux points de la surface usinée coupés par la fraise à cet instant. Cette méthode requiert *a priori* le calcul d'un *très grand* nombre de déformées de la pièce. Afin de limiter le coût du calcul par éléments finis, ils n'étudient que le défaut de quelques lignes de points (figures 54 et 55). Leur modèle inclut également l'effet du dépinçage de la fraise et des déformations de l'outil. Les auteurs montrent que l'effet des déformations de la fraise sur le défaut de la surface usinée est négligeable par rapport à celui des déformations de la pièce.

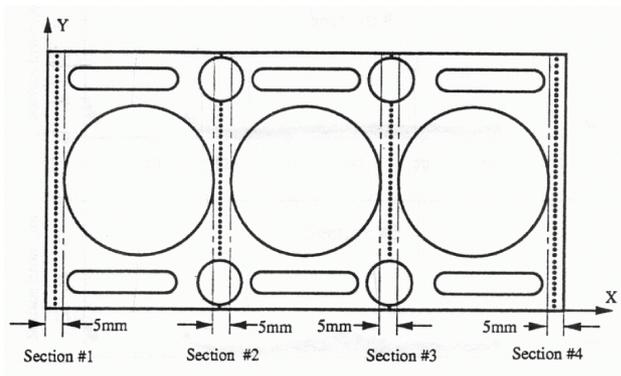


Figure 54 : profils de points de calculs [gu97]

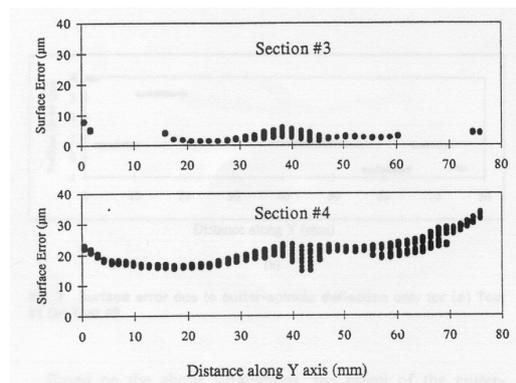


Figure 55 : résultats sur deux profils [gu97]

Liao [lia00] étudie le défaut de planéité des faces d'accouplement d'un carter-cylindres avec la culasse. Le modèle proposé est sensiblement le même que celui de Gu *et al.*⁴ sauf qu'ici, la réponse *dynamique* du système est calculée. L'analyse est réalisée par la méthode des éléments finis. L'application présentée est un bloc moteur V6 (figure 56). Le modèle d'éléments finis comporte environ 11000 éléments. Le calcul de la réponse dynamique du système est justifié par le caractère oscillant des forces appliquées par l'outil. La figure 57 montre l'évolution temporelle de la force passive (perpendiculaire à la surface) durant l'usinage et la puissance spectrale en fonction de la fréquence.

⁴ Ces auteurs font partie de l'équipe de simulation *process* de General Motors (*Powertrain Division*).

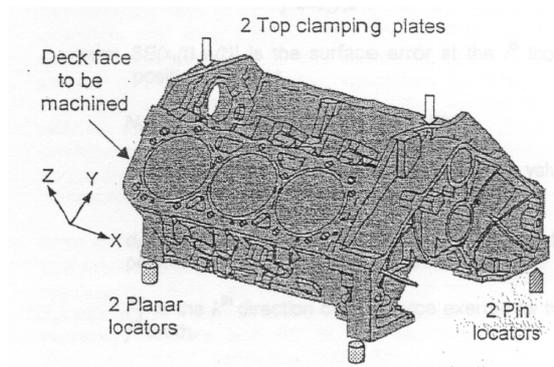


Figure 56 : carter-cylindres V6 [lia00]

Pour l'application présentée, la fréquence d'entrée des dents est de 357 Hz alors que la première fréquence propre du système est égale à 828 Hz. La contribution de la réponse dynamique dans l'erreur de la surface usinée est de 6 % seulement, les contributions statiques des forces de serrage et des forces d'usinage étant respectivement de 14 et de 80 %.

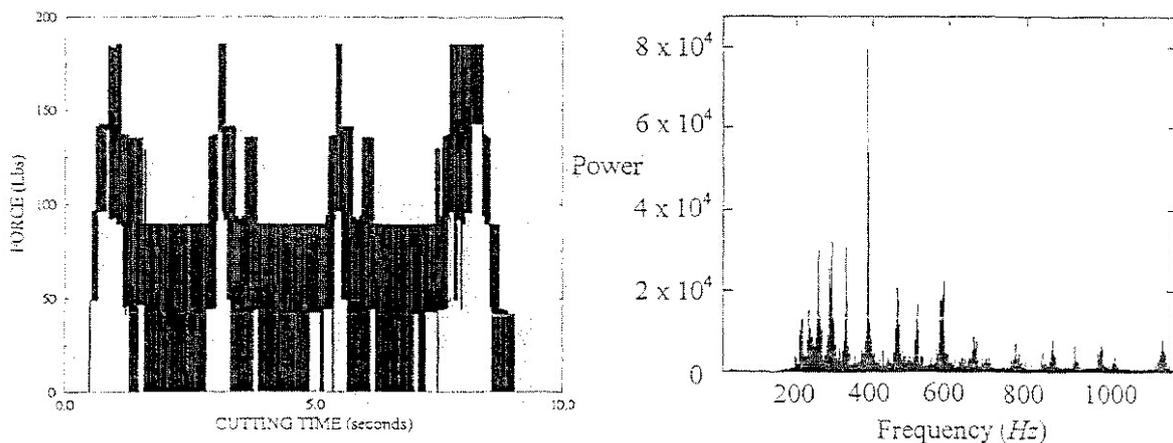


Figure 57 : évolution temporelle des forces de coupe et puissance spectrale du signal [lia00]

2.1.2. Discussion

Calcul de la réponse dynamique

Lorsque la coupe est continue (tournage, alésage), le calcul de la réponse dynamique n'est pas nécessaire car les sollicitations exercées par l'outil sont sensiblement constantes. Par contre, en coupe interrompue, la réponse du système est oscillante. Cependant, d'après les valeurs indiquées par Liao, la réponse statique du système est largement prépondérante lorsque la fréquence d'excitation est bien plus basse que la première fréquence propre du système (figure 58). En pratique, cette situation est souvent vérifiée car les montages et les pièces usinées sont relativement rigides. De plus, pour des matériaux comme la fonte ou l'acier, la vitesse de coupe est limitée. Enfin, en fraisage, on utilise souvent des outils de grand diamètre, ce qui implique une fréquence de rotation peu élevée si la vitesse de coupe est faible. Dans ces conditions, il est inutile de calculer la réponse dynamique.

Sur les machines-transferts, le dispositif de bridage est toujours adapté à la pièce usinée, ce qui permet d'avoir un montage très rigide. Par contre, sur les centres d'usinage, le système de fixation doit parfois être adaptable à plusieurs types de pièces, ce qui ne garantit pas toujours un système rigide. La figure 59

illustre le cas d'un système de bridage pouvant accueillir plusieurs types de carters-cylindres. Pour ce type de montage, il n'est pas certain que les fréquences propres soient largement plus hautes que la fréquence d'excitation. Pour s'en assurer, il suffit de réaliser un calcul par éléments finis des modes propres du système et de changer la configuration de l'usinage en cas de risques.

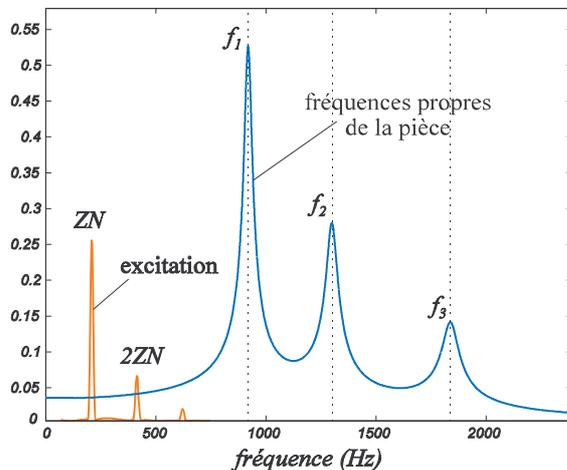


Figure 58 : position des fréquences d'excitation par rapport au spectre des fréquences propres du système

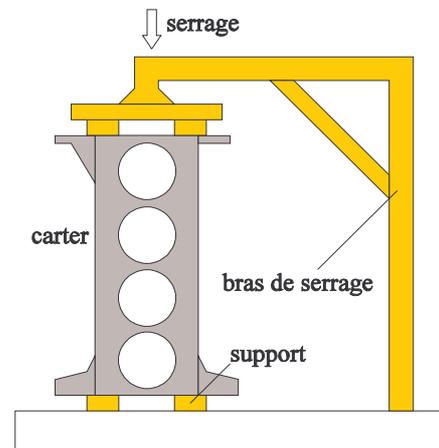


Figure 59 : montage sur machine flexible

Description de la surface usinée

Pour décrire la forme de la surface usinée, deux méthodes sont proposées dans la littérature : soit calculer le défaut pour un petit nombre de points et interpoler par la suite sur la surface entière, soit utiliser une description temporelle du processus d'usinage.

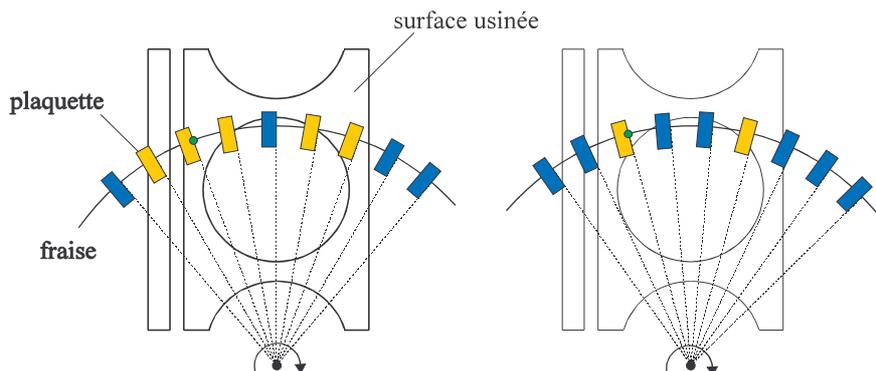


Figure 60 : plaquettes engagées dans la matière (en jaune) et inactives (en bleu)

La première solution présente deux défauts majeurs. Tout d'abord, il faut choisir les points de calcul *a priori*. Or, avant d'avoir réalisé la simulation, il n'est pas évident de savoir à quoi ressemblera le défaut de la surface usinée. Dès lors, il est malaisé de répartir les points de calcul de façon optimale. Enfin, la qualité de l'interpolation entre les défauts ponctuels calculés et le maillage de surface n'est pas garantie. En effet, en fraisage, les charges appliquées par l'outil sur la pièce fluctuent énormément car les dents entrent et sortent sans arrêt de la pièce. C'est d'autant plus vrai lorsque la surface usinée est très accidentée, comme par exemple sur les carters-cylindres. Ainsi, pour deux points proches appartenant

à la surface usinée (points coloriés en vert sur la figure 60), le nombre de plaquettes engagées dans la matière est très différent et, par conséquent, le chargement de la pièce et le défaut de ces deux points l'est également. Il faudrait donc un très grand nombre de points de calcul pour que le résultat de l'interpolation soit correct, ce qui enlève beaucoup d'intérêt à la méthode.

La deuxième solution, la description temporelle de l'usinage, consiste à partir de la position initiale de l'outil et à considérer les positions successives à chaque pas de temps dt . Pour chaque position, on doit calculer le défaut du point de la surface usinée se trouvant sous l'outil. En fraisage, plusieurs points de la surface se trouvent sous les dents de la fraise. Entre deux positions, l'outil parcourt une distance égale à $v_f dt$, et l'outil ou la pièce tourne d'un angle égal à

$$d\alpha = 2\pi N dt \quad (20)$$

En pratique, c'est plutôt le pas angulaire $d\alpha$ que l'on fixe. Il doit être choisi de manière à couvrir toute la surface usinée tout en limitant le plus possible le nombre de points. Il faut que $d\alpha$ soit suffisamment grand et qu'il ne soit pas un sous-multiple de 90° , 180° , ... , car cela conduit à des lignes de points orientées selon la direction d'avance (figure 61, haut). On peut par exemple choisir des nombres premiers inférieurs à 90 , ce qui donne des points bien répartis mais en très grand nombre (figure 61, bas).

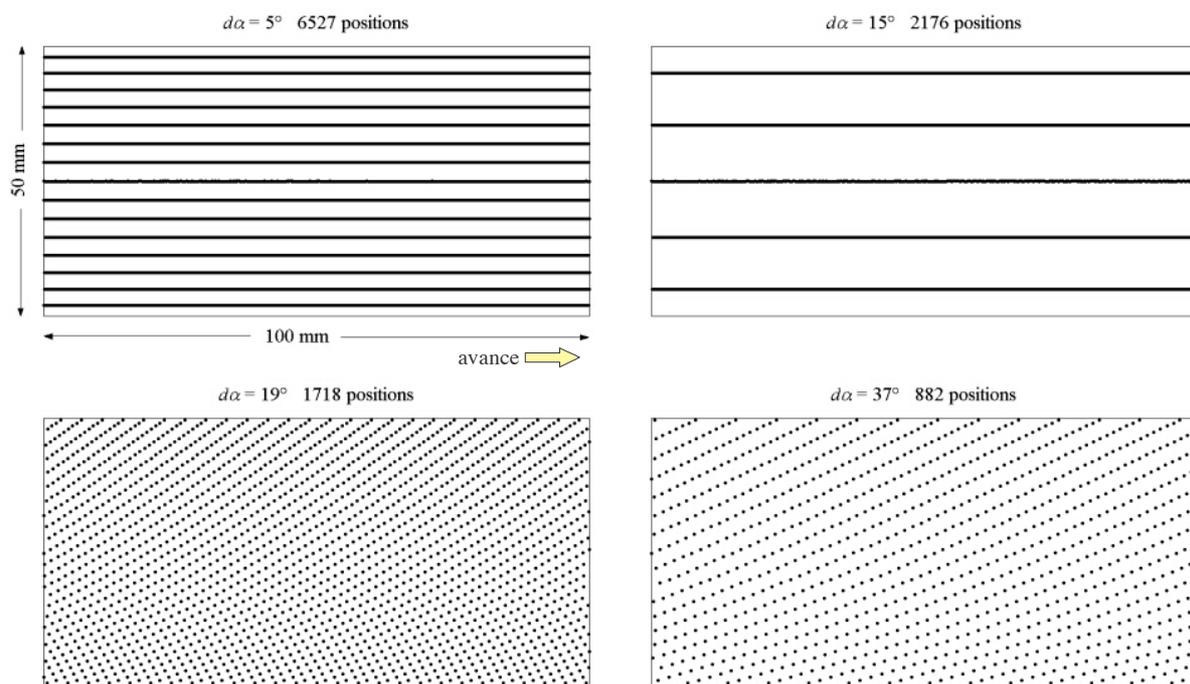


Figure 61 : points de calcul en fonction du pas angulaire ($v = 150$, $f_z = 0.2$, $D = 80$, $Z = 6$, fraisage centré, déplacement selon l'axe x)

Pour un pas angulaire donné, la position et le nombre des points de calcul varient avec les paramètres d'usinage : avance, diamètre de l'outil, nombre de plaquettes, ... Le pas doit donc toujours être adapté aux conditions de coupe. Lorsque la surface usinée est très découpée, il n'est pas simple d'avoir des points répartis de façon uniforme. Enfin, comme pour la première méthode, il faut encore interpoler pour obtenir le défaut sur le maillage de surface, ce qui est toujours délicat sur les frontières de la surface usinée.

Afin d'éviter les problèmes inhérents à ces deux méthodes, nous proposons la solution suivante [mas99, mas01a, mas01b] : la forme de la surface usinée est obtenue en calculant *le défaut de chaque noeud du maillage de surface*. De cette manière, le nombre de points de calcul est fixé par la finesse du modèle d'éléments finis. Plus le maillage est fin, plus la forme de la surface usinée est décrite de façon précise. En outre, la surface usinée est automatiquement couverte, quelle que soit sa complexité. Enfin, cette méthode offre l'avantage de ne faire appel qu'à l'*interpolation naturelle* des éléments finis.

Effet de l'enlèvement de matière

Durant l'usinage, la raideur de la pièce diminue constamment à mesure que l'outil enlève de la matière. Pour chaque position de l'outil, on devrait donc remailler la pièce de manière à respecter sa géométrie instantanée (figure 62). C'est la méthode proposée par Schulz et Bimschas. D'un point de vue physique, elle se justifie. Par contre, elle se révèle extrêmement coûteuse à cause des passages successifs dans l'outil de CAO, le mailleur et le code d'analyse.

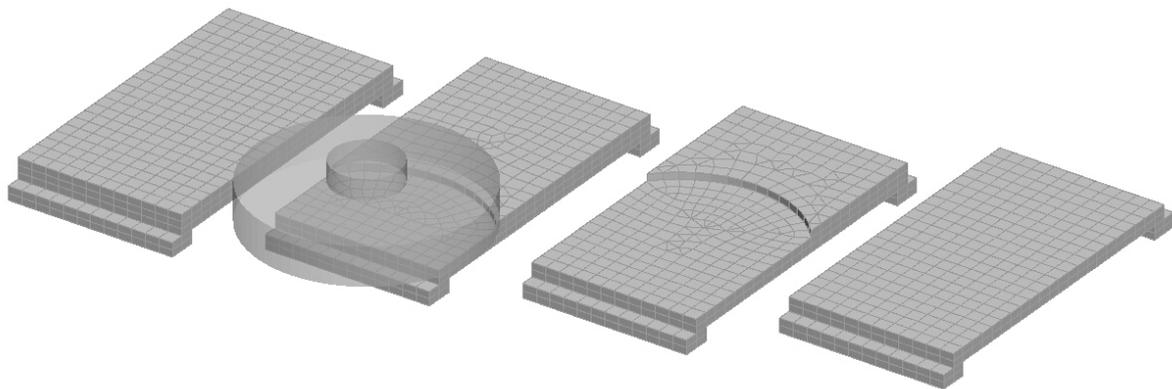


Figure 62 : remaillage de la pièce au cours du calcul

La méthode proposée par Budak et Altintas est moins coûteuse car elle ne consiste pas à remailler mais plutôt à déplacer les noeuds du maillage à mesure que l'outil avance, de manière à respecter approximativement la géométrie de la pièce. Pour les opérations d'usinage étudiées dans le présent travail, on pourrait utiliser une procédure similaire ou disposer une couche d'éléments correspondant à la surépaisseur de matière et enlever ces éléments au fur et à mesure de l'avance de l'outil. Sur des modèles de petite taille comme celui présenté par les auteurs (figure 52), une telle procédure est concevable. Par contre, pour des maillages de pièces plus complexes, elle devient trop coûteuse.

Dès lors, nous choisissons de ne pas remailler la pièce et de n'utiliser qu'*un seul modèle d'éléments finis* pour calculer les déformations du système. Idéalement, ce modèle devrait correspondre à la géométrie de la pièce après l'opération d'usinage étudiée (le maillage le plus à droite sur la figure 62). En effet, c'est pour cette géométrie que la raideur de la pièce est la plus faible et, par conséquent, que les déformations calculées sont les plus grandes, ce qui devrait conduire à un défaut d'usinage surestimé. Pour les applications étudiées dans ce travail, l'épaisseur de matière coupée est généralement petite par rapport à l'épaisseur de la pièce. Dès lors, l'effet de l'enlèvement de matière est beaucoup moins important que pour l'application présentée par Budak et Altintas.

Calcul itératif de la réponse

Comme la pièce se déforme durant l'usinage, l'engagement réel n'est pas égal à l'engagement théorique. Or, les forces de coupe, qui dépendent linéairement de l'engagement, sont responsables des déformations de la pièce. Budak et Altintas utilisent une procédure itérative pour prendre en compte le lien entre déformation et forces de coupe. Cependant, pour le type d'applications que nous étudions dans ce travail, les pièces sont relativement rigides de sorte que les déformations sont d'un ordre de grandeur nettement plus faible que l'engagement de l'outil. En ébauche, la profondeur de passe varie entre 2 et 4 mm environ et les déplacements au niveau de la surface usinée sont de l'ordre de 0.1 mm. En finition, la profondeur de passe est de l'ordre de 0.5 mm pour des déplacements de l'ordre de 0.01 mm. Le rapport entre engagement et déplacement est donc suffisamment grand pour négliger cet effet.

2.1.3. Méthode proposée

La méthode proposée pour calculer le défaut d'usinage est relativement simple (figure 63). Le système étudié est constitué uniquement de la pièce et du montage. La pièce est modélisée par un seul maillage d'éléments finis. Selon les cas, les éléments de fixation peuvent être maillés ou modélisés par des éléments de ressort dont la raideur est équivalente à celle des éléments réels. Tous les autres éléments du système (machine, outil, table, ...) sont supposés parfaitement rigides. L'outil n'intervient dans le modèle qu'au travers des forces qu'il applique sur la pièce.

La forme de la surface est obtenue en calculant n défauts nodaux, n étant le nombre de noeuds du maillage de surface correspondant à la surface usinée. Pour chaque noeud, il faut d'abord déterminer la position de l'outil pour laquelle ce noeud est coupé. Pour cette position, les forces de coupe sont calculées puis appliquées sur le maillage. En répétant la même procédure pour chaque noeud, on obtient finalement n cas de chargement du système (chapitre 2.4).

Ensuite, les n déformées du système sont calculées par une analyse classique en statique linéaire. La difficulté de la phase d'analyse provient du nombre élevé de cas de charge. Le chapitre 3 est intégralement consacré aux problèmes liés à la résolution d'un système soumis à de nombreux cas de charge et aux solutions développées pour rendre le calcul efficace.

Pour obtenir les n défauts nodaux, il suffit alors d'extraire de chaque déformée le déplacement normal du noeud coupé et de le changer de signe. On restitue la forme de la surface usinée en assemblant les n défauts nodaux. La forme de la surface ainsi obtenue correspond à la variation de la hauteur de matière laissée par l'outil. Remarquons qu'on peut observer des valeurs positives ou négatives, qui correspondent respectivement au fait que l'outil a coupé moins ou plus de matière que prévu. En fraisage, on modélise également l'effet du dépinçage de l'outil et la recoupe de la surface usinée par la fraise. La modélisation de la recoupe requiert un certain nombre de cas de charge supplémentaires (chapitre 2.5).

Enfin, il reste à calculer la ou les erreurs géométriques normalisées (forme, orientation, ...) qui doivent être comparées aux tolérances spécifiées sur le plan de la pièce. Une méthode originale a été développée à cet effet. Elle est décrite au chapitre 4.

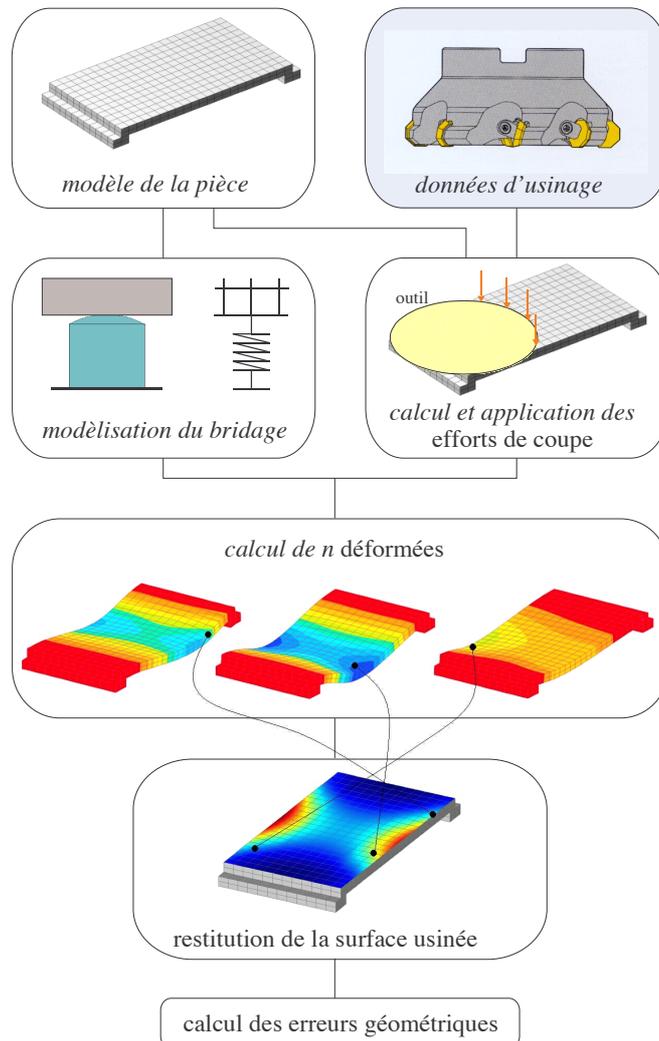


Figure 63 : étapes du calcul des erreurs géométriques

2.1.4. Limitations du modèle

Lors de l'usinage, la coupe génère trois types de sollicitations de la pièce :

- les efforts de coupe,
- la chaleur produite par le cisaillement de la matière et le frottement,
- les déformations plastiques du matériau usiné.

Dans ce travail, nous ne prenons en compte que les déformations de la pièce induites par les forces de coupe car ce mode de sollicitation est le plus systématique des trois. Il intervient pour toutes les opérations d'usinage et pour n'importe quel matériau usiné. Les deux autres modes de sollicitation sont plus occasionnels.

Déformations thermiques

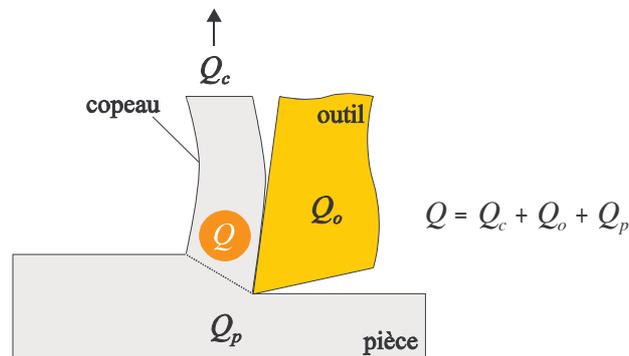


Figure 64 : écoulement de la chaleur générée par la coupe

Pour toutes les opérations d'usinage, la chaleur Q produite par la formation du copeau et par le frottement à l'interface pièce/outil est évacuée en grande partie par le copeau lui-même (Q_c) (figure 64) [sha84]. Le reste est repris par l'outil (Q_o) et par la pièce (Q_p), qui subit ainsi un échauffement durant l'usinage. Dans la grande majorité des cas, cet échauffement provoque des déformations qui sont d'un ordre de grandeur plus faible que les déformations mécaniques, de sorte que l'on peut sans grande erreur les négliger. Il y a cependant deux types d'applications pour lesquelles les déformations thermiques ont un effet non négligeable : l'usinage des pièces en aluminium et l'alésage des fûts de cylindres.

Le coefficient de dilatation de l'aluminium est environ deux fois plus grand que celui de l'acier. Comme les éléments du bridage sont en acier, une pièce en aluminium se déforme automatiquement lorsque sa température augmente. L'échauffement est d'autant plus élevé qu'un grand nombre d'opérations sont réalisées avec le même montage. Le problème se pose aussi lorsque la pièce est portée à une température de référence T_{ref} avant d'être usinée. Pour cela, la pièce, qui arrive à la température ambiante T_{amb} , est d'abord fixée puis arrosée avec du liquide de coupe de manière à ce que sa température atteigne la température de référence. Selon le signe de ΔT , la pièce peut se dilater ou se contracter. C'est le cas par exemple des carters de boîtes de vitesses (figure 65). Ce type de problème peut être modélisé par une simple analyse linéaire : il suffit de fixer les déplacements au niveau des zones de serrage et d'imposer une variation ΔT de la température de la pièce. Comme le comportement du système est linéaire, la forme des surfaces usinées peut alors être obtenue en additionnant l'effet des déformations thermiques et celui des déformations mécaniques.

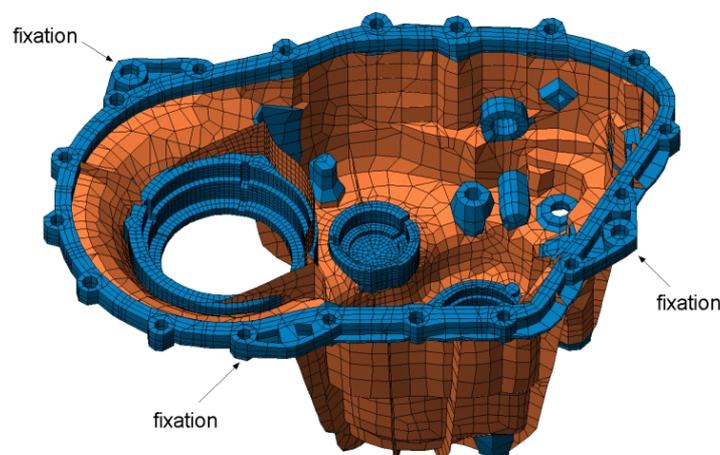


Figure 65 : carter de boîte de vitesses PK6 (RENAULT)

Dans un carter-cylindres, l'épaisseur des parois est très variable à cause de la présence des chambres d'eau et des conduits d'alimentation d'huile. Lors de l'alésage des fûts de cylindres, la chaleur générée par la coupe ne se répartit pas uniformément, ce qui provoque des contraintes thermiques et, par conséquent, des déformations de la pièce. D'après plusieurs auteurs [kak93, sub93], celles-ci sont du même ordre de grandeur que les déformations mécaniques. Elles sont modélisées en considérant une ou plusieurs sources de chaleur, correspondant aux plaquettes de l'outil, qui se déplacent durant l'usinage. Il s'agit ici d'un problème de thermique transitoire. En pratique cependant, on arrive à limiter fortement les déformations thermiques des carters-cylindres en faisant circuler du liquide de refroidissement dans les chambres d'eau [ste97].

Contraintes résiduelles

Le second phénomène est la présence de contraintes résiduelles dans la pièce. Ces contraintes peuvent être dues au mode de réalisation de la pièce brute ou à la coupe. Pour une pièce moulée, les contraintes proviennent du refroidissement des zones internes plus lent que celui des zones proches du moule. En laminage, elles sont engendrées par le fort gradient de vitesse de la matière entre la sortie et l'entrée dans les rouleaux et par le freinage des rouleaux à la sortie (figure 66a).

La coupe génère également des contraintes résiduelles, spécialement en dégrossissage où les conditions de coupe sont très sévères. Sur la surface usinée, les contraintes sont localisées dans une couche de quelques dixièmes de millimètres d'épaisseur.

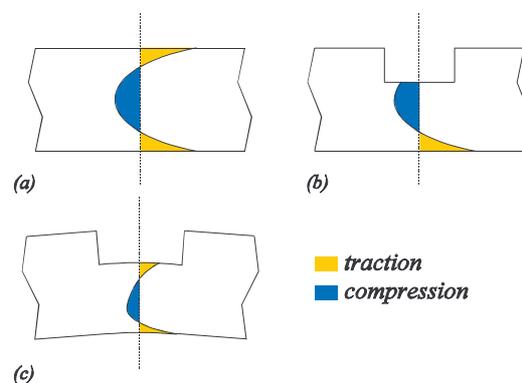


Figure 66 : champs de contraintes résiduelles dans une plaque laminée

Par nature, les contraintes résiduelles sont *auto-équilibrées*. Lorsque le champ de contraintes est coupé par l'outil (figure 66b), les contraintes ne sont plus équilibrées, ce qui provoque une déformation permanente de la pièce et une dégradation de la forme des surfaces préalablement finies (figure 66c). Ce problème est observé en pratique sur certains types de carters-cylindres. La gamme consiste à réaliser dans l'ordre l'ébauche des faces du carter, celle des fûts de cylindres, la finition des faces et celle des fûts. Après leur finition, les faces sont conformes aux tolérances. Après les opérations de finition des fûts, les faces sont hors tolérances, ce qui s'explique par la torsion du carter induite par la coupe du champ de contraintes dans les fûts de cylindres.

La prise en compte des contraintes résiduelles est très complexe. D'une part, il existe peu de modèles permettant de prévoir la forme du champ de contraintes et son intensité, surtout pour les contraintes dues à la coupe. D'autre part, modéliser l'effet d'un champ de contraintes déséquilibré sur la déformée d'une pièce est *a priori* très compliqué. Du reste, à notre connaissance, il n'existe dans la littérature aucune

référence sur ce sujet. Dans le présent travail, nous n'intégrons pas l'effet des contraintes résiduelles mais il est clair que l'étude de ce problème fera partie de développements futurs⁵.

2.2. Modélisation de la prise de pièce

2.2.1. Modèle linéaire

Dans la plupart des cas, on peut raisonnablement admettre que le contact entre la pièce et les divers éléments du montage est parfait, autrement dit qu'il n'y a pas de glissement relatif ou de décollement au niveau des surfaces de contact. Dès lors, le système pièce/montage réagit comme un assemblage. Cette hypothèse n'est vraie que si les efforts de serrage sont suffisamment importants pour empêcher tout décollement sous l'effet des forces appliquées par l'outil.

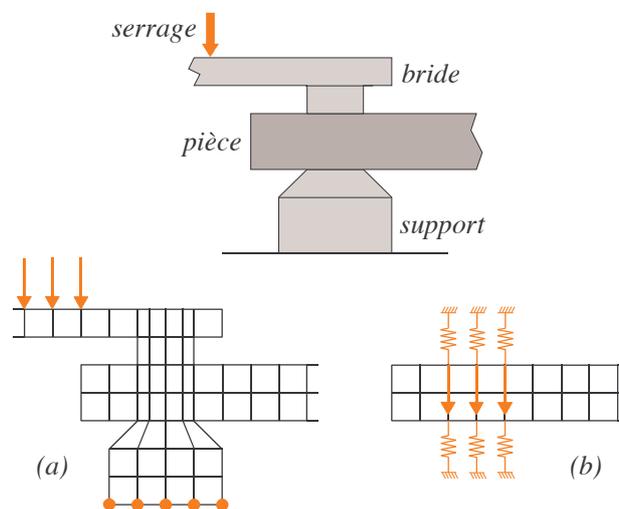


Figure 67 : modélisation du système de fixation

Pour modéliser le système de fixation de la pièce, deux solutions sont possibles : soit mailler les éléments du bridage (figure 67a), soit les remplacer par des éléments de ressorts dont les raideurs reflètent le comportement réel (figure 67b). Selon les applications, on choisira une solution ou l'autre. En général, le bureau des méthodes dispose toujours d'un modèle CAO ou d'un maillage de la pièce. Par contre, pour les éléments de fixation, c'est plus rare, surtout en phase de pré-production où les moyens de production et, par conséquent, les éléments de fixation, ne sont pas encore choisis. Dans ce cas, on les modélise avec des éléments de ressorts et on choisit comme raideur équivalente des valeurs standard. Pour donner un ordre d'idée, la raideur équivalente d'un support est de l'ordre de 10^5 N/mm. Généralement, le maillage des éléments de fixations et celui de la pièce ne coïncident pas. Il faut alors faire appel à des fonctions de collage pour assembler les différents maillages (voir chapitre 6).

⁵ Une thèse, en collaboration avec la firme RENAULT, est actuellement en cours de démarrage. Un de ses objectifs est précisément l'étude et la prise en compte des contraintes résiduelles.

Lorsque les conditions aux limites sont linéaires, il faut résoudre les équations d'équilibre du système avec n seconds membres, soit

$$\mathbf{K} \mathbf{q}^{(l)} = \mathbf{g}^{(l)} \quad l = 1, n \quad (21)$$

où \mathbf{K} est la matrice de raideur, $\mathbf{q}^{(l)}$ est un vecteur contenant les m degrés de liberté du système, $\mathbf{g}^{(l)}$ est un vecteur contenant les forces extérieures pour le cas de charge l et n est le nombre de noeuds de la surface usinée. Par la suite, nous omettrons l'indice (l) pour ne pas alourdir la notation, mais il s'agira toujours de calculer n vecteurs solutions.

2.2.2. Modèle avec contacts

Pour certaines prises de pièce, on ne peut pas considérer que le contact est parfait entre la pièce et certains éléments du bridage. C'est le cas lorsque l'on utilise des supports pour lesquels il n'est pas possible de mettre une bride en vis-à-vis. Par exemple, pour le dressage des pistes de disques de freins, des supports sont parfois disposés sous la pièce afin d'en limiter la déformation (figure 68). Ce type de support est appelé *anti-poussée*. Selon la position de l'outil, le disque peut être plaqué sur l'appui, ou n'en toucher que le bord, ou carrément se décoller de l'appui.

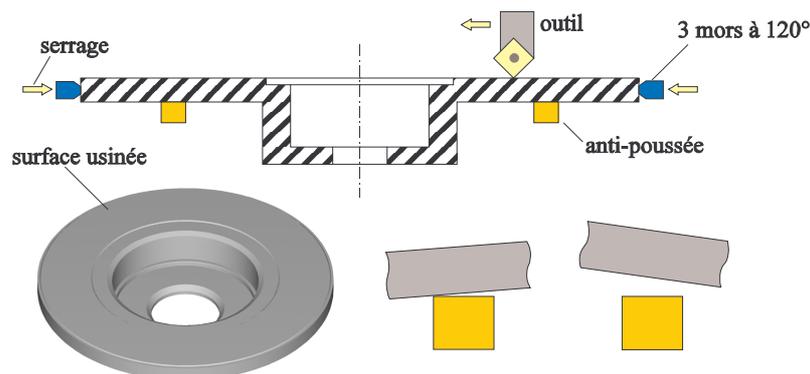


Figure 68 : supports anti-poussée disposés sous un disque de frein (AUTO-CHASSIS INTERNATIONAL)

De même, lorsque les surfaces d'appuis ne sont pas parfaites, le contact entre la pièce et les supports n'est pas assuré si le posage de la pièce n'est pas *isostatique*. Une prise de pièce est réputée isostatique si la pièce repose sur *trois appuis courts*. Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, on parle de posage *hyperstatique*. Le problème est tout à fait similaire à celui d'une chaise posée sur un sol inégal et dont un des quatre pieds ne repose pas sur le sol. S'il s'agit d'une chaise en plastique, elle se déforme automatiquement lorsque l'on s'assied dessus.

En usinage, le problème est exactement le même. Imaginons une surface d'appui brute de fonderie dont l'erreur de planéité est de $100 \mu\text{m}$. Si elle repose sur quatre appuis coplanaires, un des appuis sera, dans le pire des cas, surélevé de $100 \mu\text{m}$ par rapport à la surface. Lorsque l'on vient serrer la pièce avec quatre brides en vis-à-vis des appuis, elle se déforme nécessairement de manière à ce que les quatre supports soient en contact. La déformation est d'autant plus grande que l'erreur de forme de la surface d'appui est grande. Lorsqu'on relâche le serrage après l'opération, la surface usinée présente une erreur de forme dont l'amplitude est liée à celle de la surface d'appui. Si le posage était isostatique, le serrage de la pièce

n'engendrerait quasiment aucun défaut.

Pour prendre en compte ces deux problèmes, il faut introduire dans la modélisation de la prise de pièce des éléments de contact qui tiennent compte de la présence d'un ou plusieurs appuis, décalés ou non par rapport à la surface d'appui de la pièce. Ces éléments de contact sont standard dans les codes d'éléments finis. La direction du contact est la normale à la surface d'appui. Par convention, on choisit la normale pointant vers l'extérieur de la pièce. La condition de contact correspond à une borne supérieure U sur le déplacement normal w (figure 69). Une valeur non nulle de la borne correspond à un défaut de forme de la surface d'appui et une valeur nulle à la présence d'un support anti-poussée.

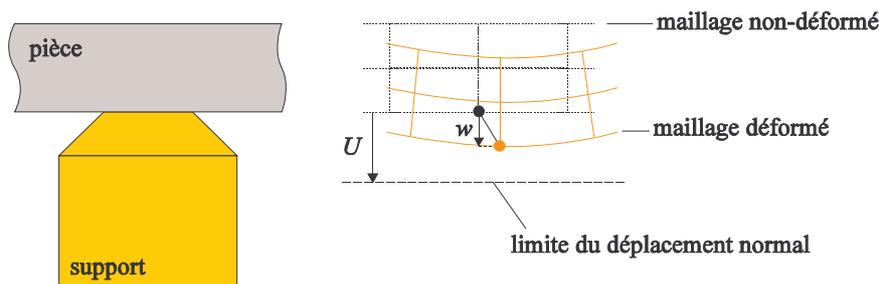


Figure 69 : borne supérieure sur le déplacement normal

Lorsque le contact est actif, le déplacement normal est égal à la borne supérieure U . Physiquement, le contact s'accompagne de frottement. Si la pression normale N au niveau de l'appui est suffisamment grande, le frottement tend à s'opposer à tout déplacement dans le plan de l'appui, ce qui se traduit par

$$T = \mu N \geq T^{ext} \quad (22)$$

où T est la force de frottement, μ est le coefficient de frottement entre les deux matières, celle de la pièce et celle du support, et T^{ext} est la force extérieure appliquée sur la pièce dans le plan de la surface d'appui. Le principe du bridage est de serrer suffisamment la pièce de manière à avoir un frottement tel qu'aucun déplacement n'est plus possible au niveau des zones d'appui et des zones de serrage. Il y a cependant une limite aux forces de serrage que l'on peut appliquer. Pour favoriser le maintien en position de la pièce, on utilise parfois des éléments de serrage ou de support avec des zones de contact striées.

On pourrait donc modéliser la prise de pièce en intégrant du contact avec frottement pour toutes les zones de contact entre la pièce et les éléments du bridage. Cependant, une telle modélisation n'est pas simple et peut être très coûteuse en temps de calcul. Etant donné que l'intérêt principal du contact est de prendre en compte le décollement ou non de la pièce par rapport aux supports, nous ne considérons ici que du contact pur.

Si l'on n'intègre que du contact pur (sans frottement) dans la modélisation, le problème consiste à minimiser l'énergie totale du système, soit

$$\begin{cases} \min_q \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{g} & (n \text{ problèmes}) \\ \text{avec } q_j \leq U_j & j = 1, J \end{cases} \quad (23)$$

où les J degrés de liberté q_j sont bornés. Le premier terme de l'énergie totale représente l'énergie de déformation et le second le travail des forces extérieures.

2.3. Calcul des forces de coupe

2.3.1. Exposé du problème

Parmi les trois composantes de l'effort total appliqué par l'outil, seule la force de coupe F_c est plus ou moins bien connue étant donné que c'est celle qui détermine la puissance de coupe $P_c = F_c v$ et donc la puissance de la machine-outil. Les fabricants d'outils fournissent généralement des données permettant de calculer approximativement la force de coupe en fonction du type de matériau usiné. A titre d'exemple, le fabricant suédois SECO donne, pour chaque classe de matériaux (figure 70), la pression spécifique de coupe $k_{c1.1}$ et l'exposant m_c permettant de calculer la force de coupe par

$$F_c = b h^{1-m_c} \left(1 - \frac{\gamma_n}{100}\right) k_{c1.1} \quad (24)$$

où b et h sont respectivement la largeur et l'épaisseur de coupe en mm et γ_n est l'angle de coupe normal en degrés. Les deux autres composantes de l'effort total, la force d'avance F_f et la force passive F_p , ne développent aucune puissance⁶ et n'entrent donc pas en ligne de compte pour le choix de la machine-outil et des conditions de coupe. Dès lors, ces deux forces sont relativement mal connues.

On trouve dans la littérature des indications très sommaires. Citons Chevalier et Bohan [che79] qui donnent la force d'avance F_f et la force passive F_p en fonction de la force de coupe F_c pour le tournage (table 1). La force de coupe peut être calculée par la formule (24). Faute de mieux, ce type d'estimation donne au moins une idée de l'amplitude des forces de coupe.

type d'outil	matériau	F_f	F_p
outil à chariotier	acier	$2/5 F_c$	$2/5 F_c$
	fonte	$1/3 F_c$	$1/3 F_c$
outil couteau (dressage)	acier	$2/3 F_c$	$1/10 F_c$
	fonte	$2/3 F_c$	$1/10 F_c$

Table 1 : estimation de F_f et F_p en fonction du type d'outil et du matériau usiné [che79]

Pour obtenir un résultat réaliste en simulation, il faut calculer les efforts de coupe avec un minimum de précision. A l'heure actuelle, il n'existe malheureusement pas de méthode de calcul *fiable* qui ne requière un minimum de données expérimentales. Les méthodes numériques ou les modèles théoriques (Oxley, Usui, ...) sont très complexes et requièrent souvent des paramètres qu'il est impossible de mesurer sans un matériel extrêmement pointu. Dès lors, on peut difficilement utiliser ce type de méthodes dans un environnement industriel.

⁶ La force d'avance développe en fait une puissance non nulle mais faible par rapport à la puissance de coupe, étant donné que la vitesse d'avance est bien plus faible que la vitesse de coupe.

Groupes matière Seco



Aciers carbone et aciers alliés

		R_m (N/mm ²)	k_c 1.1	m_c
1	Aciers doux très collants. Aciers bas carbone et ferritiques.	<450	1350	0,21
2	Aciers de bonne usinabilité hors inox.	400 <700	1500	0,22
3	Aciers de construction, aciers courants. Aciers à basse et moyenne teneur en carbone. (< 0,5%C)	450 <550	1500	0,25
4	Aciers à haute teneur en carbone (> 0,5%C), Aciers faiblement alliés, moulés. Aciers mi-durs de cémentation.	550 <700	1700	0,24
5	Aciers à outils (700-900N/mm) Aciers moulés moyennement alliés. Aciers durs de cémentation. Aciers inox martensitiques.	700 <900	1900	0,24
6	Aciers à outils difficiles. Aciers moulés fortement alliés durs. Aciers inox martensitiques.	900 <1200	2000	0,24
7	Aciers haute résistance difficiles. Aciers traités du groupe 3-6. Aciers inox martensitiques.	>1200	2900	0,22

Aciers inoxydables

8	Aciers inoxydables de bonne usinabilité (500-900N/mm). Aciers inoxydables de décolletage et inox traité calcium.		1750	0,22
9	Aciers inoxydables d'usinabilité moyenne (500-1000N/mm). Austénitiques et duplex.		1900	0,20
10	Aciers inoxydables difficiles (500-1100N/mm). Aciers inoxydables moulés. Austénitiques et duplex.		2050	0,20
11	Aciers inoxydables très difficiles. Austénitiques et duplex.		2150	0,20

Fontes

12	Fontes grises (max 230HB).		1150	0,22
13	Fontes faiblement alliées (max 250HB) malléables et nodulaires (GS).		1225	0,25
14	Fontes alliées (max 275HB) malléables et nodulaires.		1350	0,28
15	Fontes fortement alliées, (max 300HB) malléables et nodulaires difficiles.		1470	0,30

Autres matières

16	Non-ferreux courants. Aluminium < 16% Si. Laiton, zinc, magnésium.		700	0,25
17	Non-ferreux. Aluminium > 16% Si. Bronze d'aluminium, cupro-nickel.		700	0,27
20	Superaliages base nickel, cobalt ou fer < 30Rc. Incoloy 800, Inconel 601, 617, 625. Monel 400.		2600	0,24
21	Superaliages base nickel, cobalt ou fer >30 Rc. Inconel 718, 750-X, Incoloy 925, Monel K-500.		3300	0,24
22	Alliages de titane. Ti-6Al-4V.		1450	0,23

Figure 70 : valeurs de $k_{c,1.1}$ et m_c en fonction du groupe de matériaux [sec04]

Pour déterminer les efforts de coupe, il existe d'autres méthodes moins *évoluées* mais plus proches de la pratique industrielle. C'est ce qu'on appelle les méthodes *empiriques*. Pour ces modèles, les forces dépendent de certains paramètres d'usinage classiques (avance, angles d'outil, ...) et de paramètres qui doivent être déterminés expérimentalement à partir de simples mesures des efforts de coupe. Ce qui différencie les modèles empiriques entre eux est le *degré de sens physique* qu'ils contiennent. Dans ce chapitre, nous décrivons deux modèles : celui de Kienzle, qui est sans doute le modèle le plus connu, et celui développé par Gu *et al.* [gu91].

2.3.2. Modèle de Kienzle

Il est courant d'exprimer les forces de coupe comme le produit de l'aire de coupe A par une pression, soit

$$F_i = A k_i = b h k_i \quad \{i = c, f, p\} \quad (25)$$

où l'indice i correspond aux trois directions de coupe (coupe, avance et passive) et les pressions k_i sont les *pressions nominales de coupe*. On attribue généralement à Kienzle l'expression de la pression nominale de coupe sous la forme d'une puissance de l'épaisseur de coupe h , soit

$$k_i = k_{i1.1} h^{-m_i} \quad \{i = c, f, p\} \quad (26)$$

où les pressions $k_{i1.1}$ sont les *pressions spécifiques de coupe*. Elles correspondent aux pressions de coupe pour une section transversale A d'un millimètre d'épaisseur sur un millimètre de largeur. L'expression (26) n'est valable que dans un domaine limité de valeurs de h . Les relations (25) et (26) reviennent à écrire

$$\begin{cases} F_c = b h^{1-m_c} k_{c1.1} \\ F_f = b h^{1-m_f} k_{f1.1} \\ F_p = b h^{1-m_p} k_{p1.1} \end{cases} \quad (27)$$

La figure 71 montre la pression nominale de coupe et la force de coupe pour les sept premières classes de matériaux établies par la firme SECO (figure 70). A partir de deux mesures d'efforts de coupe réalisées à deux avances différentes h_1 et h_2 , on peut obtenir les pressions spécifiques $k_{i1.1}$ et les exposants m_i de manière très simple. Pour la force de coupe, on a

$$\begin{cases} F_c^{(1)} = b h_1^{1-m_c} k_{c1.1} \\ F_c^{(2)} = b h_2^{1-m_c} k_{c1.1} \end{cases} \Rightarrow m_c = 1 - \frac{\log \frac{F_c^{(1)}}{F_c^{(2)}}}{\log \frac{h_1}{h_2}} \Rightarrow k_{c1.1} = \frac{F_c^{(1)}}{b h_1^{1-m_c}} \quad (28)$$

où $F_c^{(1)}$ et $F_c^{(2)}$ sont les forces de coupe mesurées pour une épaisseur de coupe égale respectivement à h_1 et h_2 . On réalise la même opération pour les deux autres forces. Les lois de Kienzle ainsi établies ne sont valables que sur l'intervalle $[h_1, h_2]$.

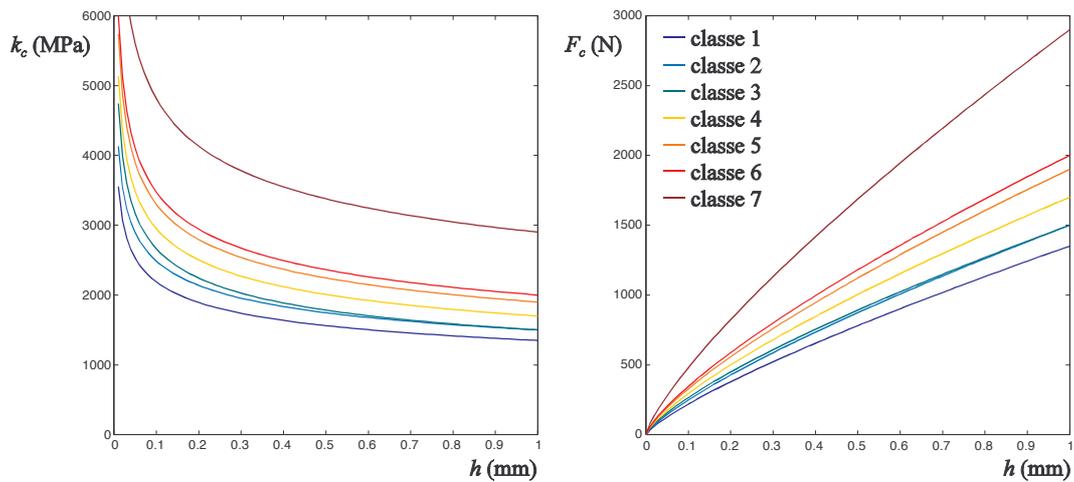


Figure 71 : évolution de la pression nominale de coupe et de la force de coupe

Lorsque l'intervalle d'épaisseur de coupe sur lequel on veut déterminer les lois de Kienzle est très large, on le découpe en plusieurs sous-intervalles et on répète la même procédure pour chaque intervalle. On obtient alors des lois de Kienzle spécifiques à chaque intervalle (figure 72). Les pressions spécifiques obtenues à partir de mesures sont dites de référence et sont notées $k_{i,1}^*$. Elles ne sont valables que pour des conditions (vitesse de coupe, outils, ...) identiques aux conditions expérimentales pour lesquelles elles ont été déterminées.

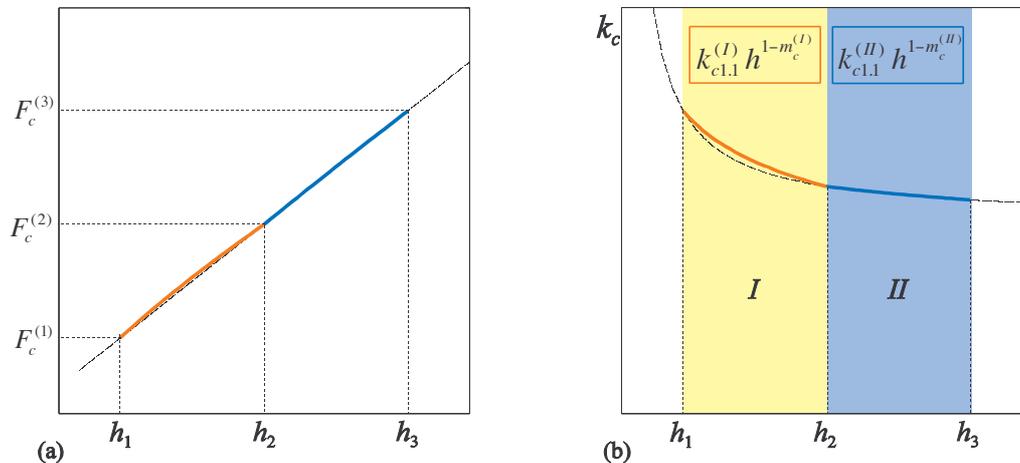


Figure 72 : efforts mesurés (a) et lois de Kienzle par intervalle (b)

Les différents paramètres qui influencent les efforts de coupe sont :

- l'angle de direction d'arête de l'outil κ_r ,
- l'angle de coupe normal γ_n ,
- l'angle d'inclinaison d'arête de l'outil λ_s ,
- la vitesse de coupe v ,
- la matière de coupe,
- le refroidissement et la lubrification,
- l'usure de l'outil.

Pour des conditions différentes de celles de référence, les pressions spécifiques sont calculées en multipliant les pressions spécifiques de référence $k_{i1.1}^*$ par un certain nombre de facteurs correctifs dépendant des paramètres de coupe, soit

$$k_{i1.1} = k_{i1.1}^* C_{\kappa_r,i} C_{\gamma_n,i} C_{\lambda_s,i} C_{v_c} C_{mat} C_{us} \quad \{i = c, f, p\} \quad (29)$$

avec $C_{\kappa_r,i}$ correction en fonction de l'angle de direction d'arête κ_r ,
 $C_{\gamma_n,i}$ correction en fonction de l'angle de coupe normal γ_n ,
 $C_{\lambda_s,i}$ correction en fonction de l'angle d'inclinaison d'arête λ_s ,
 C_{v_c} correction en fonction de la vitesse de coupe v ,
 C_{mat} correction en fonction du matériau de coupe,
 C_{us} correction en fonction de l'usure de l'outil.

On trouve des valeurs pour tous ces facteurs principalement dans la littérature scientifique allemande. Par exemple, d'après König et Essel [kon73], l'influence de l'angle d'inclinaison d'arête λ_s est donnée par les relations suivantes :

$$\begin{cases} C_{\lambda_s,c} = (1 - 0.015 (\lambda_s - \lambda_{s0})) \\ C_{\lambda_s,f} = (1 - 0.015 (\lambda_s - \lambda_{s0})) \\ C_{\lambda_s,p} = (1 - 0.1 (\lambda_s - \lambda_{s0})) \end{cases} \quad (30)$$

où λ_{s0} est l'angle d'inclinaison d'arête de référence, les deux angles étant comptés en degrés.

2.3.3. Modèle de Gu *et al.*

Dans le modèle de forces de coupe présenté par Gu *et al.*, les trois forces sont données par

$$\begin{cases} F_c = K_n A [\cos \gamma_p \cos \gamma_n + \mu (\sin \kappa_{re} \sin \gamma_n + \cos \kappa_{re} \sin \gamma_p)] \\ F_f = K_n A [-\cos \gamma_p \sin \gamma_n + \mu \sin \kappa_{re} \cos \gamma_n] \\ F_p = K_n A [-\sin \gamma_p + \mu \cos \kappa_{re} \cos \gamma_p] \end{cases} \quad (31)$$

où K_n est la pression de coupe normale, μ est le coefficient de frottement, κ_{re} est l'angle de direction d'arête *apparent* et les angles γ_p et γ_n sont caractéristiques de l'outil. La pression de coupe normale K_n est égale à la force de coupe normale F_n divisée par l'aire de coupe $A = b h$. Le coefficient de frottement μ est le rapport entre la force normale et la force tangentielle à la face de coupe F_t .

En examinant de plus près les formules (31), on constate que les trois forces de coupe proviennent de la décomposition des deux forces primaires F_n et F_t en fonction des angles d'outil γ_n , γ_p et κ_{re} . Pour des conditions équivalentes à celles de la coupe orthogonale ($\gamma_p = 0^\circ$ et $\kappa_{re} = 90^\circ$), on retrouve

$$\begin{cases} F_c = K_n A (\cos \gamma_n + \mu \sin \gamma_n) = F_n \cos \gamma_n + F_t \sin \gamma_n = F \cos (\theta - \gamma_n) \\ F_f = K_n A (-\sin \gamma_n + \mu \cos \gamma_n) = -F_n \sin \gamma_n + F_t \cos \gamma_n = F \sin (\theta - \gamma_n) \\ F_p = 0 \end{cases} \quad (32)$$

ce qui correspond à la décomposition de l'effort total de coupe F selon les axes de coupe comme nous l'avons vu au chapitre 1. L'angle de frottement θ est défini par $\tan \theta = \mu$ et la force d'avance F_f correspond à la force F_{\perp} définie en coupe orthogonale.

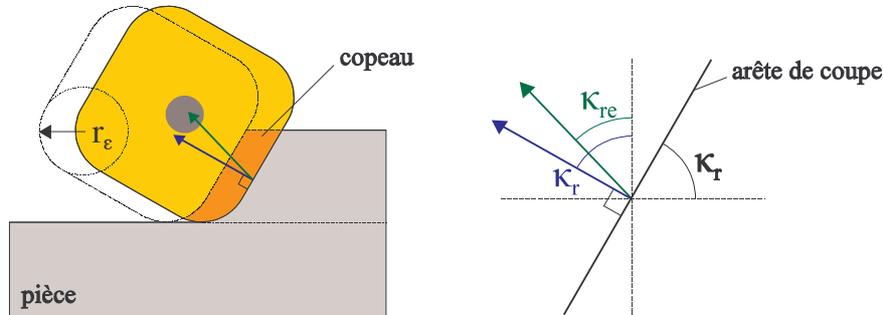


Figure 73 : direction d'écoulement du copeau

L'angle de direction d'arête de coupe apparent κ_{re} prend en compte le fait que le copeau ne s'écoule pas selon la direction normale à l'arête de coupe principale mais selon un angle plus petit à cause de l'arrondi du bec de l'outil et de l'avance (figure 73). L'angle κ_{re} correspond également à la direction de la force tangentielle F_t , qu'on appelle aussi force de frottement. Il peut être déterminé en considérant une pression de frottement K_f constante le long de l'arête de coupe [fu84]. Dans ce cas, l'angle κ_{re} correspond à la normale à la corde qui va d'une extrémité à l'autre de l'arête en prise (figure 74a). D'après Stephenson [ste97], une méthode plus précise pour déterminer κ_{re} consiste à considérer une pression de frottement qui varie avec l'épaisseur de coupe comptée sur la normale à l'arête [sub87]. Dans ce cas, il faut calculer l'intégrale

$$I = \int_0^L h(x) \vec{n}(x) dx \tag{33}$$

où L est la longueur de l'arête en prise, \vec{n} est la normale à l'arête et $h(x)$ est la loi qui donne l'épaisseur de coupe en fonction de l'abscisse curviligne x de l'arête (figure 74b). Cette solution est valable pour des conditions de coupe standard, c'est-à-dire pour une épaisseur de coupe h plus petite que le rayon de bec de l'outil r_{ϵ} .

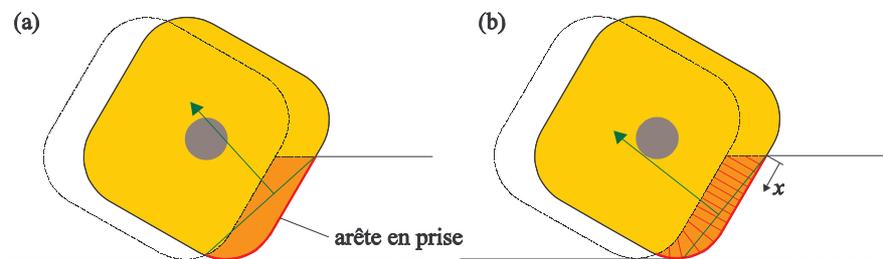


Figure 74 : angle κ_{re} obtenu pour une pression de frottement constante (a) et variable (b)

En pratique, pour utiliser le modèle de Gu, on ne doit déterminer expérimentalement que la pression de coupe normale K_n et le coefficient de frottement μ , l'angle de direction d'arête de coupe apparent κ_{re} pouvant être calculé. Pour un matériau et une matière de coupe donnés, des mesures d'efforts de coupe permettent d'établir des lois empiriques qui donnent K_n et μ en fonction des paramètres de coupe. D'après Stephenson et Bandyopadhyay [ste95], la pression de coupe et le coefficient de frottement peuvent être calculés par

$$\begin{cases} K_n = C_n h_{eq}^{a_n} v^{b_n} (1 - \sin \gamma_n)^{c_n} \\ \mu = C_f h_{eq}^{a_f} v^{b_f} (1 - \sin \gamma_n)^{c_f} \end{cases} \quad (34)$$

où h_{eq} est l'épaisseur de coupe équivalente, c'est-à-dire l'épaisseur d'un copeau de section rectangulaire dont la surface est égale à l'aire de coupe A et la largeur est égale à la longueur de l'arête en prise L_c (figure 75). Les deux constantes et les six exposants sont déterminés expérimentalement. Par exemple, pour un acier AISI⁷ 1018, dont la dureté Brinell est de 163, et des plaquettes en carbure revêtu, les valeurs des différents paramètres sont données à la table 2.

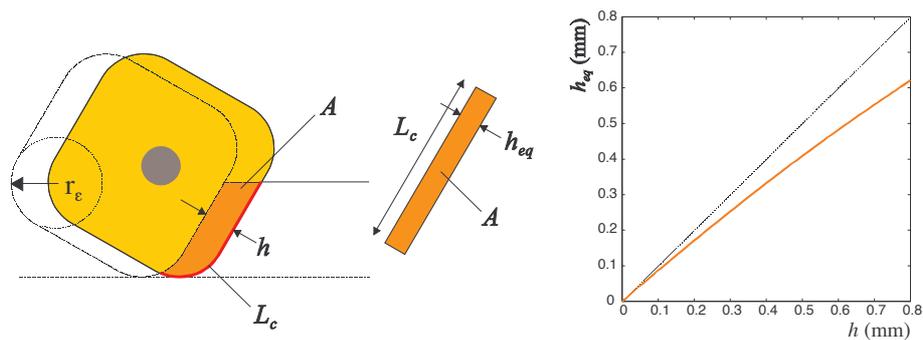


Figure 75 : épaisseur de coupe équivalente [ste95]

C_n	a_n	b_n	c_n	C_f	a_f	b_f	c_f
2119	-0.231	-0.080	1.149	0.453	-0.095	-0.090	-0.233

Table 2 : constantes permettant de calculer K_n et μ pour un acier AISI 1018 [ste95]

2.3.4. Détermination des paramètres du modèle de Gu *et al.*

Afin de déterminer les paramètres du modèle de Gu *et al.*, nous avons utilisé les résultats obtenus par König et Essel [kon73] à partir de mesures d'efforts de coupe en chariotage. Les auteurs ont déterminé les lois de Kienzle pour un grand nombre d'aciers (aciers doux, aciers faiblement alliés, fortement alliés, aciers pour outils, ...). Pour chaque matériau, les pressions spécifiques de références $k_{i1.1}^*$ et les exposants m_i sont donnés ainsi que les conditions expérimentales. Les essais ont été réalisés avec deux

⁷ AISI : American Iron and Steel Institute.

outils munis de plaquettes en carbure, l'un avec une géométrie positive et l'autre avec une géométrie négative (table 3). Les mesures ont été effectuées à des vitesses de coupe allant de 50 à 200 m/min et sur une plage d'avance allant de 0.125 à 1 mm/tour.

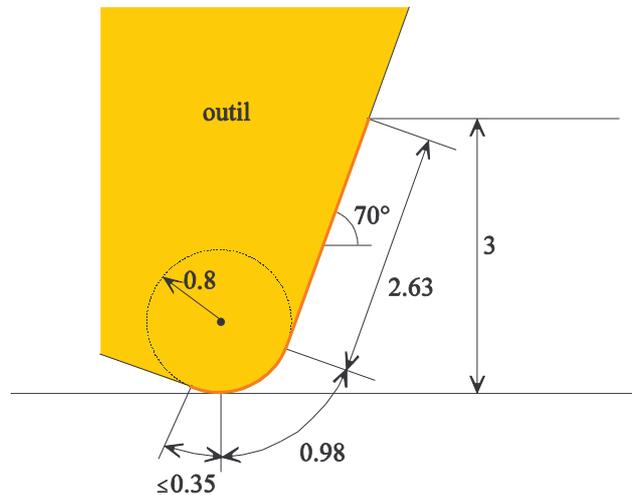


Figure 76 : géométrie des outils utilisés pour les essais [kon73]

Pour tous les essais, la profondeur de passe est de 3 mm, l'angle de direction d'arête de l'outil κ_r est de 70° et le rayon de bec des outils r_ε vaut 0.8 mm. Pour l'arête de coupe en prise dans la matière, un rapide calcul montre que la portion rectiligne de l'arête en prise est d'environ 2.63 mm contre 0.98 mm pour la partie circulaire jusqu'au point le plus bas de l'outil (figure 76). La longueur de l'arête secondaire en prise dépend de l'avance par tour. Pour l'avance la plus grande (1 mm/tour), sa longueur est d'environ 0.35 mm et elle est quasiment nulle pour l'avance la plus petite (0.05 mm/tour). La coupe se fait environ de 66% à 75% sur la portion rectiligne de l'arête de coupe et de 34% à 25% sur la partie arrondie.

	γ_n ($^\circ$)	λ_s ($^\circ$)	κ_r ($^\circ$)	α_n ($^\circ$)	ε_r ($^\circ$)	r_ε (mm)
coupe positive	6	0	70	5	90	0.8
coupe négative	-6	-6	70	6	90	0.8

Table 3 : géométrie des outils de tour utilisés [kon73]

A partir des lois de Kienzle, nous recalculons les efforts de coupe F_c , F_f et F_p pour une plage d'épaisseurs de coupe allant de 0.05 à 0.7 mm environ. Ensuite, nous utilisons ces forces comme si elles étaient mesurées. Pour tous les matériaux, nous déterminons les paramètres du modèle de Gu *et al.* que nous traçons en fonction de l'épaisseur de coupe h (figure 77). Les courbes sont coloriées en fonction de la dureté Brinell du matériau, qui va de 112 (bleu foncé) à 339 (en rouge). Les angles de direction d'arête apparents κ_{re} calculés en considérant une pression de frottement constante $\kappa_{re}^{(pu)}$ et une pression variable $\kappa_{re}^{(pv)}$ sont dessinés en trait noir épais.

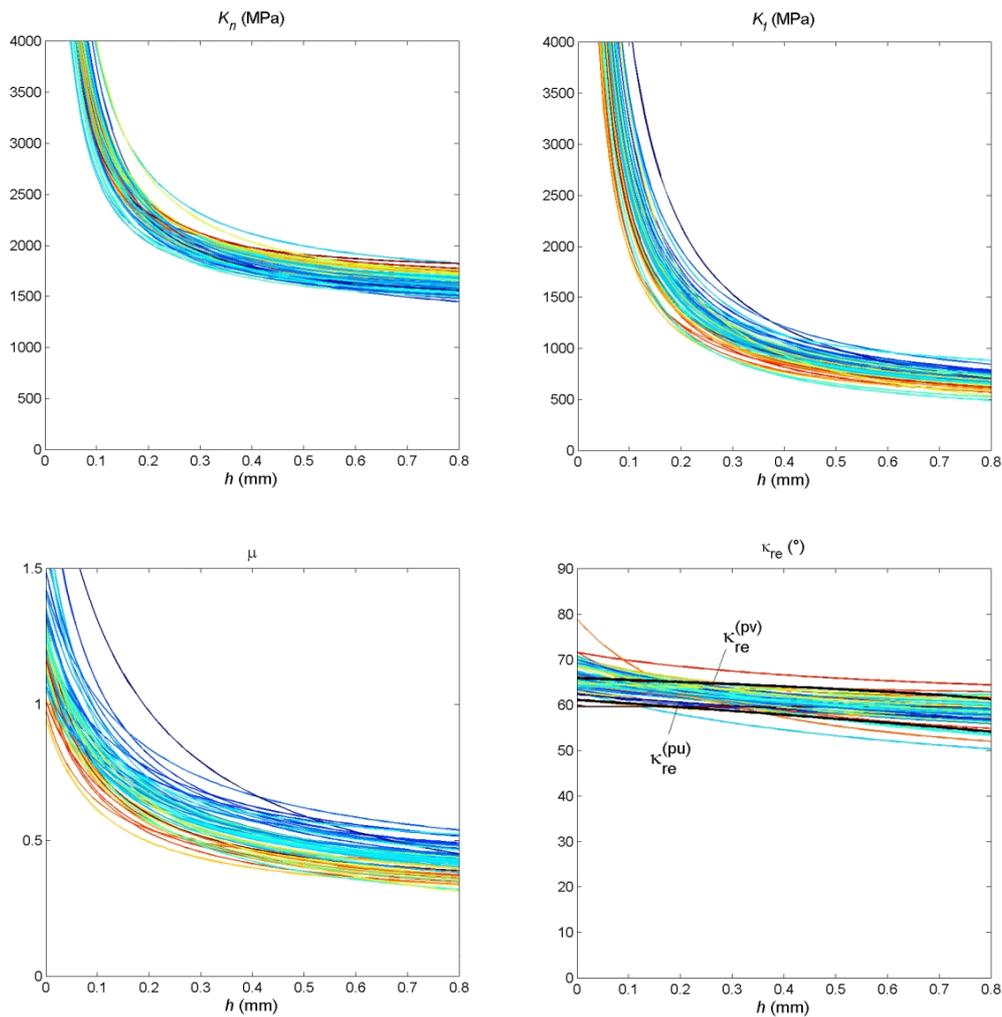


Figure 77 : évolution des paramètres K_n , K_f , μ et κ_{re} (coupe positive et vitesse de coupe de 100 m/min)

On constate que :

- la pression normale K_n diminue hyperboliquement en fonction de l'épaisseur de coupe et est d'autant plus grande que la dureté du matériau est élevée;
- la pression tangentielle K_f , qui est due au frottement, évolue de la même façon en fonction de l'épaisseur mais diminue avec la dureté du matériau;
- l'angle de direction d'arête apparent tiré des mesures est compris entre les deux solutions calculées.

Le fait que la dureté du matériau augmente la force normale F_n , nécessaire pour générer le cisaillement du matériau, est bien connu. Par contre, le fait que la force de frottement F_t diminue avec la dureté est assez inédit. Lorsqu'on compare les courbes déterminées pour la coupe positive (figure 77) et celles obtenues pour la coupe négative (figure 78), on constate que, pour un même matériau,

- la pression normale augmente en coupe négative, ce qui est dû à l'angle de coupe γ_n ,
- la pression de frottement et l'angle de direction d'arête apparent sont quasiment inchangés par rapport à ceux observés pour la coupe positive.

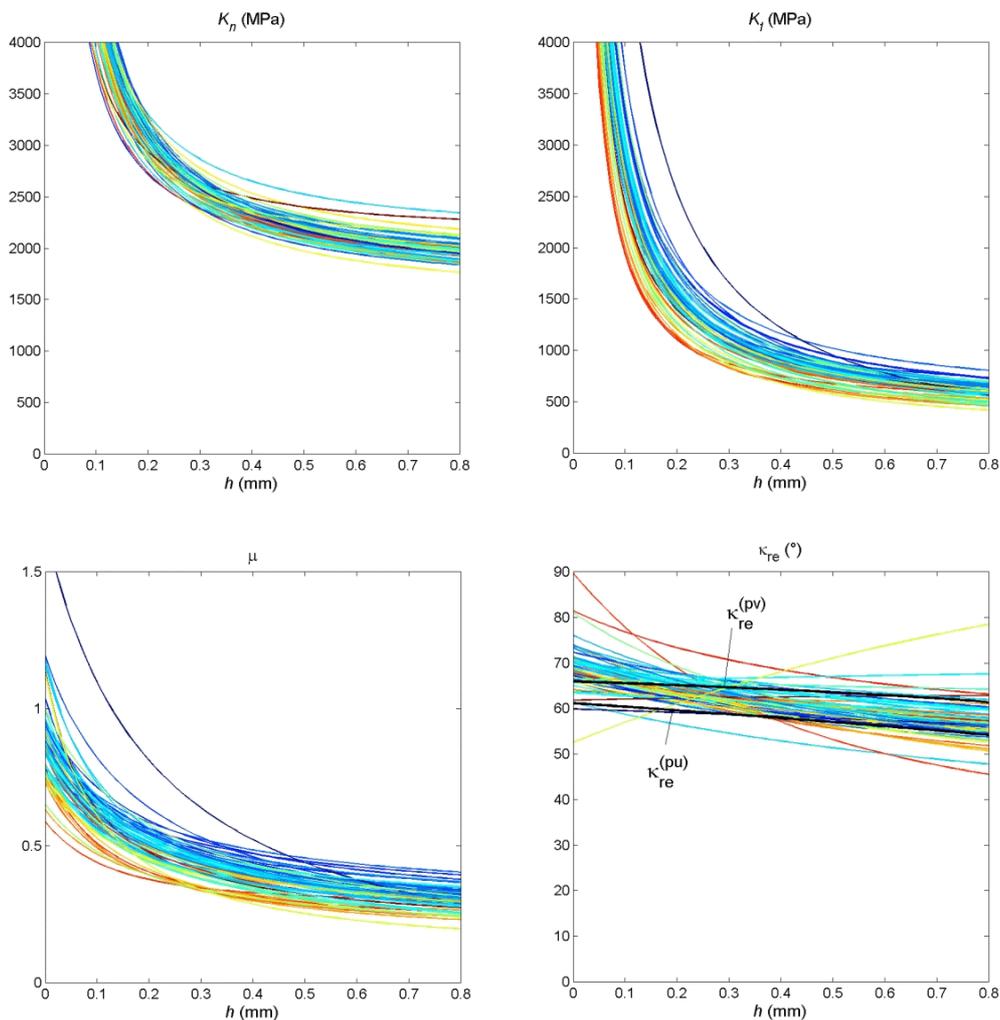


Figure 78 : évolution des paramètres K_n , K_f , μ et κ_{re} (coupe négative et vitesse de coupe de 100 m/min)

2.3.5. Discussion

D'un point de vue théorique, le modèle de Kienzle présente certains défauts qui, du reste, sont propres aux modèles à exposants. Tout d'abord, lorsque l'épaisseur de coupe tend vers zéro, les forces de coupe deviennent nulles. Or, toutes les mesures d'efforts de coupe montrent que celles-ci dépendent linéairement de l'épaisseur de coupe et qu'elles tendent vers des valeurs non nulles quand l'épaisseur tend vers zéro. Cela traduit le fait que, pour des épaisseurs très petites, la matière n'est plus coupée par l'outil mais flue sous l'outil (figure 79). On appelle cela le *refus de coupe*. Pour une épaisseur tendant vers l'infini, les pressions spécifiques k_i tendent vers zéro, ce qui est également incorrect sur le plan théorique.

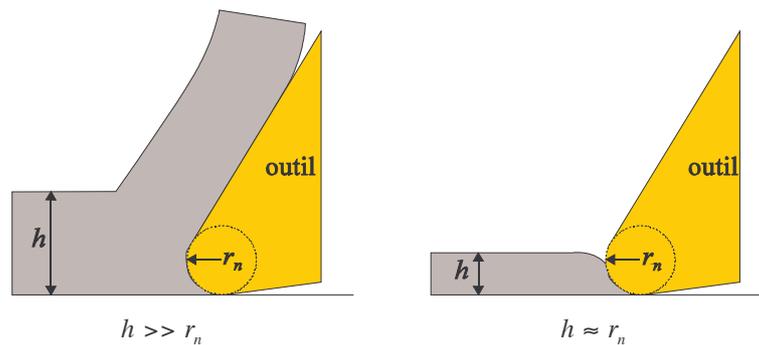


Figure 79 : refus de coupe

Le second point faible du modèle de Kienzle est que les trois forces de coupe sont indépendantes, alors qu'en réalité, elles sont dues à la décomposition des deux forces primaires F_n et F_t . Lorsque les angles γ_n et γ_p sont proches de zéro, la force de coupe F_c et la force normale F_n sont quasiment confondues. La force d'avance et la force passive proviennent quant à elles de la décomposition de la force tangentielle F_t selon la normale à l'arête de coupe (angle κ_r).

Ce problème peut être mis en évidence en traçant, pour les trois composantes (coupe, avance et passive), l'exposant m_i en fonction de la pression spécifique $k_{i,1,1}$ (figure 80). Pour la coupe (graphique de gauche), les valeurs ont une certaine cohérence. Les exposants sont compris entre 0.2 et 0.3 et la pression spécifique de coupe est comprise entre 1500 et 1800 MPa et augmente avec la dureté, ce qui correspond à ce qu'on peut trouver dans les manuels des fournisseurs d'outils pour des aciers de ce type.

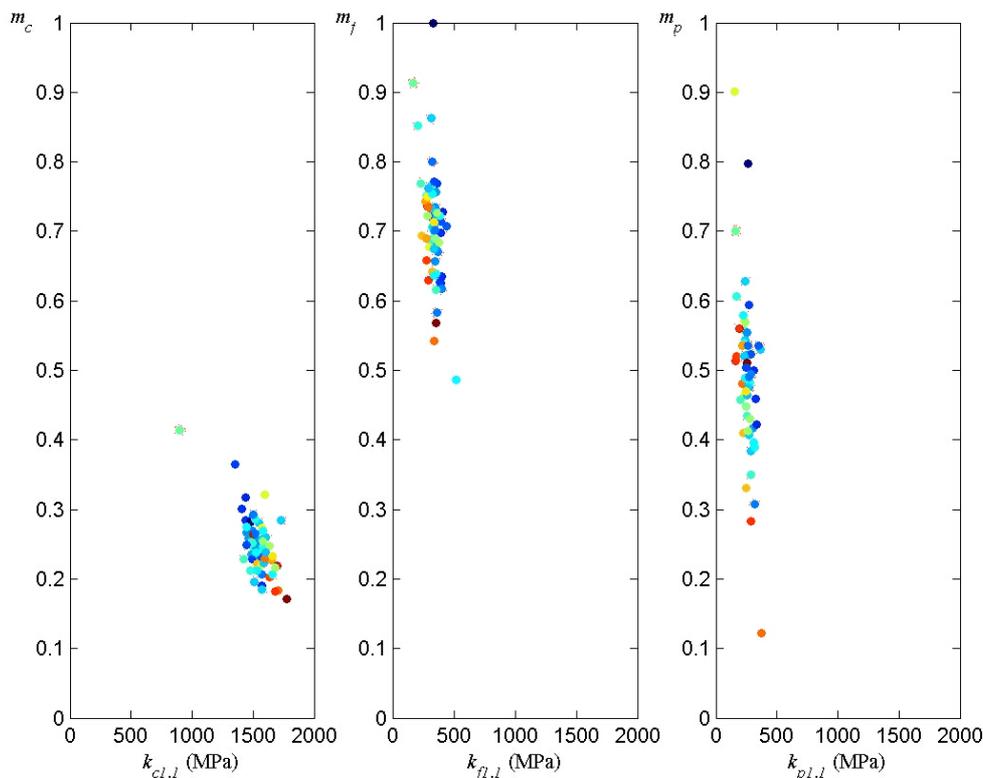


Figure 80 : évolution des exposants en fonction des pressions spécifiques, d'après les données publiées par König et Essel [kon73]

Par contre, pour les deux autres composantes, les exposants évoluent de manière *erratique*, ce qui indique que les deux forces ne sont pas indépendantes. A notre sens, il aurait été plus judicieux de considérer une pression spécifique de frottement $k_{t1,1}$ et un exposant m_t .

Enfin, les trois facteurs correctifs de la formule (29) portant sur les angles d'outils ne donnent que des tendances très approximatives, voire irréalistes. A ce titre, le facteur correctif en fonction de l'angle de direction d'arête κ_r donné par König et Essel est très surprenant : il stipule que la force passive change de signe brutalement lorsque l'angle κ_r devient plus grand que 90° , ce qui revient à dire que l'outil attire la pièce à lui.

D'un point de vue physique, le modèle présenté par Gu est beaucoup plus rigoureux. Les paramètres K_n , K_f , μ et κ_{re} évoluent de manière cohérente, ce qui n'est pas le cas des paramètres du modèle de Kienzle. En fait, le modèle de Gu n'est pas un modèle purement empirique mais plutôt un modèle *semi-empirique* présentant deux parties distinctes :

- la première partie est la décomposition des deux forces primaires F_n et F_t en fonction de la géométrie de l'outil, ce qui correspond à l'équation (31), et le calcul de l'angle de direction d'arête apparent κ_{re} . C'est la partie *physique* du modèle;
- la seconde partie est l'établissement des formules (34) donnant la pression de coupe normale K_n et le coefficient de frottement μ en fonction des paramètres d'usinage et de constantes qui sont déterminées expérimentalement. C'est la partie *empirique* du modèle.

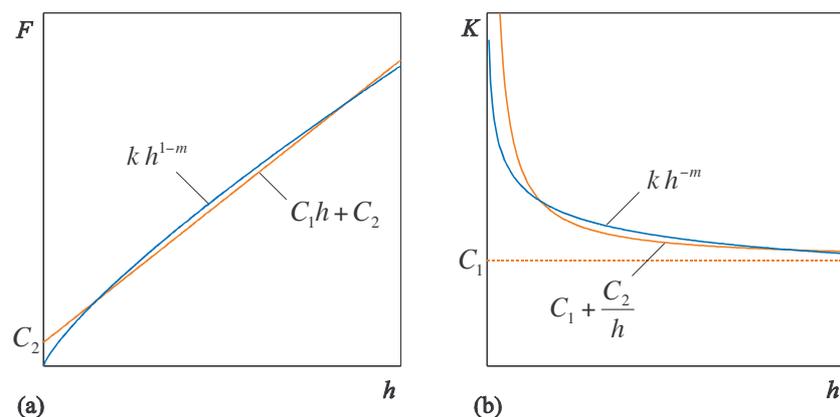


Figure 81 : loi exponentielle et loi affine de l'épaisseur (a) et pressions de coupe correspondantes (b)

Seul le choix des expressions (34) est discutable. Tout d'abord, on retrouve dans ces formules une loi de puissance de l'épaisseur de coupe similaire au modèle de Kienzle, ce qui conduit à des forces de coupe tendant vers zéro lorsque l'épaisseur tend vers zéro. Il est plus réaliste de considérer une variation *affine* des forces de coupe avec l'épaisseur de coupe (figure 81a), ce qui correspond à une pression de la forme:

$$C_1 + \frac{C_2}{h} \quad (35)$$

Ainsi, lorsque l'épaisseur de coupe tend vers zéro, les efforts de coupe tendent vers des valeurs non nulles et lorsque l'épaisseur de coupe tend vers l'infini, les pressions K_n et K_f décroissent de manière asymptotique vers C_1 (figure 81b). L'expression (35) est suggérée par plusieurs auteurs [ren98, alt04]. Physiquement, le terme en C_1 correspond à une force répartie sur l'aire de coupe $A = bh$ et le terme en C_2

correspond à une force *linéique* appliquée par l'arête de coupe :

$$F = C_1 b h + C_2 b \quad (36)$$

De même, dans l'équation (34), il serait plus significatif de déterminer une loi empirique donnant la pression de frottement K_f à la place du coefficient de frottement μ . En effet, ce dernier introduit un couplage *artificiel* qui masque les évolutions propres des pressions K_f et K_n en fonction des paramètres de coupe. Ainsi, les courbes des figures 77 et 78 indiquent que la pression de frottement ne varie quasiment pas avec l'angle de coupe normal γ_n . Par contre, le coefficient de frottement augmente avec γ_n simplement parce que la pression de coupe normale K_n diminue.

Enfin, d'après Stephenson, les constantes des formules empiriques (34) doivent être déterminées pour chaque couple matière de coupe/matière usinée, ce qui requiert un très grand nombre de mesures. Or, on remarque sur les courbes des figures 77 et 78 que les pressions K_n et K_f évoluent de manière *régulière* avec la dureté du matériau. Il est donc fort probable que l'on puisse déterminer des lois qui lient les pressions à la dureté. Pruvot [pru93b] propose de telles lois pour les aciers : la pression de coupe normale est donnée par

$$K_n = \left(\frac{275}{h^{0.65}} + f(R_m) \right) C_v C_\gamma \quad (37)$$

avec la fonction $f(R_m)$ qui vaut

$$f(R_m) = R_m \left[0.4914 \left(\frac{1800 - R_m}{950} \right)^2 + 1.075 \right] \quad (38)$$

Les coefficients C_v et C_γ reflètent respectivement l'influence de la vitesse de coupe et de l'angle de coupe normal et R_m est la contrainte de rupture en traction en MPa. Une expression similaire est également donnée pour la pression de frottement. Pour les aciers, la contrainte de rupture en traction R_m est liée à la dureté Brinell du matériau par une loi quasiment linéaire.

Cependant, on ne peut pas lier les pressions uniquement à la dureté du matériau. Ainsi, il est bien connu que les forces de coupe pour un acier et une fonte de même dureté ne sont pas du tout les mêmes, toutes choses étant égales (outil et conditions de coupe). Il faut donc établir des lois valables pour une *classe de matériaux* et une *matière de coupe* données : les aciers avec des outils en carbure, les alliages d'aluminium avec des plaquettes en diamant, ...

De nombreux modèles de forces de coupe semi-empiriques sont proposés dans la littérature spécialisée. Malheureusement, les auteurs se contentent dans la majorité des cas de déterminer les constantes pour un seul couple matière de coupe/matière usinée, ce qui a une portée très limitée. Jusqu'à présent, très peu d'efforts ont été investis dans le développement de modèles *généraux*, mis à part celui proposé par Pruvot pour les aciers. De tels modèles seraient pourtant utiles dans de nombreuses situations : dimensionnement de broches, de machines-outils, de porte-outils, d'éléments de bridage, prévision du broutement, ... Il va de soi que l'établissement de lois empiriques requiert *toujours* de gros moyens expérimentaux. Ce type de développement ne peut être réalisé que par des structures qui possèdent de tels moyens comme les principaux fournisseurs d'outils coupants ou des organismes spécialisés d'aide aux entreprises [cet04, cri04].

Dans ce travail, nous utilisons les données disponibles pour calculer les efforts de coupe. Dans la plupart des cas, il s'agit des données fournies par le fabricant d'outils, qui permettent de calculer la force de coupe F_c par la formule (24). Pour les deux autres forces, F_f et F_p , nous utilisons une méthode très sommaire basée sur un coefficient de frottement μ estimé (cf. chapitre 5). Par contre, pour des aciers, nous pouvons utiliser le modèle de Gu et les pressions K_n et K_f que nous avons déterminées au chapitre 2.3.4. Enfin, dans certains cas, nous disposons directement des efforts de coupe mesurés.

Pour conclure, nous résumons à la table 4 l'évolution des différents paramètres en fonction de la géométrie de l'outil et des conditions de coupe. Ces tendances sont données seulement à titre indicatif. Certaines d'entre elles ne sont valables que pour les aciers. On notera que l'usure de l'outil modifie considérablement les efforts de coupe : pour un outil en fin de vie, on peut constater une augmentation de 30% pour la pression de coupe et jusqu'à 100% pour celle de frottement [ste97].

	γ_n	λ_s	κ_r	r_t	r_ε	ν	f ou f_Z	a	usure
K_n	↗	→	→	↗		↘	↘		↗
K_f	→			↗		↘	↘		↗↗
κ_{re}		↗	↗		↘			↗	
F_c	↗		→	↗		↘	↗	↗	↗
F_f		↗	↗	↗	↘	↘	↗	↗	↗↗
F_p		↘	↘	↗	↗	↘	↗	↗	↗↗
F_f/F_p		↗	↗		↘		↘	↗	→

Table 4 : évolution des paramètres du modèle de Gu *et al.* et des forces de coupe en fonction des caractéristiques de l'outil et des conditions de coupe

2.4. Application des forces de coupe

2.4.1. Positions de coupe

D'après le modèle que nous avons choisi, le défaut en un noeud de la surface est engendré lorsque l'outil coupe ce noeud. Il faut tout d'abord préciser à quelle position de l'outil correspond cet instant. En réalité, l'outil passe plusieurs fois sur un point donné de la surface usinée (figure 82). C'est seulement lorsque la partie active de l'outil, c'est-à-dire l'arête de coupe en prise, passe pour la dernière fois que le défaut est réellement *imprimé* en ce point de la surface.

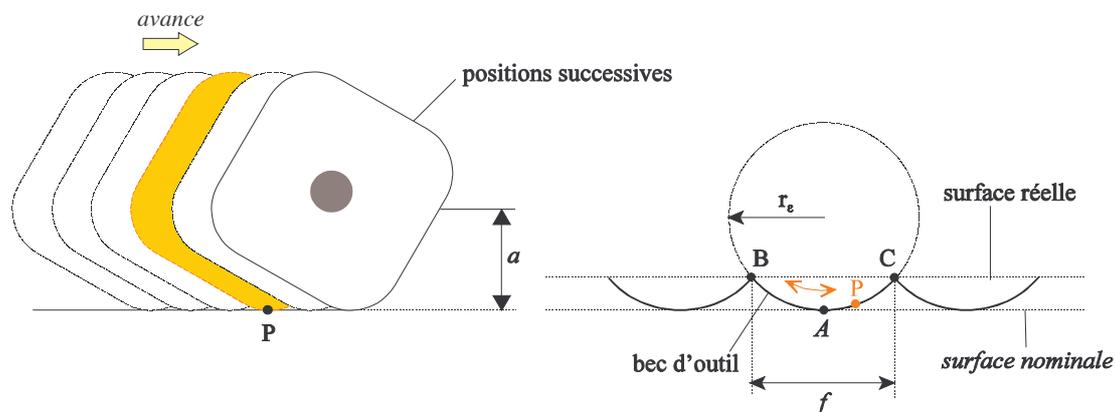


Figure 82 : coupe d'un point de la surface usinée

Prenons d'abord le cas de l'outil de tour. Il est caractérisé par une seule arête de coupe. Selon la géométrie de la plaquette, l'arête de coupe peut avoir des formes très différentes : plaquette ronde, à facettes, ... Le cas d'une plaquette classique est illustré à la figure 82. La position de l'outil correspondant à la coupe du point P de la surface est indéterminée.

Le point A, qui correspond au creux d'un sillon, est coupé par le point le plus bas de l'arête de coupe. Les points B et C, qui correspondent aux sommets du sillon, sont coupés par l'arrondi du bec de l'outil. Pour un point P quelconque, toutes les situations intermédiaires entre B et C sont possibles. Pour une fraise ou un outil d'alésage, qui présentent plusieurs arêtes de coupe, le problème est semblable.

Pour lever cette indétermination, nous considérons comme point de référence de l'outil le point le plus bas de l'arête de coupe, c'est-à-dire le point A sur la figure 82. De cette manière, nous commettons une erreur sur la position de l'outil selon la direction d'avance ϵ_a et une erreur sur la hauteur de matière laissée par l'outil au noeud considéré ϵ_z .

L'erreur selon la direction d'avance ϵ_a est au maximum égale à la moitié de l'avance par tour f en tournage et à la moitié de l'avance par dent f_z en fraisage et en alésage au grain (figure 83). Etant donné que l'avance est petite par rapport aux dimensions de la pièce, l'erreur commise est négligeable. L'erreur ϵ_z est au maximum égale à la rugosité totale R_t de la surface. Cependant, comme dans ce travail nous ne modélisons que la déviation de la forme de la surface usinée, cette erreur n'a pas de conséquence sur le résultat obtenu.

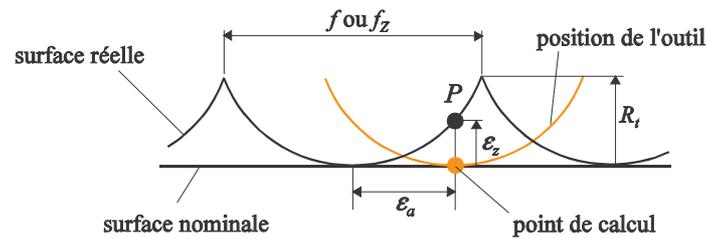


Figure 83 : erreur sur la position de calcul et sur la hauteur du point coupé

Pour déterminer les positions successives de l'outil, un outil de tour se ramène à un *point* et une fraise ou un outil d'alésage se ramènent à *Z points situés sur un cercle de diamètre D*, *Z* étant le nombre de dents de l'outil. Pour les outils multi-plaquettes, il s'agit d'une simplification par rapport à la réalité car les plaquettes d'un outil ne sont jamais parfaitement réglées. Chacune se trouve à une position (radiale et axiale) légèrement différente de celle des autres. Ceci a une grande influence sur l'état de surface mais n'a que très peu d'effet sur les efforts appliqués par chaque plaquette car les décalages entre les plaquettes sont petits par rapport à l'épaisseur de coupe et à l'engagement.

2.4.2. Positions de l'outil en tournage

Pour toutes les opérations de tournage, nous utilisons un système de coordonnées cylindriques pour lequel l'axe z est l'axe de rotation de la pièce. En chariotage et en alésage au tour, l'outil se déplace selon l'axe z tandis qu'en dressage, l'outil se déplace radialement. Pour les n noeuds de la surface usinée, les positions de l'outil sont déterminées en faisant correspondre le noeud et le point de référence de l'outil (figure 84).

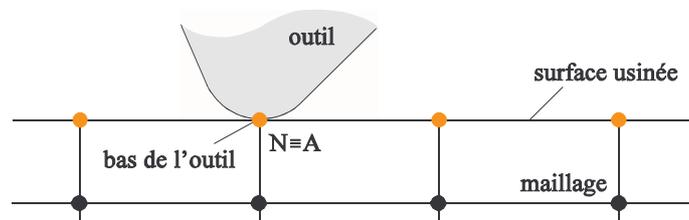


Figure 84 : positions de l'outil en tournage

Les forces de coupe sont appliquées selon un système d'axes propre à chaque noeud. Pour des opérations de chariotage et d'alésage, l'axe \vec{e}_z est l'axe d'avance, l'axe \vec{e}_θ est l'axe de coupe et l'axe \vec{e}_R est l'axe selon lequel est appliquée la force passive. En dressage, l'axe d'avance est l'axe \vec{e}_R et la force passive est appliquée selon l'axe \vec{e}_z . Pour la plupart des opérations de tournage, les conditions de coupe sont constantes tout au long de la trajectoire, ce qui correspond à des forces de coupe constantes.

Cependant, les conditions de coupe peuvent varier dans certaines situations :

- en dressage, si la fréquence de rotation est fixée, la vitesse de coupe diminue ou augmente selon que l'outil se déplace vers l'axe de rotation ou non;
- on peut réduire l'avance durant l'usinage afin de limiter les efforts de coupe;
- la profondeur de passe peut varier à cause des inégalités de la pièce brute, du mauvais alignement de l'axe de la pièce et de l'axe du tour ou du défaut de forme engendré par une opération antérieure.

Dans ces différentes situations, on doit recalculer les efforts de coupe pour chaque position de l'outil. Dès lors, il faut pouvoir prendre en compte n'importe quel type de variation des conditions de coupe sur la trajectoire. Par exemple, pour le chariotage d'un barreau, on peut réduire l'avance lorsqu'on usine le milieu du barreau, de manière à limiter sa déformation et, par conséquent, son défaut de forme (figure 85). En pratique, pour calculer les efforts de coupe, il faut déterminer les conditions de coupe effectives (avance, profondeur de passe, vitesse de coupe, ...) qui sont associées à chaque position de l'outil.

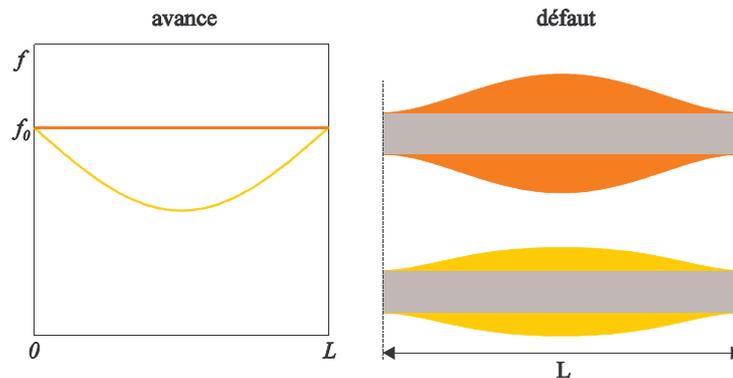


Figure 85 : diminution de l'avance par tour au milieu de la trajectoire

2.4.3. Positions de l'outil en fraisage

En fraisage en bout, la trajectoire de l'outil dépend du type de machine utilisée. Sur une machine-transfert, il s'agit presque toujours d'une trajectoire rectiligne avec une fraise de diamètre plus large que la pièce, car ce type de machine ne possède pas de contrôleur permettant des trajectoires plus complexes. Sur des centres d'usinage, on peut utiliser une fraise dont le diamètre est moins grand que la largeur de la surface à réaliser, pour des raisons d'encombrement par exemple. Dans ce cas, l'outil peut décrire une trajectoire plus complexe constituée de plusieurs segments rectilignes entrecoupés éventuellement par des portions d'arcs de cercles (figure 86).

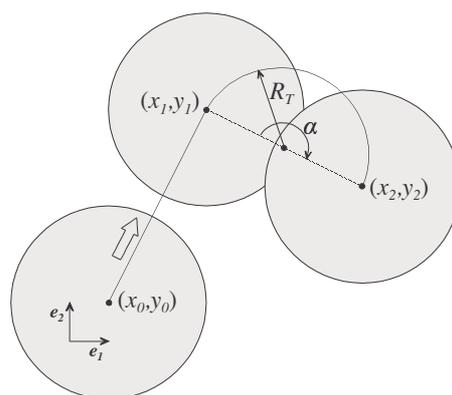


Figure 86 : trajectoire complexe en fraisage en bout

Chaque segment est caractérisé par les coordonnées de son origine et de son extrémité. Pour les segments circulaires, il faut en plus donner le rayon de la trajectoire R_T , l'angle d'ouverture du segment α et le sens de parcours (horlogique/anti-horlogique). En fraisage, un système d'axes cartésiens est utilisé. Les axes \vec{e}_1 et \vec{e}_2 se trouvent dans le plan de la surface usinée et le troisième axe \vec{e}_3 est normal à celle-ci et

pointe vers l'extérieur de la pièce.

Pour un noeud N de la surface usinée de coordonnées (x_N, y_N) , le problème consiste à déterminer la position du centre d'un cercle de diamètre D qui suit la trajectoire et tel que le noeud N appartienne au cercle.

Segment rectiligne

Pour un segment rectiligne (figure 87a), le centre de la fraise part du point P_0 de coordonnées (x_0, y_0) et atteint le point P_1 de coordonnées (x_1, y_1) . Géométriquement, le problème revient à trouver les intersections du segment P_0P_1 avec le cercle de rayon $R_f = D/2$ centré en N. L'équation paramétrique de la droite d_{01} est

$$\begin{cases} x = (1 - t)x_0 + tx_1 \\ y = (1 - t)y_0 + ty_1 \end{cases} \quad (39)$$

et celle de la droite d_{NE} perpendiculaire à d_{01} passant par le noeud N est

$$(x_1 - x_0)(x - x_N) + (y_1 - y_0)(y - y_N) = 0 \quad (40)$$

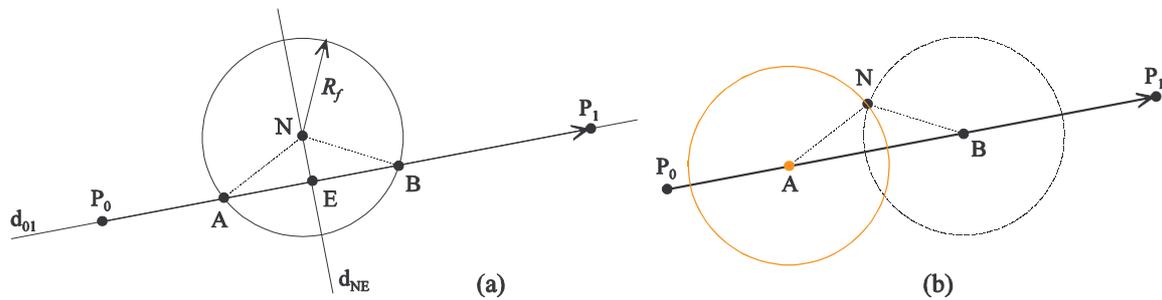


Figure 87 : position du problème (a) et solution (b) pour un segment de trajectoire rectiligne

A partir de ces deux équations, on peut trouver la valeur du paramètre t_E correspondant au point E

$$t_E = \frac{(x_1 - x_0)(x_N - x_0) + (y_1 - y_0)(y_N - y_0)}{\|P_0P_1\|^2} \quad (41)$$

et ses coordonnées (x_E, y_E) . Si la distance $\|NE\|$ est inférieure ou égale à R_f , il y a deux intersections entre le cercle et la droite d_{01} . Parmi ces deux intersections, seul le point A correspond à une position où la partie avant de la fraise coupe le noeud N (figure 87b). Le point B correspond quant à lui à une position de la fraise pour laquelle la partie arrière de l'outil coupe le noeud. La valeur t_A correspondant au point A est donnée par

$$t_A = t_E - \frac{\sqrt{R_f^2 - \|NE\|^2}}{\|P_0P_1\|} \tag{42}$$

Si cette valeur est comprise dans l'intervalle $[0 , 1]$, le noeud N est coupé par l'outil sur la portion de trajectoire P_0P_1 lorsque le centre de la fraise se trouve en (x_A, y_A) .

Segment circulaire

Pour un segment circulaire, la fraise part du point P_0 et atteint le point P_1 sur l'arc de cercle de rayon R_T et d'ouverture angulaire α (figure 88). Le centre de la trajectoire est le point T de coordonnées (x_T, y_T) . Le problème géométrique consiste à trouver la position d'un cercle dont le centre se déplace sur l'arc de cercle et telle que le noeud N appartienne au cercle. Cela revient à trouver les intersections du cercle de rayon R_f centré en N et du segment circulaire P_0P_1 .

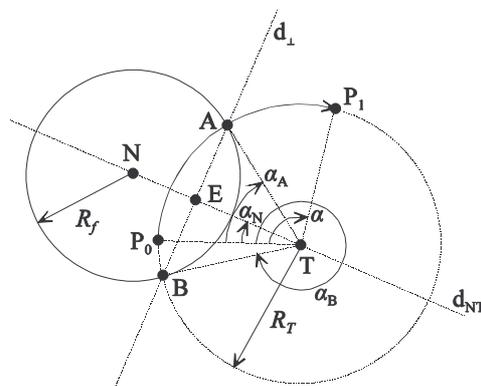


Figure 88 : position du problème

Si la distance $\|NT\|$ est inférieure à la somme des deux rayons R_f et R_T , le problème admet deux solutions : les points A et B qui se trouvent respectivement à des angles α_A et α_B comptés à partir de P_0 et positifs dans le sens de la trajectoire. La position du centre de la fraise pour laquelle la partie avant coupe le noeud N correspond au plus petit des deux angles immédiatement inférieur à α_N ou $\alpha_N + 2\pi$ et inférieur à α . Il peut n'exister aucune solution (figure 89a) ou une seule solution (figure 89b).

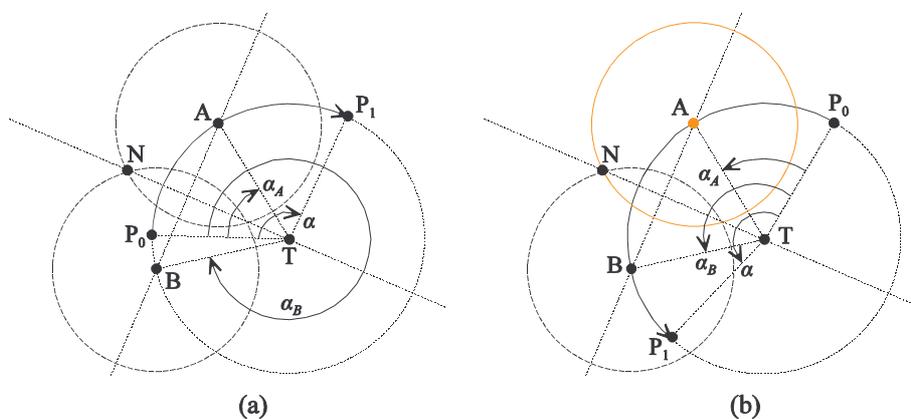


Figure 89 : exemples de portions circulaires; la solution est tracée en orange

Position des dents de la fraise

Pour une position donnée de la fraise, nous connaissons la position du point de référence d'une plaquette, celle qui se trouve sur le noeud considéré. Pour connaître la position des autres plaquettes de la fraise, nous devons faire l'hypothèse que toutes les plaquettes sont *identiques et régulièrement espacées*.

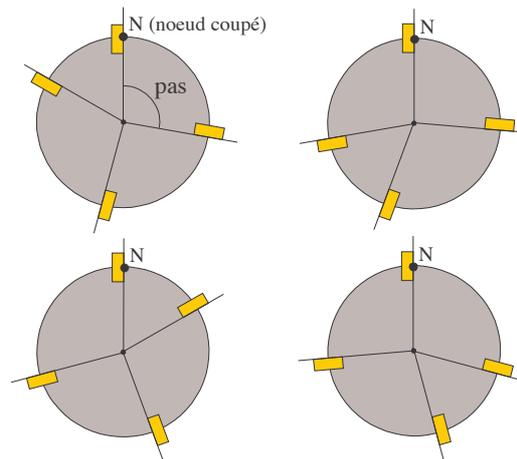


Figure 90 : indétermination de la position angulaire dans le cas d'une fraise à pas variable

Ainsi, le cas des fraises à *pas variable* ne peut pas être modélisé car la position angulaire de la fraise est indéterminée (figure 90). Un pas angulaire variable permet de diminuer les vibrations forcées ou le broutement en réduisant les harmoniques principaux de l'excitation. Cependant, ce type de fraise est rarement utilisé.

Par contre, en finition, on utilise souvent des fraises avec une ou plusieurs plaquettes racleuses. Les efforts appliqués par ce type de plaquette sont égaux à ceux exercés par les plaquettes classiques, augmentés des efforts nécessaires au *brunissage* de la surface, c'est-à-dire à l'aplatissement des sillons de rugosité. Ces efforts ne sont pas négligeables mais ils sont difficiles à calculer car il ne s'agit pas de coupe mais de formage (déformations plastiques). Dès lors, nous ne prendrons pas en compte cette augmentation des efforts de coupe.

Trajectoire multiple

Lorsque la trajectoire est composée de plusieurs segments, il faut considérer les segments dans l'ordre chronologique pour déterminer les positions successives du centre de la fraise. Pour chaque segment, on détermine si le noeud est coupé ou non par une des deux méthodes décrites ci-dessus, selon qu'il s'agit d'un segment rectiligne ou circulaire.

2.4.4. Positions de l'outil en alésage au grain

Pour l'alésage au grain, la surface usinée est un cylindre. Nous utilisons un système de coordonnées cylindriques où l'axe du cylindre z est l'axe d'avance. L'outil est modélisé par un cercle de diamètre D qui joint le point de référence des Z plaquettes et qui se déplace selon l'axe z . La position de l'outil pour laquelle un noeud N de coordonnées (R_N, θ_N, z_N) est coupé est simplement égale à la coordonnée z_N du noeud (figure 91). Les positions successives de l'outil correspondent aux coordonnées des noeuds de la surface.

Comme pour la fraise, on suppose que les plaquettes sont toutes identiques et régulièrement espacées. Ainsi, pour la position de l'outil correspondant au noeud N , il y a une plaquette dont le point de référence se trouve sur le noeud N , ce qui fixe la position des $Z - 1$ autres plaquettes de l'outil.

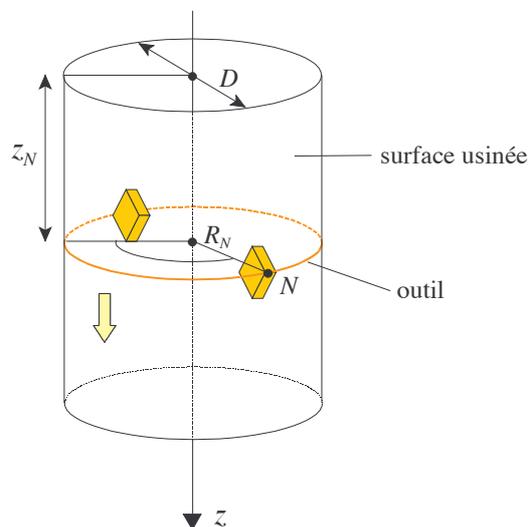


Figure 91 : position de l'outil en alésage au grain

Il arrive fréquemment que l'on réduise la vitesse d'avance à la sortie de l'alésage, de manière à éviter les bavures (figure 92). Dès lors, il faut, comme en tournage, pouvoir considérer des conditions de coupe variables le long de la trajectoire de l'outil.

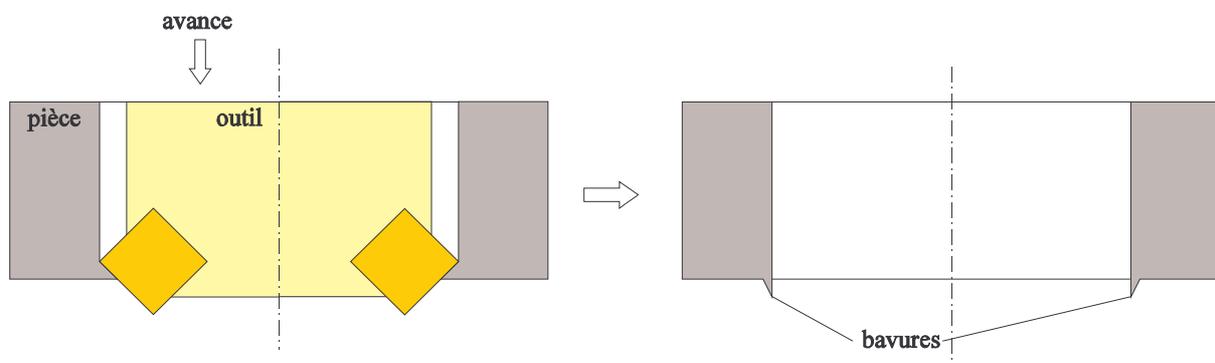


Figure 92 : bavures produites lors de la sortie de l'outil d'alésage

2.4.5. Répartition des forces de coupe

Une fois les positions successives de l'outil déterminées, il faut pour chaque position calculer les forces de coupe et les répartir sur les noeuds du maillage correspondant à la surface usinée. La répartition des efforts peut être réalisée de deux manières :

- appliquer les forces ponctuellement,
- répartir les forces sur la projection de l'arête de coupe (figure 93a).

Notons qu'aucune des deux méthodes ne permet de modéliser le chargement réel de la pièce. En effet, les forces développées par l'outil sont appliquées sur la surface de coupe. Or, le modèle d'éléments finis que nous utilisons ne correspond pas à la géométrie instantanée de la pièce, mais à celle de la pièce finie. En appliquant les forces de coupe sur la surface usinée, l'effet des forces est sous-estimé car le bras de levier réel $d^{réel}$ par rapport aux zones de fixation est plus grand que celui de la modélisation d^{mod} (figure 93b). Cependant, comme pour l'effet de l'enlèvement de matière, cette erreur est relativement faible pour la plupart des applications car la profondeur de passe est petite par rapport aux dimensions de la pièce.

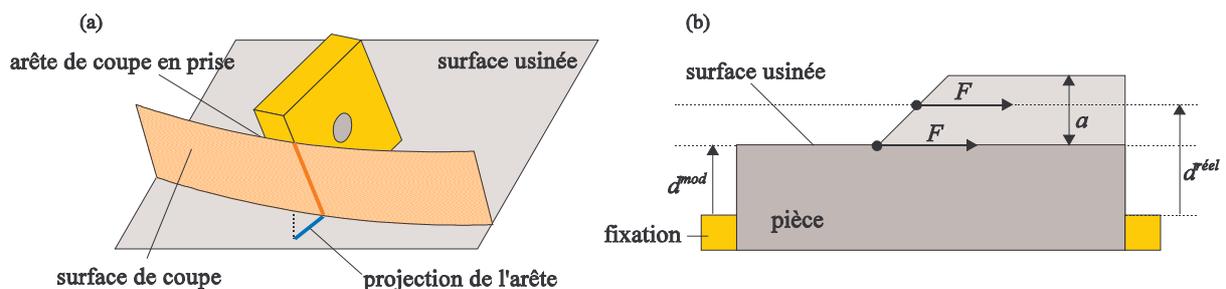


Figure 93 : projection de l'arête de coupe sur la surface usinée (a) et erreur sur le point d'application des forces (b)

Application ponctuelle des forces

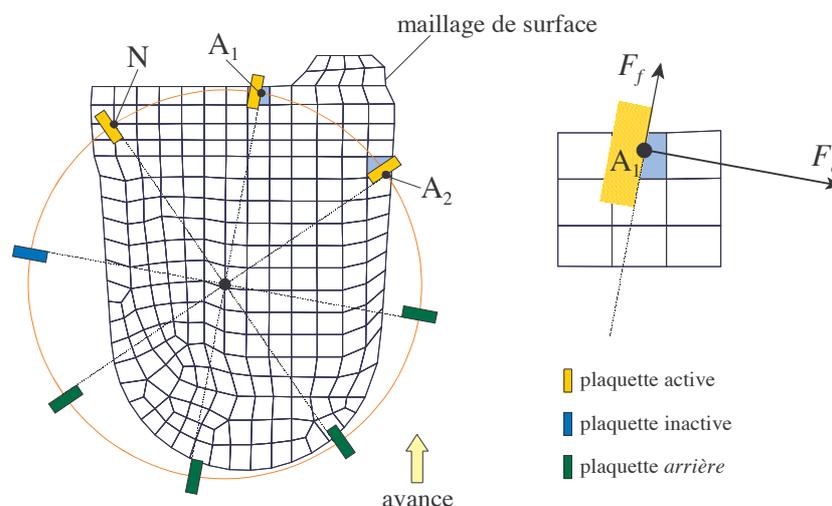


Figure 94 : application ponctuelle des forces de coupe en fraisage

Selon qu'il présente une ou plusieurs plaquettes, l'outil est modélisé respectivement par un point de référence ou par plusieurs points répartis sur un cercle. La méthode la plus immédiate est d'appliquer directement les forces de coupe sur le ou les points de référence. Dans le cas du tournage, cela revient à appliquer les forces directement sur le noeud coupé. Pour un outil à plusieurs plaquettes de coupe, les efforts développés par la plaquette se trouvant sur le noeud coupé sont appliqués directement sur celui-ci. Par contre, pour les $Z - 1$ autres plaquettes, le point d'application A se trouve généralement au milieu d'un élément de surface du maillage (colorié en bleu dans la figure 94). Notons qu'en fraisage, certaines plaquettes se trouvent en dehors de la surface et d'autres se trouvent à l'arrière de la fraise et n'appliquent pas d'efforts car elles ne coupent pas la matière. En alésage au grain, la surface usinée est continue, ce qui fait que toutes les plaquettes de l'outil sont actives.

Afin de répartir les efforts sur les noeuds, il faut d'abord déterminer à quel élément appartient le point A. Nous utilisons une méthode de *fenêtrage* : pour chaque élément, on détermine la fenêtre rectangulaire parallèle aux axes de la surface et qui contient l'élément surfacique (figure 95); chaque fenêtre est légèrement dilatée afin de contenir entièrement l'élément; pour chaque point d'application A_i de coordonnées (x_i, y_i) , on détermine pour chaque élément si le point est intérieur à la fenêtre définie par les intervalles $[x_0, x_1]$ et $[y_0, y_1]$. En général, on trouve plusieurs éléments, deux dans la majorité des cas, dont la fenêtre contient le point A_i . En calculant les coordonnées *isoparamétriques* (ξ_A, η_A) du point A_i pour chacun de ces éléments, on peut alors déterminer celui qui le contient et répartir les efforts de coupe sur les noeuds de cet élément grâce aux *fonctions de forme* (voir ci-après). L'intérêt de la méthode de fenêtrage est de ne pas devoir calculer les coordonnées isoparamétriques pour tous les éléments, ce qui est relativement cher en temps de calcul.

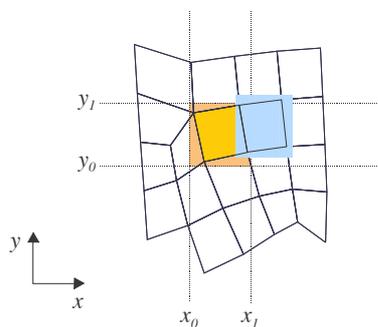


Figure 95 : fenêtrage des éléments surfaciques

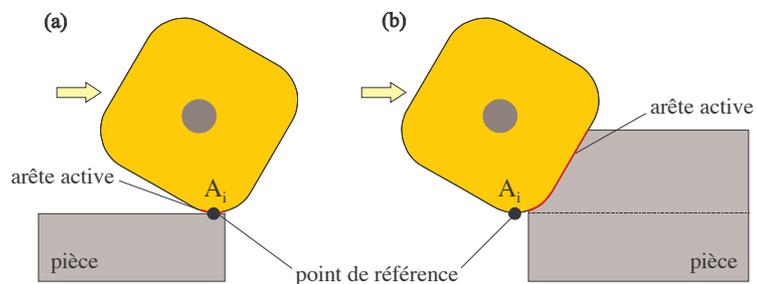


Figure 96 : sortie (a) et entrée (b) d'une plaquette dans la matière

En appliquant les efforts de coupe ponctuellement, on commet une erreur sur le point d'application des forces mais celle-ci est relativement faible par rapport aux approximations que l'on commet par ailleurs dans la modélisation : erreurs de discrétisation de la pièce, calcul approché des forces de coupe, ... Par contre, cette façon d'appliquer les forces de coupe ne permet pas de prendre en compte l'entrée et la sortie progressive des plaquettes. En effet, pour une plaquette située sur la frontière de la surface usinée, on ne peut trouver que deux solutions : soit le point A_i est intérieur à un élément de surface, auquel cas on applique en ce point les forces de coupe comme si la plaquette était complètement engagée (figure 96a), soit le point A_i est en dehors de la surface, auquel cas la plaquette n'applique aucun effort (figure 96b).

Répartition sur la projection de l'arête de coupe

La forme de l'arête de coupe dépend du type de plaquette utilisée. La figure 97 illustre le cas d'une plaquette classique. L'arête est décrite dans l'espace à trois dimensions selon un système d'axes où \vec{e}_c est

la direction supposée de coupe, \vec{e}_f est la direction supposée d'avance et \vec{e}_p est la normale à la surface usinée pointant vers l'extérieur. On définit l'arête active dans le plan perpendiculaire à \vec{e}_c , c'est-à-dire le plan de référence P_r , et dans le plan vers l'arrière P_p , qui est perpendiculaire à \vec{e}_f . Dans le plan P_r , on fixe les coordonnées y et z des points de l'arête B, A, C et D. La coordonnée x de ces points est obtenue par

$$x = -z \tan \gamma_p \quad (43)$$

où γ_p est l'angle de coupe vers l'arrière. L'arête de coupe est limitée au point D, qui correspond à la profondeur de passe maximum, et au point B de l'arête secondaire qui se trouve à la moitié de l'avance par dent f ou de l'avance par tour f_z .

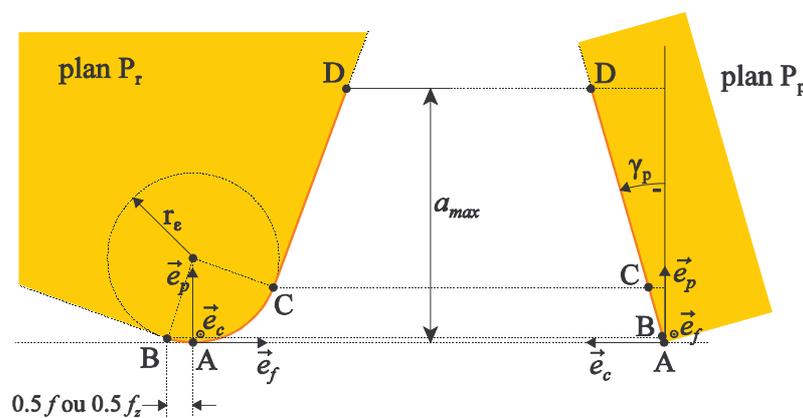


Figure 97 : définition de l'arête de coupe active dans l'espace à trois dimensions

Ensuite, on répartit uniformément $m - 2$ points entre les points B et D puis on les projette dans le plan de travail P_f , qui est perpendiculaire à \vec{e}_p et qui correspond au plan tangent à la surface usinée (figure 98). Pour projeter, on annule simplement la coordonnée z des points. L'arête active est maintenant modélisée par m points répartis sur sa projection sur la surface usinée. La construction de l'arête et la projection ne sont effectuées *qu'une seule fois*.

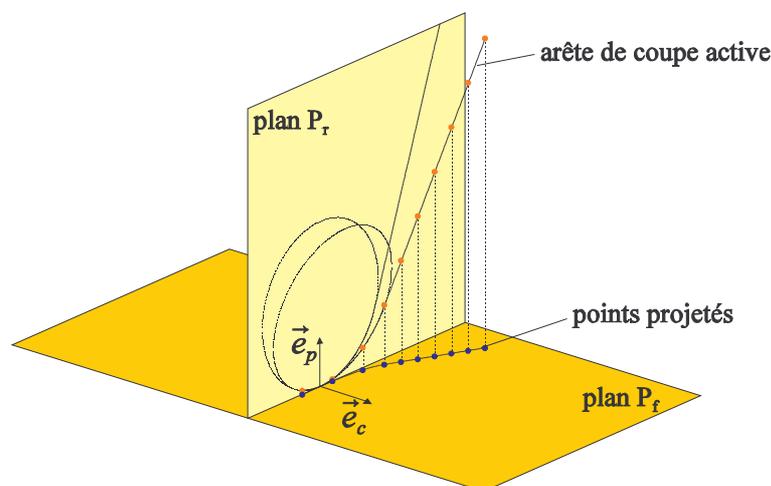


Figure 98 : répartition de m points sur l'arête et projection sur le plan de travail

En fraisage, la surface usinée est décrite dans un système d'axes cartésiens $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, où l'axe \vec{e}_3 est normal à la surface. Pour une position de l'outil et une plaquette données, on doit tout d'abord effectuer une translation des m points du point O, qui est l'origine des axes, au point A_i qui est le point de référence de la plaquette (figure 99a). Ensuite, on effectue une rotation des points de manière à faire correspondre l'axe \vec{e}_c avec la direction de coupe effective.

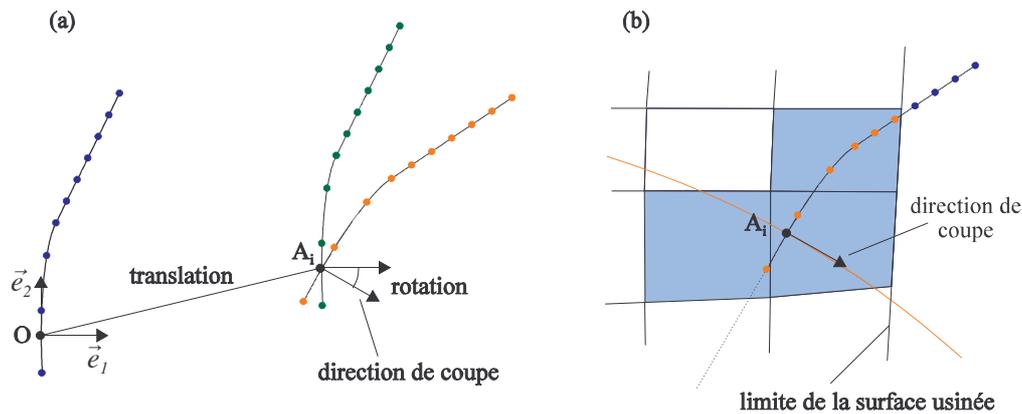


Figure 99 : translation et rotation des points de l'arête (a); points intérieurs (en rouge) et extérieurs (en bleu) à la surface usinée (b)

Il suffit ensuite de déterminer le nombre de points m' qui appartient à des éléments de la surface usinée (figure 99b) et d'appliquer sur ces points les forces de coupe αF_c , αF_f et αF_p , α étant un coefficient de pondération qui vaut $1/m$. Pour cette position de la fraise, la charge de chaque plaquette est donnée par τ qui est égal à m'/m . Pour les plaquettes qui sont complètement engagées, τ est égal à un. Pour une plaquette qui n'est pas engagée, τ est nul et pour une plaquette qui se trouve sur la frontière de la surface usinée, τ prend une valeur intermédiaire entre zéro et un.

En tournage et en alésage, on applique le même principe. La surface usinée est décrite dans un système d'axes cylindriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Si la surface usinée est cylindrique (chariotage, alésage au tour, alésage au grain), on utilise la développée de la surface pour laquelle les coordonnées sont $r\theta$ et z . En dressage, les coordonnées de la surface sont $r\theta$ et r . Comme en fraisage, on doit effectuer une translation et une rotation pour positionner correctement les m points sur la surface usinée.

Discussion

Lorsque nous répartissons les efforts de coupe sur la projection de l'arête, nous faisons implicitement l'hypothèse qu'ils sont uniformément distribués. La distribution réelle des forces de coupe est sans doute plus complexe que cela mais le but ici est seulement de prendre efficacement en compte l'entrée et la sortie des dents.

Dans la méthode des éléments finis, il est préférable d'appliquer des pressions plutôt que des efforts ponctuels ou linéiques. Cependant, nous avons pu vérifier que les erreurs numériques ne sont importantes que si le maillage est très raffiné sous les charges appliquées [ren98]. En pratique, les maillages utilisés pour la simulation ne sont jamais raffinés à ce point.

Calcul des coordonnées isoparamétriques

Pour déterminer si un point est intérieur à un élément, on calcule les coordonnées *isoparamétriques* (ξ, η) du point dans l'élément. Pour un point P dont les coordonnées dans le système d'axes lié à la surface usinée sont (x_p, y_p) , le passage aux coordonnées (ξ_p, η_p) dépend du type d'élément surfacique.

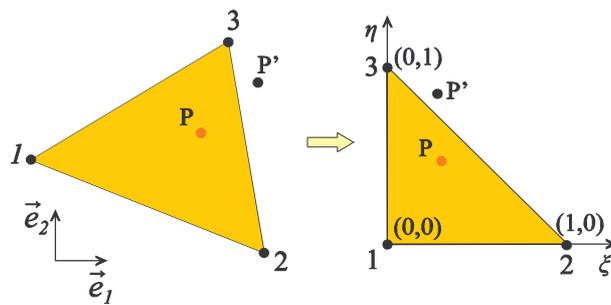


Figure 100 : coordonnées isoparamétriques (triangle du 1^{er} degré)

Prenons le cas de l'élément triangulaire de degré un dont les noeuds ont pour coordonnées (x_j, y_j) . Dans le système de coordonnées isoparamétriques (ξ, η) , l'élément est représenté par un triangle rectangle isocèle de côtés unitaires (figure 100). Les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées isoparamétriques s'écrivent

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta \\ y = \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta \end{cases} \quad (44)$$

avec les coefficients α_j et β_j qui valent

$$\begin{cases} \alpha_1 = x_1 & \alpha_2 = x_{21} & \alpha_3 = x_{31} \\ \beta_1 = y_1 & \beta_2 = y_{21} & \beta_3 = y_{31} \end{cases} \quad \{ *_{ij} = *_{i1} - *_{ij} \} \quad (45)$$

Les coordonnées isoparamétriques du point P sont obtenues en résolvant le système linéaire

$$\begin{cases} x_p = \alpha_1 + \alpha_2 \xi_p + \alpha_3 \eta_p \\ y_p = \beta_1 + \beta_2 \xi_p + \beta_3 \eta_p \end{cases} \quad (46)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \xi_p = \frac{x_{p1} y_{31} - y_{p1} x_{31}}{\Delta} \\ \eta_p = \frac{x_{21} y_{p1} - y_{21} x_{p1}}{\Delta} \end{cases} \quad \text{avec } \Delta = x_{21} y_{31} - y_{21} x_{31} \quad (47)$$

Le point P est intérieur à l'élément si ses coordonnées isoparamétriques satisfont

$$\begin{cases} 0 \leq \xi_p \leq 1 \\ 0 \leq \eta_p \leq 1 \\ \xi_p + \eta_p \leq 1 \end{cases} \quad (48)$$

Pour l'élément quadrangulaire de degré un et les éléments de degré deux, le calcul des coordonnées isoparamétriques n'admet pas de solution analytique. On adopte une méthode numérique qui consiste à minimiser le carré de la distance entre le point de coordonnées (x_p, y_p) et le point $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, soit

$$\begin{cases} \min_{\xi, \eta} f(\xi, \eta) = (x_p - x(\xi, \eta))^2 + (y_p - y(\xi, \eta))^2 \\ \text{avec } \xi, \eta \in [-\varepsilon \dots 1 + \varepsilon] \\ \text{et } \xi + \eta \leq 1 + \varepsilon \text{ (triangle)} \end{cases} \quad (49)$$

Le point de départ dans l'espace (ξ, η) est le centre du triangle ou du carré. La figure 101 montre l'évolution du processus itératif dans le cas d'un quadrangle du second degré. Les isovaleurs de la fonction f sont représentées en couleur. Le nombre d'itérations nécessaires dépend bien entendu de la complexité de l'élément (bords droits ou courbes) et de la précision demandée. Ici on prend une précision égale à $10^{-6} \bar{d}$ où \bar{d} est la taille caractéristique de l'élément : la diagonale pour un quadrangle et la longueur d'un côté pour un triangle. L'intervalle de variation de (ξ, η) est un peu plus large que l'élément pour permettre au processus de détecter un point qui se trouve sur les frontières de l'élément.

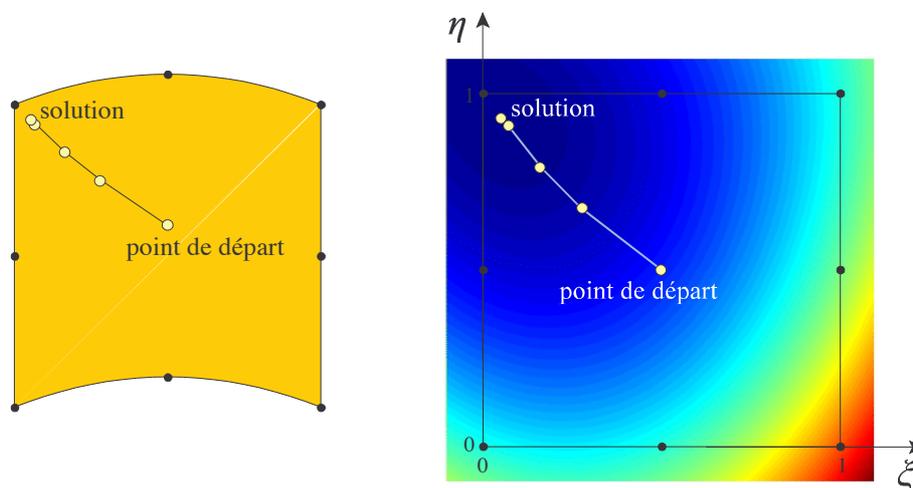


Figure 101 : calcul des coordonnées isoparamétriques d'un point P (quadrangle du 2nd degré)

Répartition sur les noeuds du maillage

Quelle que soit la méthode d'application des forces, on obtient un certain nombre de points où sont appliquées les forces de coupe ou une partie des forces de coupe (αF_i). Pour déterminer le chargement de la structure, il faut calculer les charges nodales qui correspondent à ces forces. Pour cela, on utilise les *fonctions de forme* des éléments surfaciques (*shape functions*).

Pour un point P appartenant à un élément donné et dont les coordonnées isoparamétriques sont (ξ_P, η_P) , les forces appliquées sur les n_e noeuds de l'élément valent

$$f_j = \Phi_j F \quad \{j = 1 \dots n_e\} \quad (50)$$

où F est la force appliquée au point P et Φ_j sont les fonctions de forme. Elles dépendent des coordonnées isoparamétriques et du type d'élément. Ainsi, pour le triangle de degré un, elles valent

$$\begin{cases} \Phi_1 = 1 - \xi_P - \eta_P \\ \Phi_2 = \xi_P \\ \Phi_3 = \eta_P \end{cases} \quad (51)$$

et pour le quadrangle du premier degré,

$$\begin{cases} \Phi_1 = (1 - \xi_P)(1 - \eta_P) \\ \Phi_2 = \xi_P(1 - \eta_P) \\ \Phi_3 = \xi_P \eta_P \\ \Phi_4 = (1 - \xi_P)\eta_P \end{cases} \quad (52)$$

2.5. Recoupe de la fraise

2.5.1. Dépinçage de la fraise

En fraisage en bout, l'axe de la fraise est souvent incliné dans le sens de l'avance pour éviter que les dents situées à l'arrière ne recoupent la surface déjà usinée. On appelle cela le *dépinçage* de la fraise. Lorsque l'axe de la fraise est vertical, les dents arrière recoupent la rugosité de la surface. Si le défaut de forme est important, il arrive que la fraise recoupe plus franchement la surface. La recoupe provoque une usure rapide de l'outil car, comme la profondeur de matière recoupée est très petite, seule la pointe des plaquettes est sollicitée. L'axe de la fraise est dépinçé uniquement si la trajectoire s'effectue toujours selon la même direction : un seul segment rectiligne ou plusieurs segments rectilignes parallèles et dans le même sens.

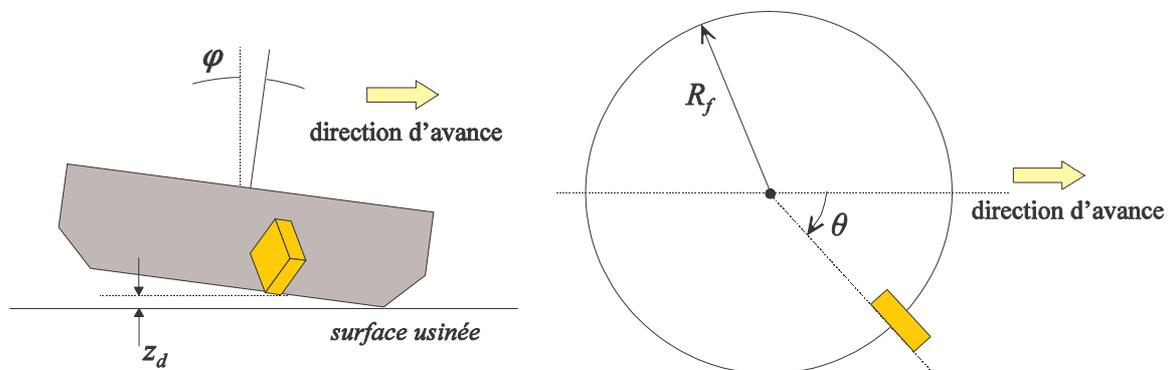


Figure 102 : principe du dépinçage

L'inclinaison de l'axe de la fraise a pour effet de produire une surface en forme de *rigole*. Pour une fraise de rayon R_f dont l'axe est incliné d'un angle φ (figure 102), la hauteur z_d d'une dent située à un angle θ par rapport à la direction d'avance vaut

$$z_d = R_f(1 - \cos\theta) \sin\varphi \quad (53)$$

La forme engendrée par le dépinçage de la fraise est illustrée à la figure 103. L'angle de dépinçage φ est souvent spécifié par la pente de l'axe en mm/m. En général, on choisit le dépinçage minimum, de façon à ce que la fraise ne recoupe pas et que le défaut engendré par le dépinçage ne soit pas trop grand. Si la pièce est très rigide, le dépinçage doit juste permettre d'éviter la recoupe de la rugosité. Par contre, lorsque la pièce est relativement flexible, il faut en plus éviter de recouper le défaut de forme, ce qui n'est pas simple.

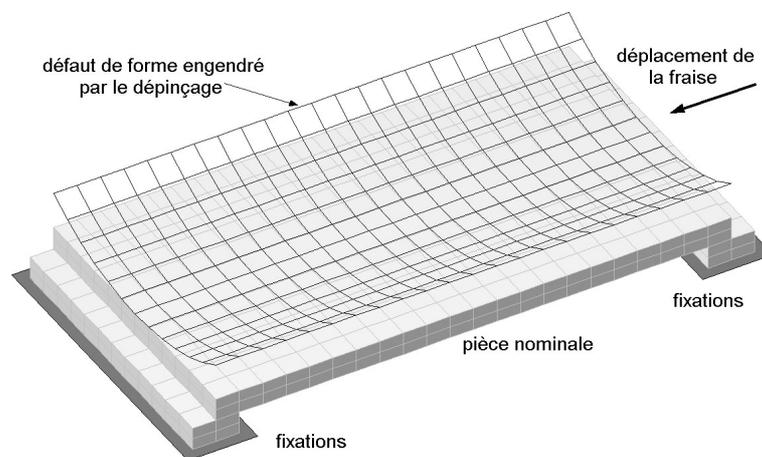


Figure 103 : défaut de forme engendré par le dépinçage de la fraise

Pour un noeud N de la surface usinée situé à un angle θ_N , le défaut dû au dépinçage est calculé par l'équation (53). Le défaut total du noeud est obtenu en additionnant le défaut dû à la déformation de la pièce et celui dû au dépinçage. Comme le dépinçage de l'axe de la fraise est très petit, on suppose qu'il n'a pas d'effet sur les angles de coupe et donc sur les efforts de coupe.

2.5.2. Modélisation de la recoupe

Pour pouvoir déterminer l'angle de dépinçage optimal, on peut modéliser la recoupe de la surface par la partie arrière de la fraise. Pour un point donné de la surface, la recoupe se produit si ce point se trouve plus haut que l'arrière de la fraise lorsqu'elle repasse en ce point.

Lorsque l'arrière de la fraise passe en un noeud N de la surface usinée, la dent située au-dessus du noeud se trouve à une hauteur z_d égale à

$$z_d = R_f(1 - \cos\theta_N) \sin\varphi \quad (54)$$

où θ_N est l'angle du noeud par rapport à la direction d'avance. Si l'axe de la fraise n'est pas dépinché, la

hauteur z_d à laquelle se trouve le bas de la plaquette est nulle. Pour cette position de la fraise, la pièce est déformée à cause des efforts de serrage et/ou à cause des efforts de coupe développés par les dents de la fraise situées à l'avant de celle-ci (figure 104). Si l'on note w_N la composante verticale du déplacement du noeud N, celui se trouve à une hauteur égale à

$$z_N = w_N + d_N \quad (55)$$

où d_N est le défaut du noeud, c'est-à-dire la hauteur de matière laissée par le passage de l'avant de la fraise.

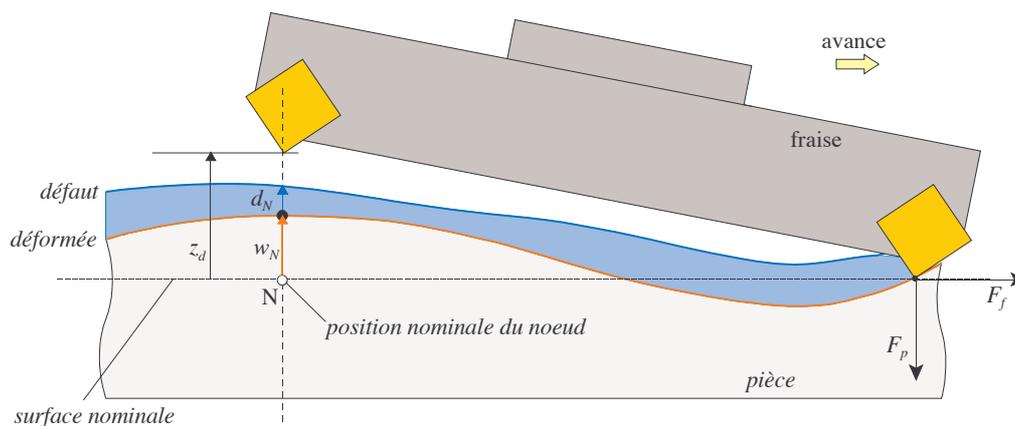


Figure 104 : principe de la recoupe d'un noeud de la surface

La recoupe se produit au noeud N si la hauteur de la dent z_d est inférieure à la hauteur du noeud z_N . En calculant la valeur

$$\Delta_N = z_d - z_N \quad (56)$$

pour chaque noeud, on peut visualiser les zones de la surface usinée qui sont recoupées, c'est-à-dire les noeuds pour lesquels la valeur de recoupe Δ_N est négative.

Lorsque les dents arrière de la fraise recourent la matière, elles appliquent des efforts non nuls sur la pièce. Dans la modélisation, nous ne prenons pas en compte ces efforts car l'engagement des dents arrière est très petit. De plus, le but de la modélisation de la recoupe est précisément d'ajuster l'angle de dépinçage de façon à éviter la recoupe. Cependant, lorsque la trajectoire ne permet pas le dépinçage, la fraise recoupe quasiment tout le défaut de forme engendré par l'avant de la fraise. Dans ce cas, on peut tout de même obtenir la forme de la surface usinée après recoupe en calculant la hauteur de matière recoupée δ_N par

$$\delta_N = \max(-\Delta_N, 0) \quad (57)$$

qui est positive lorsque l'outil recoupe la matière au noeud N et nulle sinon.

Le défaut du noeud N après recoupe est alors égal à

$$d'_N = d_N - \delta_N \quad (58)$$

Les figures 105 à 108 illustrent respectivement le défaut de forme avant recoupe d_N , la différence de hauteur Δ_N entre les dents arrière et la surface, la hauteur de matière recoupée δ_N et enfin la surface finale obtenue après recoupe d'_N . L'outil est une fraise de diamètre 300 à 20 dents. La trajectoire de la fraise est centrée et l'angle de dépinçage est de 0.1 mm/1000. La largeur de la pièce est de 120 mm.

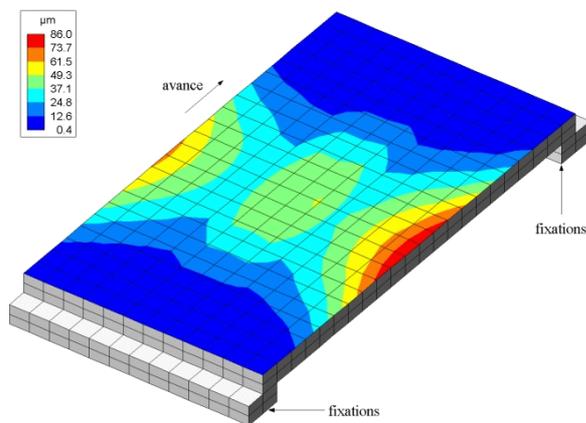


Figure 105 : défaut avant recoupe

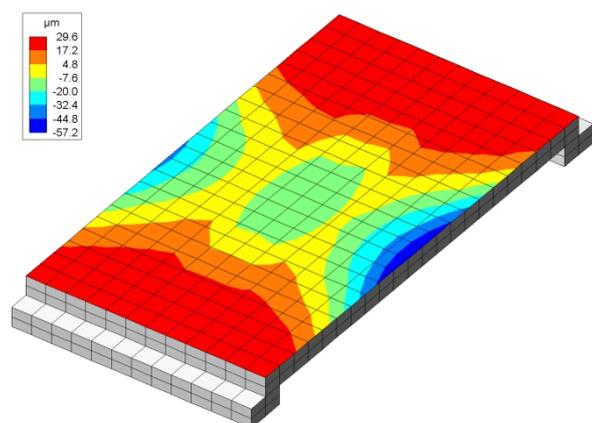


Figure 106 : position relative des dents arrière et de la surface

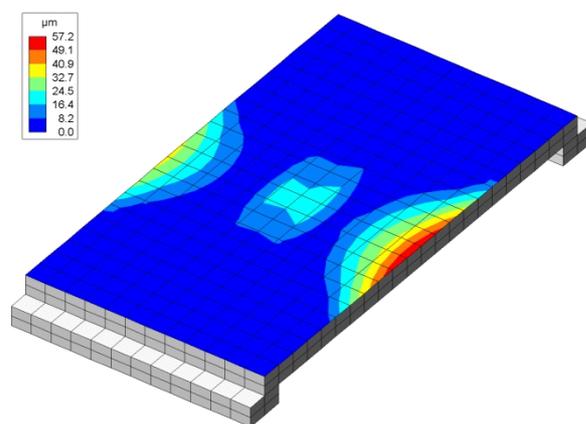


Figure 107 : hauteur de matière recoupée

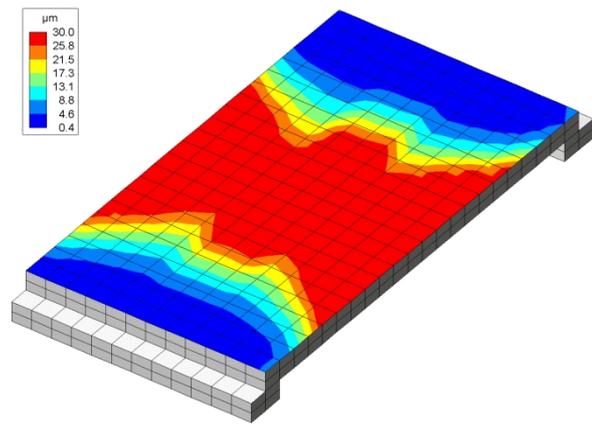


Figure 108 : défaut après recoupe

La position de la fraise pour laquelle une dent située à l'arrière passe sur un noeud N de la surface usinée est déterminée de la même façon qu'au chapitre 2.4.3. Pour la recoupe, on ne considère plus l'avant de la fraise mais la partie arrière. La figure 109 illustre les cas respectivement d'un segment de trajectoire rectiligne et d'un segment circulaire. La position du centre de la fraise lorsque celle-ci recoupe le noeud N est le point B.

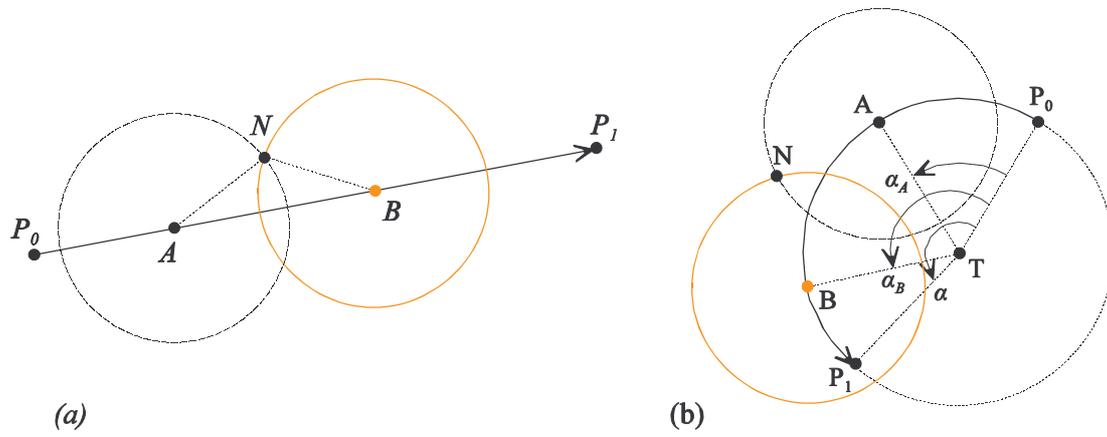


Figure 109 : position de la fraise pour la recoupe du noeud N sur un segment rectiligne (a) et circulaire (b)

3. Développement d'un code de calcul opérationnel

Le problème à résoudre présente un très grand nombre de cas de charge. Les premiers tests montrent que les codes de calcul généraux ne sont pas adaptés à de tels problèmes. Dès lors, pour obtenir des performances satisfaisantes, il faut faire appel à des méthodes non standard. La procédure choisie consiste à réduire la taille du système en condensant les degrés de liberté qui n'interviennent pas explicitement dans le problème. Pour cela, on crée un superélément avec les degrés de liberté utiles. Ensuite, le calcul est effectué en dehors du code d'éléments finis : pour des conditions aux limites classiques, la matrice de raideur du système réduit est inversée, tandis que pour des problèmes de contact, la solution est obtenue en minimisant l'énergie totale du système avec des contraintes d'inégalité sur certains degrés de liberté. Les performances du code de calcul développé sont mises en évidence sur quelques applications de grande taille.

3.1. Méthodes standard

3.1.1. Introduction

L'obtention du défaut de la surface usinée requiert le calcul de L déformées de la structure. Le nombre de cas de charge L est égal au nombre de noeuds de la surface usinée n , sauf en fraisage où il est compris entre n et $2n$, car on prend en compte la recoupe de l'outil. Pour des conditions aux limites classiques, il faut donc résoudre les équations d'équilibre du système avec L seconds membres, soit

$$\mathbf{K} \mathbf{q}^{(l)} = \mathbf{g}^{(l)} \quad l = 1, L \quad (59)$$

où \mathbf{K} est la matrice de raideur, $\mathbf{q}^{(l)}$ est un vecteur contenant les m degrés de liberté du système et $\mathbf{g}^{(l)}$ est un vecteur contenant les forces extérieures pour le cas de charge l . Par soucis de clarté, l'indice (l) du cas de charge est omis dans les développements suivants.

Lorsqu'on considère du contact pur au niveau de certains supports de la pièce, le problème consiste à minimiser L fois l'énergie totale du système, soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{q}} \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{g} \quad (L \text{ problèmes}) \\ \text{avec } q_j \leq U_j \quad j = 1, J \end{array} \right. \quad (60)$$

où les J degrés de liberté q_j sont soumis à des contraintes de bornes.

Le problème à résoudre est à la fois classique et original. Classique parce qu'il ne s'agit que d'un calcul de statique linéaire, avec éventuellement du contact pur. Original par les aspects suivants. Tout d'abord, pour des applications réalistes, le nombre de cas de charge est élevé, entre quelques centaines et quelques milliers, pour des systèmes présentant jusqu'à quelques centaines de milliers de degrés de liberté. Or, les applications classiques de la méthode des éléments finis comportent rarement plus de quelques centaines de cas de charge. De plus, pour chaque cas de charge, il ne faut calculer que le déplacement du noeud coupé par l'outil. Le calcul des contraintes, des réactions et de l'ensemble des degrés de liberté est sans objet. Il est donc utile de vérifier si les codes de calcul généraux sont efficaces pour ce type de problèmes ou s'il n'est pas plus avantageux de développer un code spécifique.

Les caractéristiques des applications utilisées à titre de test sont indiquées dans la table 5. Les modèles d'éléments finis correspondants sont illustrés aux figures 110 à 114. Les surfaces usinées sont coloriées en bleu. La taille des modèles choisis va de 39000 à 330000 degrés de liberté, ce qui donne une idée du type de maillages que l'on rencontre en simulation de l'usinage.

	noeuds (total)	noeuds (surface usinée)	éléments	degrés de liberté	cas de charge
paliers d'arbre-à-cames	5180	812	3201	39075	1330
palier de suspension	13112	563	9505	121749	563
moyeu de boîte de vitesses	13146	1742	8754	117810	1742
collecteur d'échappements	21040	1017	14631	188031	1017
carter-cylindres D4*	109729	2027	59641	329187	2027

Table 5 : caractéristiques des applications tests; l'astérisque indique qu'il s'agit d'un maillage du 2nd degré

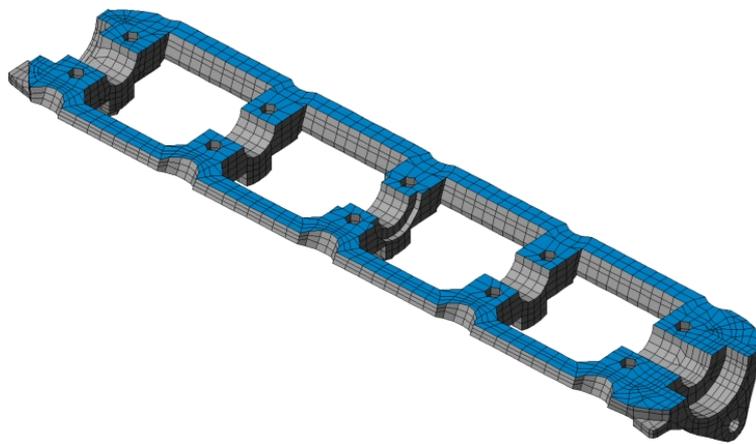


Figure 110 : paliers d'arbre-à-cames

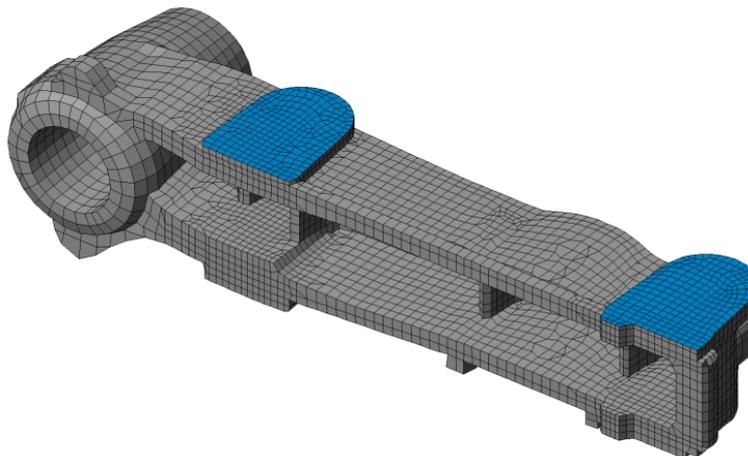


Figure 111 : palier de suspension

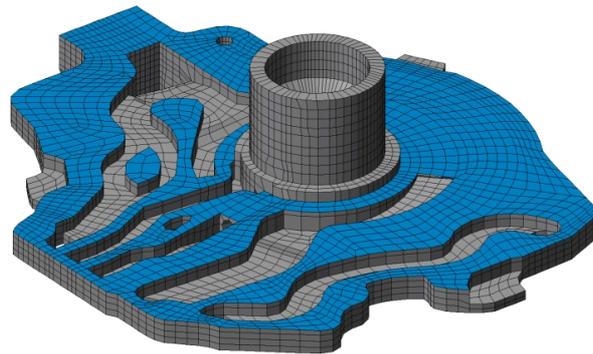


Figure 112 : moyeu de boîte de vitesses

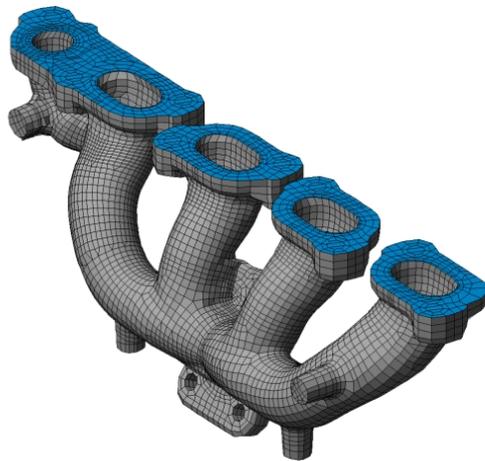


Figure 113 : collecteur d'échappements

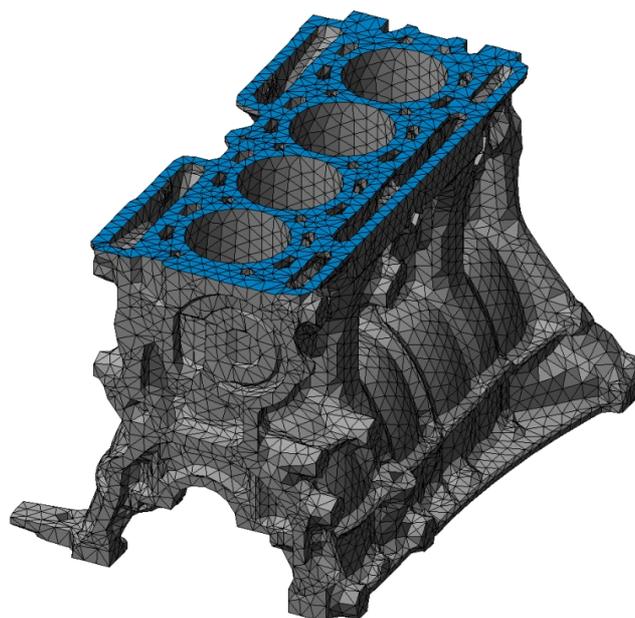


Figure 114 : carter-cylindres D4

3.1.2. Résolution

Les tests présentés dans ce chapitre ont été réalisés avec le code d'éléments finis SAMCEF [sam04]. Les calculs ont été réalisés avec la version 9.1 de SAMCEF sur un PC standard dont les caractéristiques sont données ci-dessous.

processeur	Athlon 1.2 GHz
mémoire physique	1.5 Gb
mémoire paginée	1 Gb
capacité du disque dur	40 Gb
système d'exploitation	Windows NT 4 Workstation

Table 6 : description de la machine utilisée pour les calculs

Deux algorithmes de résolution disponibles dans SAMCEF ont été testés, la méthode frontale classique et une méthode multi-frontale. Pour tous les tests, seuls les déplacements sont calculés.

Comme l'indique la table 7, les résultats sont très peu satisfaisants. Avec la méthode frontale, seules les deux premières applications peuvent être résolues tandis qu'avec la méthode multi-frontale, aucun cas n'arrive à son terme. La cause d'erreur est toujours un manque de mémoire. Dans SAMCEF, le second membre du système (59) est stocké en mémoire centrale. Sa taille, qui est égale au nombre de degrés de liberté multiplié par le nombre de cas de charge, dépasse très vite la mémoire disponible (table 7).

	méthode frontale	méthode multi-frontale	2 nd membre (Mb)
paliers d'arbre-à-cames	1773	✗	397
palier de suspension	3957	✗	524
moyeu de boîte de vitesses	✗	✗	1550
collecteur d'échappements	✗	✗	1460
carter-cylindres D4	✗	✗	5091

Table 7 : temps de résolution en secondes (résolution standard); une croix indique que le calcul n'a pas atteint son terme

Ce problème mis à part, la résolution directe du système n'est certainement pas la méthode la mieux adaptée. La taille des fichiers générés par le code croît quasi linéairement avec le nombre de cas de charge, ce qui affecte fortement le temps de résolution car il faut écrire des fichiers volumineux. D'autre part, la totalité des degrés de liberté et les résultantes sont calculés pour chaque cas de charge, ce qui augmente encore le temps de résolution.

Une des caractéristiques marquantes du problème à résoudre est la présence d'un grand nombre de noeuds qui ne sont pas impliqués directement dans la modélisation de l'usinage. On n'applique sur ces noeuds aucune condition aux limites et le calcul de leur déplacement n'est pas nécessaire. C'est le cas

notamment de tous les noeuds internes de la structure. Une solution intéressante serait de réduire le système aux seuls noeuds *utiles*, ceux de la surface usinée et ceux où l'on applique les conditions aux limites modélisant la fixation de la pièce [mas02, mas03b]. C'est précisément ce que permet de faire la *méthode du superélément*.

3.2. Méthode du superélément

3.2.1. Principe

Le principe de la méthode du superélément est de condenser une partie des degrés de liberté. En séparant les m degrés de liberté du système en m_R degrés de liberté retenus, notés \mathbf{q}_R , et m_C degrés de liberté condensés, notés \mathbf{q}_C , le système (59) devient

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RC} \\ \mathbf{K}_{CR} & \mathbf{K}_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_R \\ \mathbf{q}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_R \\ \mathbf{g}_C \end{bmatrix} \quad (61)$$

En exprimant les degrés de libertés condensés \mathbf{q}_C en fonction de \mathbf{q}_R , la première ligne devient

$$\mathbf{q}_C = \mathbf{K}_{CC}^{-1} (\mathbf{g}_C - \mathbf{K}_{CR} \mathbf{q}_R) \quad (62)$$

En remplaçant l'expression de \mathbf{q}_C dans la seconde ligne de l'équation (61), on obtient

$$\left[\mathbf{K}_{RR} - \mathbf{K}_{RC} \mathbf{K}_{CC}^{-1} \mathbf{K}_{CR} \right] \mathbf{q}_R = \mathbf{g}_R - \mathbf{K}_{RC} \mathbf{K}_{CC}^{-1} \mathbf{g}_C \quad (63)$$

ce qui est la forme du système réduit recherché. Si aucune charge n'est appliquée sur les degrés de liberté condensés, le système réduit devient

$$\left[\mathbf{K}_{RR} - \mathbf{K}_{RC} \mathbf{K}_{CC}^{-1} \mathbf{K}_{CR} \right] \mathbf{q}_R = \mathbf{g}_R \Leftrightarrow \mathbf{K}_{RR}^* \mathbf{q}_R = \mathbf{g}_R \quad (64)$$

où \mathbf{K}_{RR}^* est la *matrice de raideur condensée*. La méthode du superélément n'a d'intérêt que si la taille m_R du système réduit est largement inférieure à la taille du système initial. Elle est souvent utilisée lorsque la structure présente un motif qui se répète plusieurs fois comme pour une roue de turbine par exemple. Son utilisation classique comporte généralement trois phases : création du ou des superéléments, assemblage et résolution du système et restitution du ou des superéléments. La phase de restitution consiste à appliquer l'équation (62) de manière à obtenir les degrés de liberté condensés \mathbf{q}_C .

Pour les applications considérées, la taille du système réduit varie de un à cinq pour cent de la taille du système initial. *A priori*, le fait de travailler sur le système réduit devrait permettre de surmonter les difficultés rencontrées pour la résolution directe. Les performances des deux premières phases, création et utilisation, sont discutées aux chapitres suivants. Quant à la phase de restitution, elle n'a pas d'intérêt ici puisque le calcul des degrés de liberté condensés \mathbf{q}_C n'est pas nécessaire.

3.2.2. Création du superélément

La phase de *création* consiste à obtenir la matrice de raideur du système réduit K_{RR}^* par l'équation (64). Aucune condition aux limites n'est appliquée à la structure, afin d'éviter de devoir recréer le superélément pour chaque prise de pièce. Les performances de la méthode multi-frontale sont données à la table 8.

	temps (s)	mémoire (Mb)	disque (Mb)
paliers d'arbre-à-cames	29	152	138
palier de suspension	85	309	364
moyeu de boîte de vitesses	221	756	567
collecteur d'échappements	138	522	604
carter-cylindres D4	2410	3209 (987)	1028

Table 8 : caractéristiques de la phase de création du superélément (méthode multi-frontale)

Lors de la création du superélément, le problème de mémoire constaté avec la méthode directe ne se présente plus car aucun cas de charge n'est appliqué à la structure. Selon les applications, la méthode frontale est de l'ordre de 10 à 30 fois plus lente que la méthode multi-frontale. Les performances de cette dernière sont impressionnantes, à peine 40 minutes pour le carter-cylindres. L'espace disque requis (fichiers intermédiaires compris) ne dépasse pas un gigabyte. Enfin, la taille mémoire nécessaire est très faible, comparée à celle requise pour la résolution directe. Remarquons que les valeurs indiquées dans la table 8 sont celles qui sont nécessaires pour la résolution en mémoire centrale. Pour le carter-cylindres, il n'était pas possible d'allouer la taille optimale et on a donc utilisé une valeur un peu plus faible que la mémoire physique de la machine (987 Mb).

Le code SAMCEF s'avère parfaitement bien adapté pour la phase de création du superélément, même pour de grosses applications.

3.2.3. Résolution du système réduit

Pour nos applications, la phase d'utilisation dans SAMCEF consiste à charger le superélément, à appliquer les conditions aux limites (fixations, raideurs et éventuellement contacts), à appliquer les L cas de charge et à résoudre le système réduit de manière classique, soit

$$K_{RR}^* q_R = g_R \quad (L \text{ problèmes}) \quad (65)$$

dans le cas linéaire. Les caractéristiques de la résolution pour la méthode multi-frontale sont données à la table 9. Les difficultés liées au grand nombre de cas de charge se posent à nouveau mais de façon moins marquée que pour la résolution du système complet. On arrive en effet à résoudre toutes les applications sans problèmes de mémoire ou d'espace disque. Le temps de calcul est cependant toujours conséquent, en partie à cause des nombreux accès disque. Notons que les valeurs de temps, de mémoire

et d'espace disque ne dépendent plus du modèle EF initial mais seulement de la taille du superélément et du nombre de cas de charge. L'avantage de la méthode multi-frontale sur la méthode frontale n'est pas aussi marqué que pour la création du superélément car la *matrice de raideur condensée* \mathbf{K}_{RR}^* est pleine, ce qui est dû au fait qu'on ne conserve dans le superélément que des noeuds situés sur la peau du modèle d'éléments finis.

	temps (s)	mémoire (Mb)	disque (Mb)
paliers d'arbre-à-cames	370	83	369
palier de suspension	97	41	135
moyeu de boîte de vitesses	2287	255	1115
collecteur d'échappements	450	89	382
carter-cylindres D4	3617	503	1508

Table 9 : caractéristiques de la phase d'utilisation du superélément (méthode multi-frontale)

Malgré la nette amélioration des performances apportée par la méthode du superélément, l'efficacité n'est pas encore satisfaisante, surtout si on doit réaliser de nombreux calculs. Pour le carter-cylindres, cela prendrait plusieurs heures, ce qui rendrait la simulation peu attrayante.

Dans SAMCEF, la création du superélément est réalisée de manière très efficace. C'est la résolution même du système qui n'est pas optimale car le code n'est pas conçu pour tirer profit des caractéristiques particulières du problème :

- un seul degré de liberté à calculer par cas de charge,
- peu de termes non nuls dans les vecteurs de charges.

Cette constatation vaut pour tous les codes d'éléments finis généraux. Pour diminuer le temps de calcul, il faut développer un code de calcul spécifique. SAMCEF sera seulement utilisé pour créer le système réduit tandis que le code développé permettra de résoudre le problème multi-cas de charges en linéaire ou celui avec du contact pur.

Enfin, notons que la méthode du superélément est implantée dans la plupart des codes d'éléments finis. Dans le logiciel que nous avons développé, la création du superélément peut être réalisée indifféremment dans SAMCEF ou dans NASTRAN.

3.3. Outils de résolution spécifiques

3.3.1. Conditions aux limites

Pour créer le superélément, il faut préalablement définir les degrés de liberté conservés. En pratique, il suffit de sélectionner des groupes de noeuds ou de faces externes du modèle qui correspondent aux surfaces usinées de la pièce ou à des zones de support ou de fixation (figure 115). Lors de la création du superélément, aucune condition aux limites n'est appliquée. De plus, les noeuds sont toujours définis dans les axes structuraux de la pièce. Une fois le superélément créé, sa matrice de raideur est récupérée

dans le fichier *ad hoc*⁸.

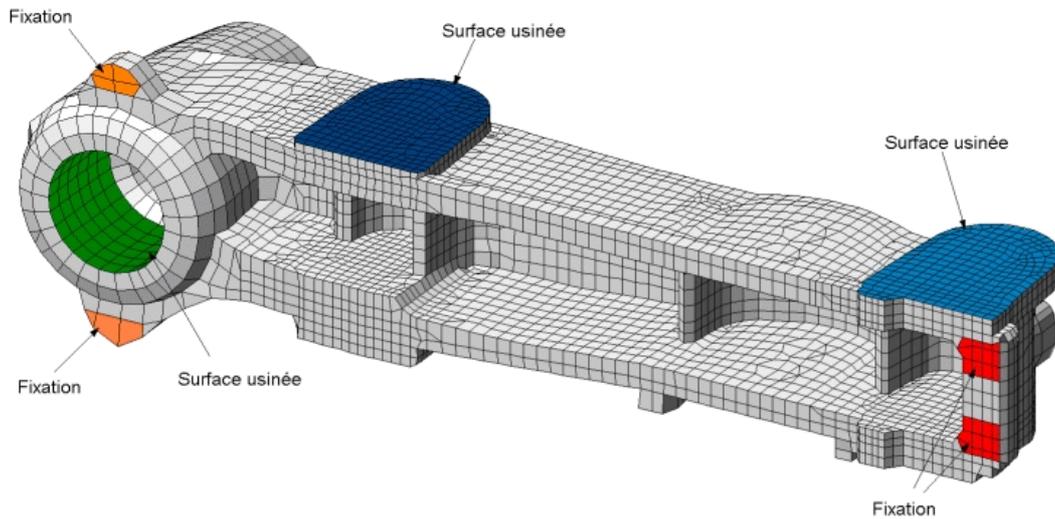


Figure 115 : définition des groupes de nœuds retenus dans le superélément

Afin de pouvoir appliquer les conditions aux limites, il faut préalablement définir des axes locaux et transformer les termes de la matrice selon ces nouveaux axes. Pour chaque nœud du superélément, on considère un système d'axes local où le *troisième axe est toujours normal à la surface de la pièce* et pointe vers l'extérieur. Les axes locaux sont orthonormés et les deux premiers axes sont choisis de la manière la plus cohérente possible (parallèlement à un des axes structuraux par exemple). Pour les surfaces usinées cylindriques (alésage, chariotage), on choisit un système d'axes cylindriques où l'axe normal est radial. Pour les surfaces usinées planes, on utilise un système d'axes cartésiens ou cylindriques selon qu'il s'agit de fraisage ou de dressage au tour.

Pour chaque nœud du superélément, on définit donc un système d'axes local noté $(e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, e_3^{(i)})$. La matrice de rotation correspondante vaut

$$R_{(i)} = [e_1^{(i)} \ e_2^{(i)} \ e_3^{(i)}]^{-1} \quad (66)$$

La matrice de raideur dans les axes locaux est obtenue en multipliant à gauche et à droite par la matrice de rotation globale R , soit

$$R^T K_{RR}^* R \quad \text{avec } R = \begin{bmatrix} R_{(1)} & & & \\ & R_{(2)} & & \\ & & \dots & \\ & & & R_{(n_R)} \end{bmatrix} \quad (67)$$

⁸ Pour SAMCEF, il s'agit d'un fichier d'archivage appelé *unité 18*; pour NASTRAN, c'est le fichier .op4 généré grâce au langage NASTRAN DMAP.

Le fait de toujours considérer le troisième axe local selon la direction normale à la surface est justifié par le fait que c'est selon cette direction que l'on applique les forces de serrage ou que l'on mesure le défaut d'un noeud. Pour modéliser la fixation de la pièce, trois types de conditions peuvent être imposées sur un degré de liberté :

- une fixation,
- une raideur,
- une borne supérieure (contact unilatéral).

Lorsqu'il n'y a pas de condition de contact, il s'agit de résoudre le problème linéaire constitué par les équations d'équilibre du système réduit (65). Dans le cas contraire, il faut trouver les L champs de déplacements \mathbf{q}_R qui minimisent l'énergie totale du système.

3.3.2. Problème linéaire

Après rotation de la matrice et application des conditions aux limites, le problème linéaire peut être résolu en inversant la matrice de raideur de manière à obtenir un système explicite, soit

$$\mathbf{q}_R = \mathbf{S}_{RR} \mathbf{g}_R \quad (L \text{ problèmes}) \quad (68)$$

où \mathbf{S}_{RR} est la *matrice de souplesse* du système réduit. Même pour les plus grosses applications, la taille de la matrice de raideur \mathbf{K}_{RR}^* reste raisonnable. Dès lors, l'inversion n'est pas trop coûteuse. Comme la matrice est pleine, il n'est pas utile de mettre en oeuvre des méthodes d'inversion qui prennent en compte le caractère creux des matrices comme la méthode de la ligne de ciel par exemple. Deux méthodes classiques d'inversion ont été testées : la méthode de Gauss et celle de Cholesky. Nous avons adopté cette dernière, car elle est nettement plus rapide que la méthode de Gauss.

Méthode de Cholesky

Cette méthode est basée sur la factorisation de la matrice. Toute matrice symétrique définie positive A peut être exprimée comme le produit d'une matrice triangulaire par sa transposée, soit

$$A = U^T U = L L^T \quad (69)$$

où les matrices U et L sont des matrices triangulaires respectivement supérieure et inférieure. L'inverse de la matrice A est égale à

$$A^{-1} = U^{-1} U^{-T} = L^{-T} L^{-1} \quad (70)$$

ce qui requiert l'inversion d'une matrice triangulaire et le produit de deux matrices triangulaires.

L'algorithme utilisé provient de la bibliothèque LAPACK [lap04]. Il existe deux versions de l'algorithme, suivant que la matrice est stockée sous forme symétrique ou pleine. L'avantage du stockage complet est que le temps de calcul est plus faible puisque la gestion des indices des termes de la matrice est plus simple. Par contre, elle est environ deux fois plus gourmande en mémoire. Pour la machine que nous avons utilisée, il faudrait une matrice d'environ 14200 sur 14200 pour atteindre la mémoire physique (1.5

Gb). Dès lors, l'algorithme avec stockage complet de la matrice est toujours utilisé en pratique.

Pour éviter les problèmes numériques, la matrice est mise à échelle avant l'inversion de manière à rendre les termes diagonaux unitaires. Les performances de l'inversion sur les applications tests sont données dans la table 10. Le temps d'inversion T dépend du cube de la taille de la matrice m_R . En reportant les temps d'inversion dans un système d'axes logarithmique et en réalisant un ajustement linéaire, on peut estimer la fonction T , ce qui donne, pour la machine utilisée,

$$T(m_R) \approx 6.5 \cdot 10^{-9} m_R^3 \quad (71)$$

	temps (s)	mémoire (Mb)
paliers d'arbre-à-cames	94	45
palier de suspension	31	22
moyeu de boîte de vitesses	928	208
collecteur d'échappements	185	71
carter-cylindres D4	1462	282

Table 10 : temps et mémoire nécessaires pour l'inversion (Cholesky, stockage complet)

Une fois l'inversion réalisée, la matrice de souplesse est archivée de manière à pouvoir être utilisée plusieurs fois. La résolution du système (68) est extrêmement rapide. En effet, pour chaque cas de charge, un seul degré de liberté est calculé en multipliant une ligne de la matrice de souplesse S_{RR} par le vecteur de charge $\mathbf{g}_R^{(i)}$. De plus, la présence de nombreux termes nuls dans les vecteurs de charges est prise en compte, ce qui accélère fortement le calcul. Le temps de résolution, en ce compris le calcul des L vecteurs de charge $\mathbf{g}_R^{(i)}$, varie entre une et dix secondes selon la taille du système. Ceci montre bien tout l'intérêt d'un code de résolution spécifique associé à la méthode du superélément.

3.3.3. Problème avec contacts

Après avoir imposé les conditions aux limites classiques (fixations et raideurs) sur le système réduit, le problème à résoudre s'écrit

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{q}_R} \frac{1}{2} \mathbf{q}_R^T \mathbf{K}_{RR}^* \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_R^T \mathbf{g}_R & (L \text{ problèmes}) \\ \text{avec } q_j \leq U_j \quad j = 1, J \end{cases} \quad (72)$$

Afin de ne pas résoudre les L problèmes de minimisation sur l'entièreté du système réduit, on utilise une technique similaire à celle du superélément [mas03a]. En notant \mathbf{q}_b les J degrés de libertés bornés et \mathbf{q}_o les autres degrés de liberté, les équations d'équilibre peuvent s'écrire

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bo} \\ \mathbf{K}_{ob} & \mathbf{K}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_b \\ \mathbf{g}_o \end{bmatrix} \quad (73)$$

Les degrés de liberté \mathbf{q}_o sont donnés par

$$\mathbf{q}_o = \mathbf{K}_{oo}^{-1} [\mathbf{g}_o - \mathbf{K}_{ob} \mathbf{q}_b] \quad (74)$$

Le système limité aux degrés de libertés de contact \mathbf{q}_b s'écrit

$$\left[\mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{bo} \mathbf{K}_{oo}^{-1} \mathbf{K}_{ob} \right] \mathbf{q}_b = \mathbf{g}_b - \mathbf{K}_{bo} \mathbf{K}_{oo}^{-1} \mathbf{g}_o \Leftrightarrow \mathbf{K}_{bb}^* \mathbf{q}_b = \mathbf{g}_b^* \quad (75)$$

Le problème de minimisation devient finalement

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{q}_b} \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^T \mathbf{K}_{bb}^* \mathbf{q}_b - \mathbf{q}_b^T \mathbf{g}_b^* & (L \text{ problèmes}) \\ \text{avec } \mathbf{q}_b \leq \mathbf{U} \end{cases} \quad (76)$$

Il présente l'avantage, par rapport au problème initial, de ne comporter qu'un petit nombre de variables, J en l'occurrence. En effet, dans la plupart des cas, le nombre de supports ne dépasse pas une dizaine. En comptant quelques noeuds par support, le nombre total de contacts n'excède pas une centaine. Une fois la solution \mathbf{q}_b obtenue pour un cas de charge, les déplacements \mathbf{q}_o sont restitués grâce à l'équation (74).

Le problème de minimisation est un problème classique : la minimisation d'une fonction *quadratique* de n variables soumises à des contraintes de bornes,

$$\begin{cases} \min_x \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x} \\ \text{avec } L_i \leq x_i \leq U_i \quad i = 1, n \end{cases} \quad (77)$$

où la matrice \mathbf{A} est symétrique et définie positive et où les valeurs L_i et U_i sont les bornes inférieure et supérieure sur la variable x_i . Plusieurs algorithmes peuvent être utilisés pour résoudre ce problème, comme la méthode du gradient conjugué par exemple. L'algorithme utilisé dans ce travail provient de la librairie Harwell [har04b].

En pratique, la résolution d'un problème avec contact est réalisée en deux étapes. La première est la condensation du système. Pour obtenir le système (76) et pour pouvoir effectuer la restitution (74), il faut calculer les matrices \mathbf{K}_{oo}^{-1} , $\mathbf{K}_{bo} \mathbf{K}_{oo}^{-1}$, \mathbf{K}_{ob} et \mathbf{K}_{bb}^* . Le calcul le plus coûteux est bien sûr l'inversion de la matrice \mathbf{K}_{oo} . Une fois obtenues, ces matrices sont archivées de manière à pouvoir être utilisées plusieurs fois.

La seconde étape comprend le calcul des charges réduites \mathbf{g}_b^* , la résolution du problème de minimisation et la restitution des déplacements (74). La résolution d'un problème de minimisation est extrêmement rapide. Pour donner un ordre d'idée, le temps nécessaire est d'environ 5 secondes pour résoudre mille problèmes comportant cent variables. La restitution est également très rapide puisque, pour chaque cas

de charge, on ne doit restituer qu'un déplacement, ce qui correspond au produit d'une ligne de la matrice \mathbf{K}_{oo}^{-1} par le vecteur de charge $\mathbf{g}_o - \mathbf{K}_{ob} \mathbf{q}_b$.

Grâce à cette procédure, un problème avec contact nécessite un temps quasiment identique à un problème linéaire de même taille. Dans les deux cas, le calcul le plus cher est l'inversion d'une matrice, qui n'est effectuée qu'une seule fois pour des conditions aux limites données. La résolution est quant à elle très rapide pour les deux types de problèmes. Dès lors, pour une même prise de pièce, on peut effectuer un grand nombre de simulations avec un coût de calcul très faible.

Remarquons que les valeurs des bornes U_j n'interviennent que lors de la résolution du système. Elles peuvent dès lors être modifiées pour chaque simulation sans qu'il soit nécessaire de refaire la condensation. Ceci permet de définir plusieurs supports et de les activer ou de les désactiver en imposant une borne U_j respectivement nulle ou très grande. Les problèmes avec contact permettent également de simuler des déplacements imposés, comme par exemple le posage hyperstatique d'une pièce (cf. applications).

Notons enfin que le problème tel qu'il a été défini est celui du contact entre une structure élastique, la pièce, et un ou plusieurs corps rigides, les supports. Or, en général, on attribue une certaine souplesse aux supports. Pour contourner le problème, nous utilisons l'artifice suivant. Plutôt que de considérer que le contact se produit entre le haut du support et la pièce, on fait comme si le support collait à la pièce et que le contact se produisait sous le support (figure 116). Ceci se traduit par l'ajout d'un nouveau degré de liberté et d'un élément de raideur k entre celui-ci et le noeud correspondant du modèle d'éléments finis. La condition de contact est alors appliquée sur le degré de liberté ajouté. Si la pièce se soulève, la raideur du support est inactive. Si elle s'abaisse, le contact devient actif et l'élément de ressort entre en jeu.

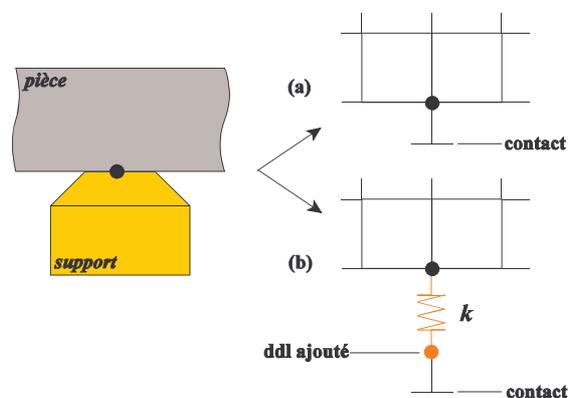


Figure 116 : modélisation du contact uniquement (a) et modélisation du contact et de la raideur du support (b)

3.3.4. Discussion

A cause du nombre élevé de cas de charge, les méthodes de résolution classiques ne sont pas adaptées aux problèmes liés à la modélisation de l'usinage, ce qui justifie pleinement le développement d'un code spécifique. Celui-ci fait appel à des techniques ou à des algorithmes qui ne sont pas nouveaux. Par contre, leur enchaînement est original et se révèle parfaitement bien adapté aux particularités des problèmes à résoudre.

Grâce aux soins portés à l'efficacité du calcul, la simulation de l'usinage devient particulièrement attrayante et bien adaptée à une utilisation en milieu industriel. En quelques heures seulement, il est possible d'étudier une opération d'usinage, voire une gamme complète. L'utilisation du code d'éléments finis se limite à la création du superélément. Le logiciel développé permet d'utiliser tout code d'éléments finis offrant la possibilité de créer une matrice de raideur condensée.

Le schéma de la figure 117 illustre le déroulement caractéristique de la simulation sur une pièce donnée. Il s'apparente à une structure arborescente où l'on effectue une opération d'autant plus de fois qu'elle prend peu de temps. Les opérations sont décrites ci-dessous par ordre décroissant de temps de calcul.

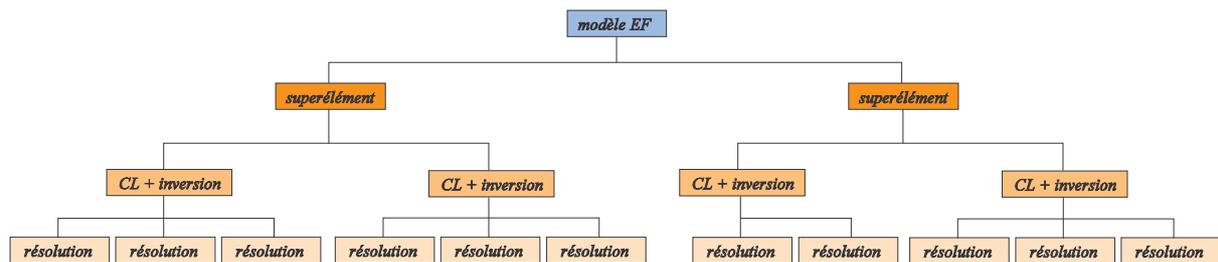


Figure 117 : schéma d'une simulation montrant les trois grandes étapes (création du superélément, inversion et résolution)

A partir du modèle d'éléments finis, on définit tout d'abord les groupes de noeuds *utiles*, c'est-à-dire la ou les surfaces usinées et les zones de fixation de la pièce. Puis on condense le système grâce à la méthode du superélément implantée dans le code d'éléments finis. Pour certaines pièces, on peut être amené à créer plusieurs superéléments si le nombre de surfaces actives conduit à un trop grand nombre de noeuds retenus. En effet, le temps d'inversion de la matrice de raideur du système réduit dépend du cube de sa taille. On a donc parfois intérêt à créer plusieurs petits superéléments plutôt que d'en créer un seul de grande taille. C'est le cas par exemple sur les carters-cylindres où il est préférable de créer un superélément pour chacune des surfaces usinées (figure 118).

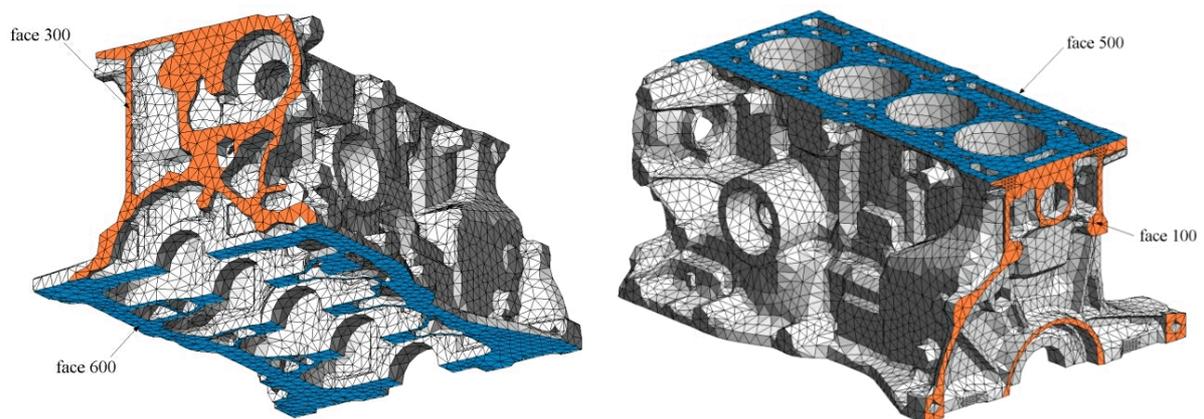


Figure 118 : faces usinées d'un carter-cylindres K4

Ensuite, pour une prise de pièce, on définit les conditions aux limites du système réduit, puis on inverse la matrice de raideur. La matrice de souplesse est stockée de manière à être utilisée plusieurs fois. Dans le cas où l'on modélise la prise de pièce avec du contact, on calcule puis on stocke également les autres matrices nécessaires à la résolution des problèmes de minimisation. Comme on étudie généralement quelques prises de pièce, l'inversion peut être réalisée plusieurs fois, d'où l'intérêt de ne pas avoir des

superéléments de trop grande taille.

Enfin, pour chaque prise de pièce, on peut tester plusieurs configurations en changeant l'outil, la trajectoire ou les conditions de coupe (avance, vitesse de coupe, engagement). On peut également faire varier les forces de serrage appliquées à la pièce et les valeurs des bornes supérieures sur les degrés de liberté de contact.

4. Exploitation des résultats

La modélisation par la méthode des éléments finis permet d'obtenir la forme de la surface usinée, définie par un ensemble de n points dans l'espace. Pour pouvoir exploiter ce résultat, il reste à calculer les différentes erreurs géométriques afin de pouvoir les comparer aux spécifications imposées par le bureau d'études. Dans ce chapitre, nous rappelons tout d'abord les définitions des principales erreurs géométriques telles qu'elles sont établies dans les normes. Le calcul des erreurs de forme (rectitude, circularité, planéité, cylindricité et conicité) est beaucoup plus complexe que celui des autres erreurs (position, orientation). Il consiste à trouver le plus petit encadrement d'un ensemble de points dans l'espace à deux ou à trois dimensions. L'encadrement est constitué de deux entités géométriques dont la nature dépend du type d'erreur de forme. Par exemple, pour l'erreur de planéité, il s'agit de deux plans parallèles et, pour celle de cylindricité, de deux cylindres coaxiaux. Dans la littérature spécialisée, de nombreuses méthodes ont été proposées pour les calculer. Deux approches sont utilisées : une approche purement numérique fondée sur la minimisation de fonctions mathématiques et une approche basée sur des considérations géométriques. Une partie de ce chapitre est consacrée aux méthodes géométriques. Elles offrent l'avantage de toujours donner la solution exacte, mais elles ne sont malheureusement pas applicables à tous les types de défauts. Ensuite, nous formulons le problème de façon mathématique et nous décrivons quelques méthodes numériques dont celle des moindres carrés. A cause de la nature des fonctions à minimiser, les méthodes classiques ne permettent pas toujours de trouver la solution optimale. Dans le cadre de ce travail, nous avons développé une méthode originale basée sur la minimisation des normes d'ordre p . Elle s'applique efficacement à toutes les erreurs de forme et a permis de trouver la solution optimale dans tous les cas industriels testés.

4.1. Position du problème

4.1.1. Introduction

Les pièces usinées présentent toujours des déviations par rapport aux pièces nominales. La spécification de tolérances a pour but d'établir les déviations maximales des surfaces usinées qui assurent des conditions d'assemblage, de fabrication ou de fonctionnement admissibles. Les tolérances sont indiquées sur le plan de fabrication sous forme de symboles (figure 119). Les tolérances de forme indiquent une déviation maximum de la forme d'un profil ou d'une surface. Pour l'exemple illustré ci-dessous, la surface tolérancée doit présenter une erreur de planéité inférieure ou égale à $20\ \mu\text{m}$, ce qui signifie qu'elle doit être comprise entre deux plans parallèles distants au maximum de $20\ \mu\text{m}$. Les tolérances d'orientation indiquent une déviation maximum de l'orientation d'un profil ou d'une surface par rapport à un profil ou à une surface de *référence*. Pour l'exemple de la figure 119, la surface tolérancée doit présenter une erreur de parallélisme par rapport à la surface de référence A inférieure ou égale à $50\ \mu\text{m}$, ce qui signifie qu'elle doit être comprise entre deux plans parallèles au plan de référence A et distants au maximum de $50\ \mu\text{m}$. La définition et la signification géométrique des différentes erreurs sont données au chapitre suivant.

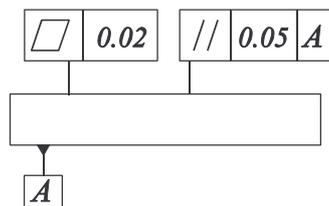


Figure 119 : exemple de tolérancement

Plus les tolérances sont fines, plus les pièces sont chères à réaliser. Pour des tolérances très fines, il faut souvent faire appel à des techniques de fabrication plus précises, comme la rectification ou le découpage au fil (électroérosion), mais beaucoup plus coûteuses que les méthodes classiques comme le tournage ou le fraisage. Les tolérances doivent être les plus larges possibles tout en assurant les conditions d'assemblage ou de fonctionnement de la pièce produite. Ainsi, pour gagner en productivité et/ou en coût de production, il est souvent utile de remettre en question certaines tolérances qui n'ont pas d'effet avéré sur le bon fonctionnement ou la durée de vie d'une pièce en service. L'examen du nombre de pannes attribuées à un organe donné permet de resserrer ou d'élargir les tolérances qui lui sont imposées. L'intégration des aspects relatifs à la fabrication dès la phase de conception des pièces permet aussi de définir des tolérances plus compatibles avec les contraintes de production.

Le contrôle des pièces revêt une très grande importance dans l'industrie, surtout pour la production de grandes séries. Il s'agit de vérifier sur des échantillons extraits de la production que les pièces réalisées

respectent bien les tolérances. Les pièces sont généralement mesurées sur des *machines à mesurer en coordonnées* (figure 120) qui donnent directement la valeur des erreurs géométriques. Dans le domaine automobile, les pièces non conformes ne peuvent être corrigées car les techniques utilisées pour rattraper les erreurs (rectification, grattage manuel) sont très coûteuses et incompatibles avec les cadences de production à respecter. Dès lors, il faut régler les différentes opérations de la gamme d'usinage de manière à avoir un faible taux de rebuts.

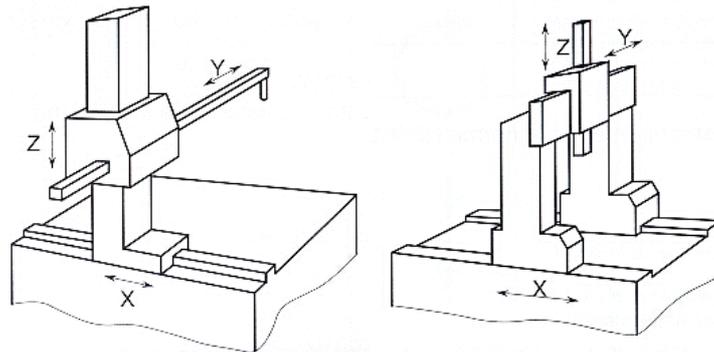


Figure 120 : machines à mesurer en coordonnées [bar99]

Les conditions dans lesquelles les mesures sont effectuées sont très sévères afin d'assurer une précision de mesure satisfaisante : climatisation du local, isolation vis-à-vis des vibrations, étalonnages fréquents,... Sur la plupart des machines à mesurer, la mesure est effectuée par un palpeur qui entre en contact avec la pièce. Ce processus est relativement long car la vitesse du palpeur au moment du contact doit être très faible. Pour réduire le temps de mesure, on doit donc limiter le nombre de points palpés en ne prenant que des points représentatifs de la forme effective de la surface (points hauts et points bas). Les différentes erreurs géométriques sont alors calculées par la machine à partir des coordonnées des points mesurés. Les erreurs les plus complexes à calculer sont les erreurs de forme. En effet, d'après les définitions des normes (ISO, ANSI), l'erreur de forme est le *plus petit encadrement* d'un ensemble de points, ce qui équivaut à trouver la *meilleure approximation* de cet ensemble. Les erreurs d'orientation et de position sont beaucoup plus simples à calculer car elles correspondent simplement à des déviations par rapport à une référence donnée.

L'algorithme de calcul des erreurs de forme implanté dans la grande majorité des machines à mesurer est celui des *moindres carrés*. Comme nous le verrons au chapitre 4.3, cette méthode conduit *toujours* à une erreur de forme surestimée par rapport à la valeur réelle. En pratique, la différence peut aller jusqu'à 25% voire davantage. En production, les paramètres technologiques (outils, conditions de coupe,...) sont choisis de manière à ce que les pièces respectent tout juste les tolérances, ceci afin d'atteindre la plus grande productivité possible. Dès lors, une surestimation des défauts de forme lors du contrôle des pièces entraîne inmanquablement une moindre productivité ou un taux de rebuts *artificiellement* élevé. Pour évaluer les algorithmes implantés dans les machines à mesurer et pour promouvoir le développement d'algorithmes en adéquation avec les normes, les autorités publiques américaines et européennes ont subsidié de nombreuses recherches dans les années nonante [ant96] [fen91]. Malheureusement, ces efforts n'ont pas vraiment été suivis d'effets car, à l'heure actuelle, la plupart des machines à mesurer sont encore dotées d'algorithmes de calcul imprécis.

4.1.2. Définition des erreurs géométriques

Tolérances propres à une surface	Tolérances de forme	—	Rectitude
		○	Circularité
		○	Cylindricité
	Tolérances dimensionnelles	□	Planéité
		⌒	Ligne quelconque
		⌒	Surface quelconque
Tolérance d'ondulation Tolérance de rugosité	∅	Diamètre/ Angle d'un cône	
	M6	Code ISO (M6...)	
Tolérances entre surfaces	Tolérances de position	⊕	Localisation
		≡	Symétrie
		◎	Concentricité/Coaxialité
	Tolérances d'orientation	⊥	Perpendicularité
		∥	Parallélisme
		∠	Inclinaison
	Tolérances dimensionnelles	x [°]	Cote de longueur
			Cote angulaire
	Tolérances de battement		⚡
		⚡	Battement total

Figure 121 : classification des tolérances [bar99]

Les erreurs et les tolérances géométriques sont classées en plusieurs catégories (figure 121). Celles que nous étudions dans ce travail sont les erreurs liées à la *forme* d'une surface ou d'un profil. Les erreurs liées à l'ondulation ou à la rugosité ne sont pas prises en compte. Elles sont en principe plus petites que les erreurs de forme.

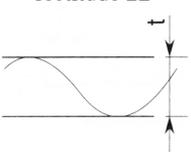
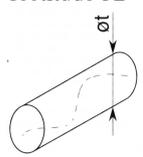
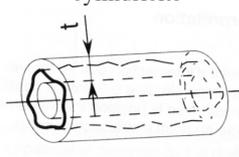
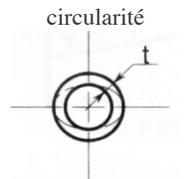
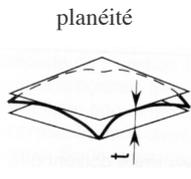
<p>rectitude 2D</p>  <p>deux droites parallèles</p>	<p>rectitude 3D</p>  <p>un cylindre</p>	<p>cylindricité</p>  <p>deux cylindres coaxiaux</p>
<p>circularité</p>  <p>deux cercles concentriques</p>	<p>planéité</p>  <p>deux plans parallèles</p>	

Table 11 : définitions des erreurs de forme [bar99]

Erreurs de forme

Toutes les erreurs de forme correspondent au *plus petit encadrement* d'un profil ou d'une surface représentés par un ensemble fini de points. L'encadrement est constitué d'une ou de deux formes géométriques dont la nature dépend du type d'erreur. Les erreurs de forme les plus courantes sont

illustrées à la table 11. Les autres erreurs de forme sont la sphéricité et la conicité, pour lesquelles l'encadrement est constitué respectivement de deux sphères concentriques et de deux cônes coaxiaux.

Erreurs d'orientation

Pour les erreurs d'orientation, les encadrements sont similaires à ceux des erreurs de forme mais l'orientation de l'encadrement est fixée par rapport à une *référence donnée*. Les erreurs d'orientation les plus courantes sont le parallélisme et la perpendicularité.

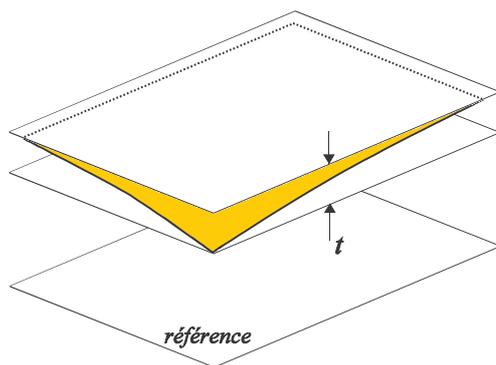


Figure 122 : erreur de parallélisme d'une surface

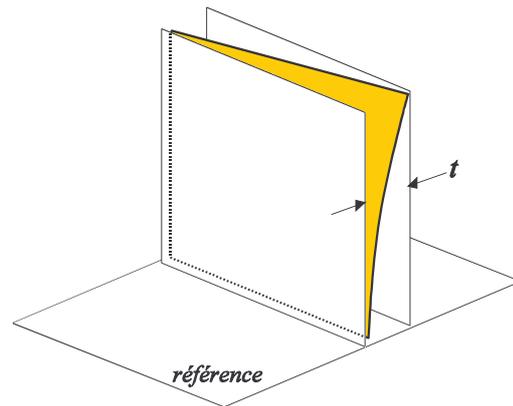


Figure 123 : erreur de perpendicularité d'une surface

En elles-mêmes, les erreurs d'orientation sont très faciles à calculer car elles sont simplement égales à la plus grande différence des coordonnées comptées dans la direction perpendiculaire à la référence. Par contre, la référence est souvent elle-même une surface ou un profil mesuré dont l'orientation doit être déterminée par calcul. On parle alors de *référence simulée*. Celle-ci est déterminée en calculant la forme géométrique qui approche le mieux le profil ou la surface de référence (une droite, un plan, ...).

Erreurs de position

Les erreurs de position englobent les erreurs de localisation, de symétrie, de concentricité et de coaxialité. Toutes ces erreurs se mesurent par rapport à une référence donnée. Par exemple, si la tolérance de concentricité du cercle A par rapport au cercle B vaut t , le centre du cercle A doit être localisé dans un cercle de rayon t concentrique au cercle B. L'erreur de concentricité est la distance entre le centre du cercle A et celui du cercle B (figure 124).

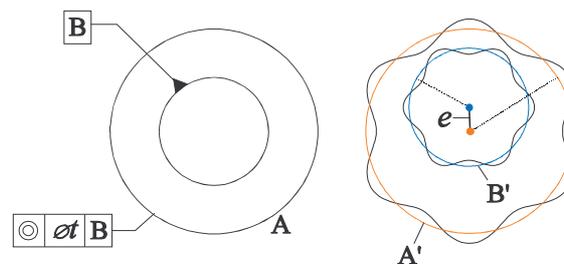


Figure 124 : erreur de concentricité

En pratique, les deux cercles sont mesurés et ne sont donc pas à proprement parler circulaires. Il faut d'abord calculer les cercles A' et B' qui approchent le mieux les deux cercles A et B, l'erreur de concentricité étant la distance e entre les centres des deux cercles A' et B' (figure 124). Pour calculer les erreurs de positions, il faut toujours déterminer *la meilleure approximation de l'entité tolérancée et celle de la référence*.

Erreurs de battement

Les erreurs de battement sont obtenues en faisant tourner la pièce et en mesurant l'amplitude du déplacement grâce à un comparateur (figure 125). Selon l'inclinaison de l'axe de mesure, il s'agit du battement radial, axial ou oblique. Le battement simple est mesuré sur un cercle tandis que le battement total est mesuré sur une surface (cylindre, plan, cône).

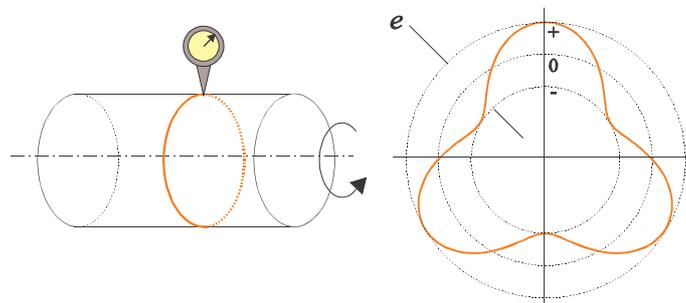


Figure 125 : erreur de battement radial

L'erreur de battement comprend *simultanément* la forme du profil ou de la surface mesuré(e) et l'inclinaison de l'axe de la pièce par rapport à l'axe de rotation. Par exemple, si l'on mesure un disque de frein dont la piste est parfaitement plane mais que l'axe du moyeu, qui est l'axe de rotation en fonctionnement, n'est pas exactement perpendiculaire à la surface de la piste, la courbe de battement présentera un point haut et un point bas situé à 180° l'un de l'autre (figure 126). Sur les disques de frein, l'erreur de battement a une grande influence sur la qualité du freinage (problèmes de vibration).

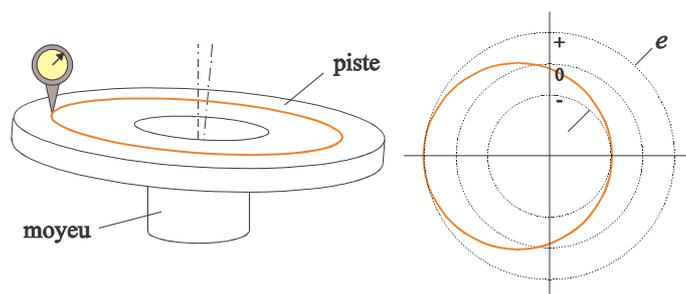


Figure 126 : erreur de battement radial

Plus grande forme inscrite, plus petite forme circonscrite

Enfin, les problèmes consistant à déterminer :

- le plus grand cercle inscrit à un ensemble de points,
- le plus petit cercle circonscrit,

- le plus grand cylindre inscrit,
- le plus petit cylindre circonscrit,

ne sont pas définis dans les normes mais sont très souvent utilisés en pratique.

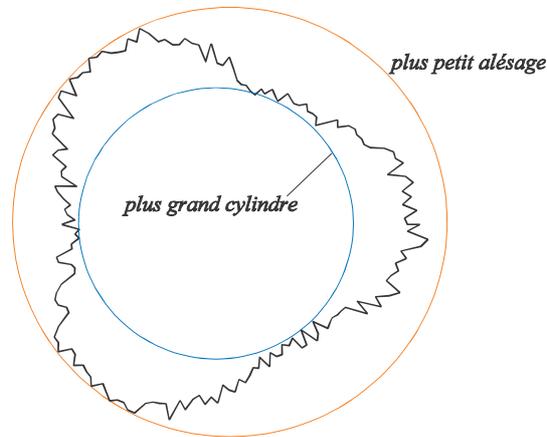


Figure 127 : plus grand cylindre et plus petit alésage

Physiquement, ils correspondent à la recherche de l'arbre de plus grand diamètre pouvant tenir dans un alésage donné ou du plus petit alésage pouvant accueillir un cylindre donné (figure 127).

4.1.3. Revue de la littérature

On trouve dans la littérature spécialisée deux types d'approche pour calculer les erreurs de forme : une approche basée sur la *minimisation de fonctions* et une approche *géométrique*.

La recherche du plus petit encadrement d'un ensemble de points peut être formulée comme un problème de minimisation où les variables reflètent la position et/ou l'orientation de l'encadrement (*cf.* chapitre 4.3.1). Ce type de problème est relativement complexe à résoudre car il est *non linéaire* et les fonctions à minimiser ne sont pas *continûment dérivables* et présentent généralement des *minima locaux*.

La méthode la plus répandue est celle des moindres carrés, qui consiste à remplacer le problème initial par un problème quadratique dont la solution est immédiate. La solution obtenue, qui est relativement proche de la solution exacte, est souvent utilisée comme point de départ pour les algorithmes plus évolués.

Une technique très répandue consiste à résoudre une séquence de sous-problèmes linéaires qui est *supposée* converger vers la solution du problème non linéaire initial. Pour rendre le problème linéaire, Bourdet et Clément [bou88] utilisent la méthode du *torseur de petits déplacements* (*Small Displacement Screw*) tandis que Carr et Ferreira [car95] posent le problème de manière à rendre la fonction objectif linéaire et soumise à des contraintes linéaires. Ce type de méthode tend vers la solution exacte *pour autant que le point de départ soit correctement choisi*.

Afin d'éviter les problèmes liés à la discontinuité de la dérivée première, les *méthodes d'ordre zéro*, qui ne font intervenir que les valeurs de la fonction, ont été souvent utilisées. Murthy et Abdin [mur80] utilisent la méthode de Monte Carlo. Kanada et Suzuki [kan93] calculent la rectitude grâce aux méthodes du simplexe (*downhill simplex*) et de la bisection. Lai *et al.* [lai00] font appel à des algorithmes

génétiques pour calculer l'erreur de cylindricité. Pauly [pau96] applique la méthode du simplexe pour calculer les erreurs de forme (rectitude, circularité, planéité, cylindricité). L'inconvénient majeur des méthodes d'ordre zéro est qu'elles requièrent généralement un grand nombre d'itérations. Cependant, pour le calcul des erreurs de forme, l'évaluation de la fonction est très rapide, de sorte que ces méthodes restent attrayantes.

Les erreurs de forme sont définies de manière géométrique. Il n'est donc pas étonnant que des méthodes purement géométriques aient été utilisées pour résoudre ce type de problèmes. A partir de l'*enveloppe convexe*, Etesami et Qiao [ete90] calculent l'erreur de rectitude d'un profil et Traband *et al.* [tra89] déterminent les erreurs de rectitude et de planéité. Novaski et Chautard [nov97] utilisent les *diagrammes de Voronoï* pour calculer l'erreur de circularité. L'intérêt des méthodes géométriques, qu'on appelle également *méthodes directes*, est qu'elles donnent toujours la solution exacte du problème *en un nombre fini d'opérations*. Par contre, elles ne sont pas applicables à toutes les erreurs de forme.

4.2. Méthodes géométriques

4.2.1. Enveloppe convexe

Pour l'évaluation des erreurs de rectitude et de planéité, il s'agit de trouver le plus petit encadrement d'un ensemble de n points, respectivement deux droites ou deux plans parallèles. Il est aisé de montrer que n'importe quel encadrement de l'ensemble des points contient également son enveloppe convexe. Dès lors, le plus petit encadrement correspond à la plus petite dimension de l'enveloppe convexe, notée δ^* .

Considérons tout d'abord le cas de la rectitude (figure 128). L'enveloppe convexe des n points est constituée de m arêtes et de m points, m étant inférieur ou égal à n . Un encadrement supporté par deux points A et B de l'enveloppe convexe n'est assurément pas optimum. En effet, la distance entre les deux droites diminue si elles pivotent autour de A et B. L'encadrement supporté par les points A et B est minimum lorsqu'une des deux droites rencontrera un troisième point de l'enveloppe (point C). Dès lors, la condition nécessaire pour qu'un encadrement soit optimum est qu'il touche trois points de l'enveloppe convexe ou, ce qui revient au même, qu'il soit supporté par une arête de l'enveloppe. Il n'existe donc que m solutions possibles. Il suffit alors de calculer pour chacune d'elles la distance δ entre les deux droites, l'encadrement optimal étant celui qui correspond à la plus petite valeur δ^* .

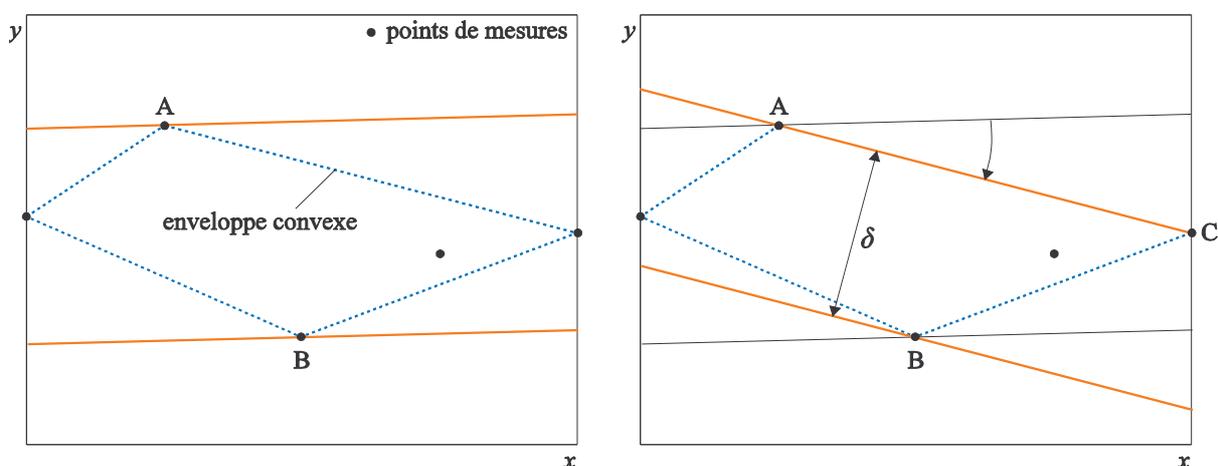


Figure 128 : principe de la méthode basée sur l'enveloppe convexe (rectitude)

Pour l'erreur de planéité (figure 129), on considère l'enveloppe convexe à trois dimensions des n points. Elle est constituée de m faces, de p arêtes et de q points, m et p pouvant être inférieurs ou supérieurs à n suivant la configuration de l'ensemble de points. Comme à deux dimensions, un encadrement supporté par deux points A et B de l'enveloppe convexe n'est pas optimum. En pivotant autour de ces deux points, on peut toujours diminuer la distance entre les deux plans parallèles jusqu'à ce que l'un des deux touche un troisième point de l'enveloppe (point C). Pour diminuer encore l'encadrement, on ne peut plus pivoter qu'autour de la charnière AC. Il faut alors envisager deux possibilités :

- en pivotant autour de AC, le plan supérieur rencontre d'abord un point D de l'enveloppe de sorte qu'il contienne la face ACD;
- le plan inférieur rencontre d'abord un point E de l'enveloppe, auquel cas il contient l'arête BE tandis que le plan supérieur contient l'arête AC. Notons que ces deux arêtes sont obligatoirement gauches.

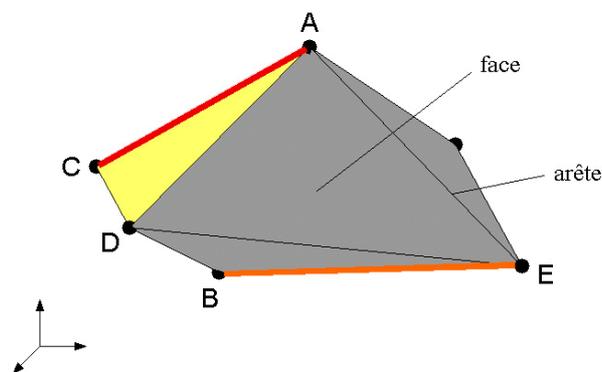


Figure 129 : principe de la méthode basée sur l'enveloppe convexe (planéité)

La condition nécessaire pour qu'un encadrement soit minimum est qu'il soit supporté par une face ou par un couple d'arêtes gauches de l'enveloppe convexe, ce qui donne *a priori* $m + p(p - 1) / 2$ solutions possibles⁹. En calculant la distance δ entre les deux plans pour chaque solution, on trouve l'encadrement optimal correspondant à la plus petite valeur δ^* .

En pratique, la méthode de l'enveloppe convexe pose deux problèmes. Le premier est que la construction de l'enveloppe n'est pas simple, spécialement à trois dimensions. En effet, lorsqu'on mesure une surface horizontale, la dimension de l'ensemble de points selon l'axe z est beaucoup plus petite que selon les deux autres axes, respectivement de l'ordre du micromètre et du millimètre. Dès lors, la construction de l'enveloppe pose certains problèmes numériques puisque les faces sont quasiment coplanaires. Pour éviter ce problème, on dilate l'ensemble de points avant de construire l'enveloppe, de manière à avoir la même taille suivant les trois axes de coordonnées.

Le second problème est lié à la complexité de l'algorithme. A deux ou trois dimensions, l'algorithme de construction de l'enveloppe est au minimum de complexité $O(n \log q)$, q étant le nombre de points de l'enveloppe convexe [bra96]. Pour la rectitude, la recherche de l'encadrement optimum est de complexité $O(m)$, où m est le nombre d'arêtes de l'enveloppe. Pour la planéité, la recherche est de complexité $O(p^2)$, p étant le nombre d'arêtes de l'enveloppe. Ceci dit, en pratique, une mesure dépasse rarement les 1000 points, ce qui correspond à un temps de calcul de quelques secondes sur les ordinateurs actuels. Sachant que la mesure elle-même prend quelques minutes, voire quelques dizaines de minutes, ce problème est somme toute peu important.

⁹ Le nombre effectif de solutions est en fait inférieur à cette valeur, sachant qu'un certain nombre de couples d'arêtes sont coplanaires. De plus, certains couples d'arêtes gauches peuvent être écartés *a priori* [deb98].

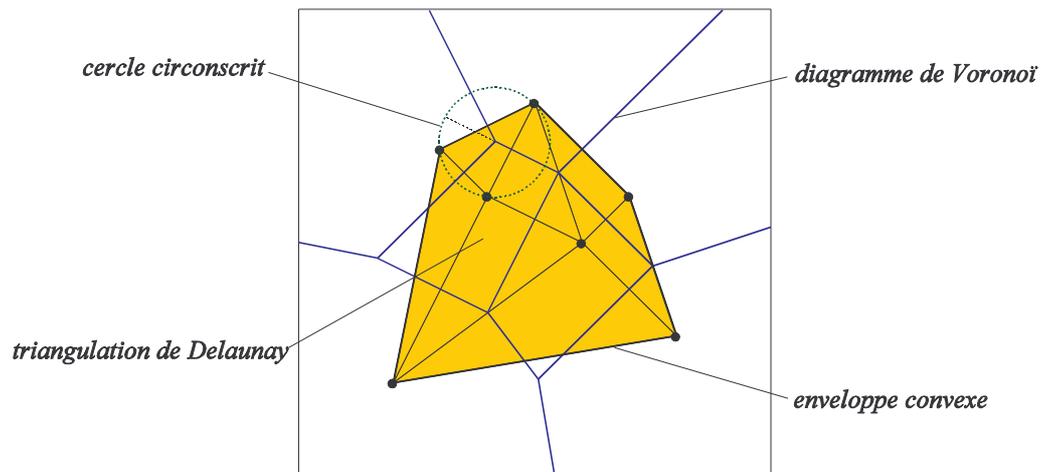


Figure 130 : triangulation de Delaunay, diagramme de Voronoï et enveloppe convexe

Il existe plusieurs méthodes pour construire l'enveloppe convexe d'un ensemble de points. La plus classique est de construire la triangulation de Delaunay dont la propriété est que le cercle circonscrit à chaque triangle ne contient que les trois sommets du triangle (figure 130). L'enveloppe convexe est formée par l'ensemble des cotés qui n'appartiennent qu'à un seul triangle. Notons que le dual de la triangulation de Delaunay est le diagramme de Voronoï de l'ensemble des points (*cf.* chapitre suivant). Les intersections du diagramme de Voronoï sont les centres des cercles circonscrits à chaque triangle. Le programme que nous utilisons pour construire l'enveloppe convexe se nomme *Qhull* et est développé à l'Université du Minnesota [qhu04]. Ce logiciel permet de construire la triangulation de Delaunay, l'enveloppe convexe et les diagrammes de Voronoï dans l'espace à deux, trois ou n dimensions.

4.2.2. Diagrammes de Voronoï

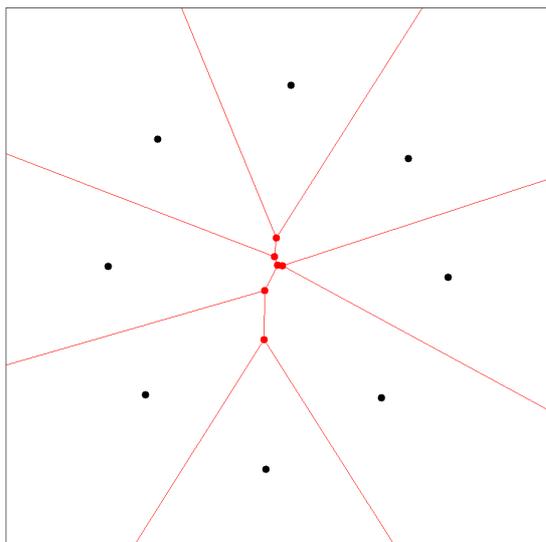


Figure 131 : diagramme de Voronoï (type 1)

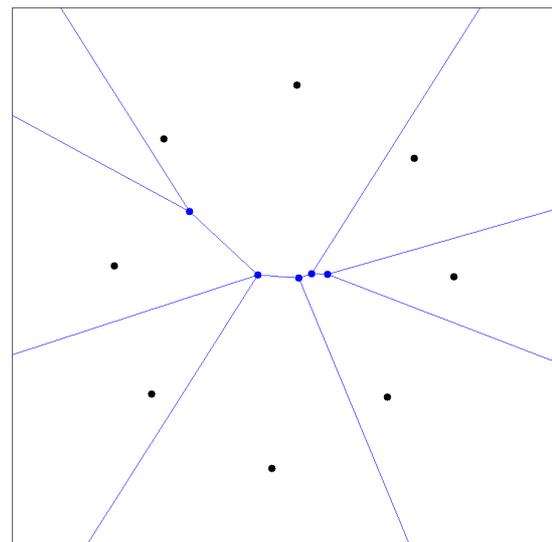


Figure 132 : diagramme de Voronoï (type 2)

La propriété la plus connue du diagramme de Voronoï est d'être le dual de la triangulation de Delaunay, qui est largement utilisée dans le domaine des éléments finis. Pour un ensemble de n points (appelés *sites*) dans l'espace à deux dimensions, le diagramme de Voronoï classique, appelé en anglais *nearest-site Voronoï diagram*, est illustré à la figure 131. Chaque zone du diagramme, limitée par une série de demi-droites ou de segments de droites, est le lieu des points plus proches d'un site que de n'importe lequel des $n - 1$ autres sites. Chaque arête est le lieu des points équidistants de deux sites. Enfin, l'intersection de trois arêtes (points coloriés en rouge) est le centre du cercle circonscrit au triangle formé par trois sites. La propriété de ce cercle est qu'il ne contient aucun autre site.

Il existe un autre type de diagramme de Voronoï qu'on appelle en anglais *furthest-site Voronoï diagram*. Celui-ci est nettement moins connu que le premier, étant donné qu'il a beaucoup moins d'applications pratiques. Chaque zone du diagramme (figure 132) représente le lieu des points plus éloignés d'un site que de n'importe lequel des $n - 1$ autres sites. Les arêtes sont équidistantes de deux sites. L'intersection de trois arêtes (points coloriés en bleu) est le centre du cercle circonscrit au triangle formé par trois sites. La propriété de ce cercle est qu'il contient les n sites.

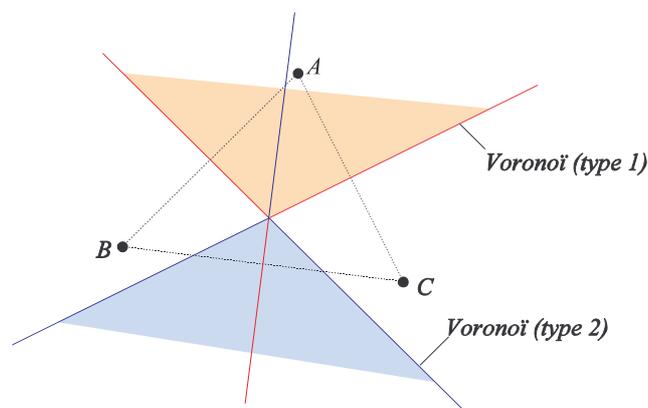


Figure 133 : diagrammes de Voronoï pour un ensemble de trois sites

Chacun des deux diagrammes est construit sur base des *médiatrices* des couples de sites. La figure 133 illustre un cas simple comportant trois sites. On retrouve les médianes des trois côtés du triangle. Les arêtes du diagramme de Voronoï *classique* (type 1) sont en fait les complémentaires des arêtes du second diagramme. La zone coloriée en rouge, qui se trouve entre deux arêtes du diagramme de Voronoï de type 1, est le lieu des points plus proche du site A que des deux autres sites. La zone coloriée en bleu est le lieu des points plus distants de A que des sites B et C. Lorsque le problème comporte plus de trois sites, certaines médianes sont limitées par d'autres et ne forment plus que des segments de droite (figures 131 et 132).

Les propriétés des deux diagrammes de Voronoï permettent de trouver des entités géométriques importantes en métrologie :

- le plus grand cercle inscrit à un ensemble de points,
- le plus petit cercle circonscrit,
- le plus petit encadrement.

Plus grand cercle inscrit

Une condition nécessaire pour qu'un cercle inscrit soit le plus grand est qu'il s'appuie sur au moins trois sites. Pour démontrer cela, raisonnons graphiquement. Pour un centre (a,b) intérieur aux n sites, le plus grand cercle inscrit ne touche qu'un seul site, noté A (figure 134a). Il est donc possible d'augmenter son rayon en bougeant le centre dans la direction opposée à A jusqu'à ce qu'on rencontre un deuxième site, noté B (figure 134b). A ce moment, on ne peut augmenter le rayon du cercle qu'en déplaçant le centre selon la bissectrice de AB. Le rayon est maximum lorsque le cercle touche un troisième site (point C) et ce cercle est le plus grand cercle inscrit s'appuyant sur les trois sites A, B et C (figure 134c).

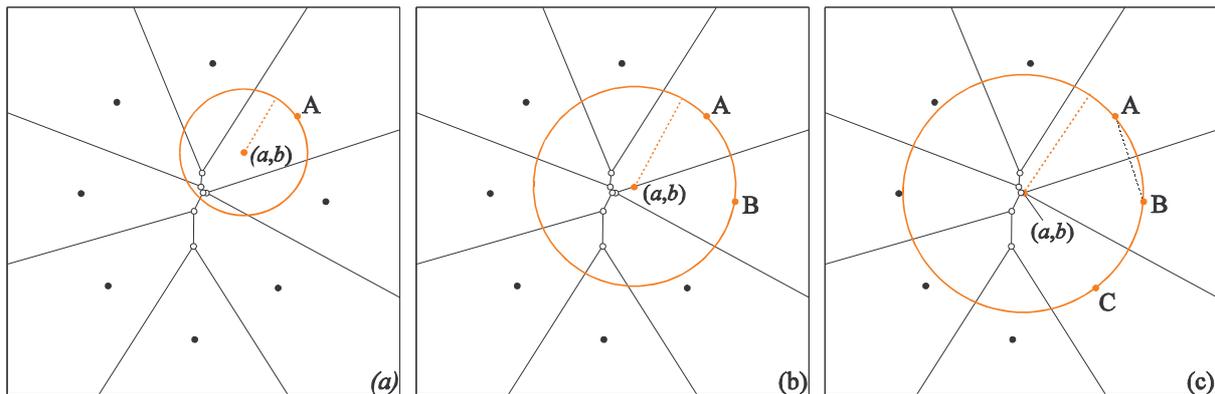


Figure 134 : plus grand cercle inscrit s'appuyant sur trois sites donnés

Ainsi, le problème revient à chercher le plus grand parmi tous les cercles inscrits s'appuyant sur trois sites, ce qui est la propriété des cercles associés au premier diagramme de Voronoï. La méthode consiste simplement à trouver les intersections de triplets d'arêtes concourantes puis à déterminer celle qui correspond au plus grand cercle. Sur la figure 135, le plus grand cercle est tracé en orange ainsi que les trois points de contact et le centre, qui correspond bien à une des intersections du diagramme de Voronoï.

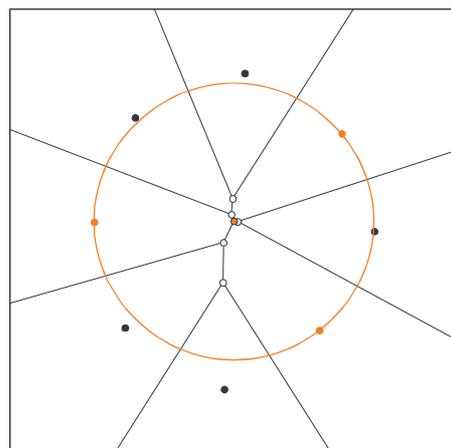


Figure 135 : plus grand cercle inscrit

Plus petit cercle circonscrit

Par le même raisonnement que précédemment, on peut montrer qu'une condition nécessaire pour qu'un cercle circonscrit soit le plus petit est qu'il s'appuie sur au moins trois sites (figure 136). Les seuls cercles répondant à ce critère sont ceux associés au second diagramme de Voronoï. La méthode consiste simplement à trouver les intersections de triplets d'arêtes concourantes puis à déterminer celle qui correspond au plus petit cercle. Le plus petit cercle est dessiné en bleu sur la figure 136 ainsi que son centre et les trois points de contact.

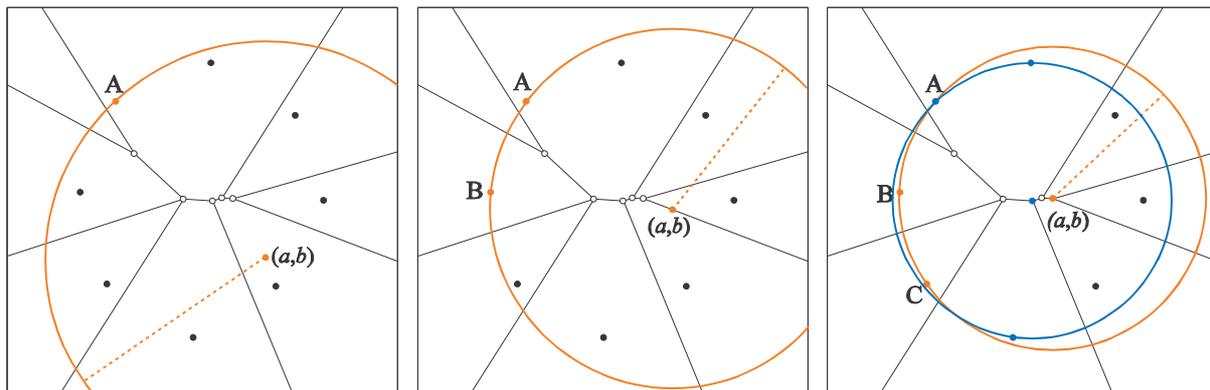


Figure 136 : plus petit cercle circonscrit

Plus petit encadrement

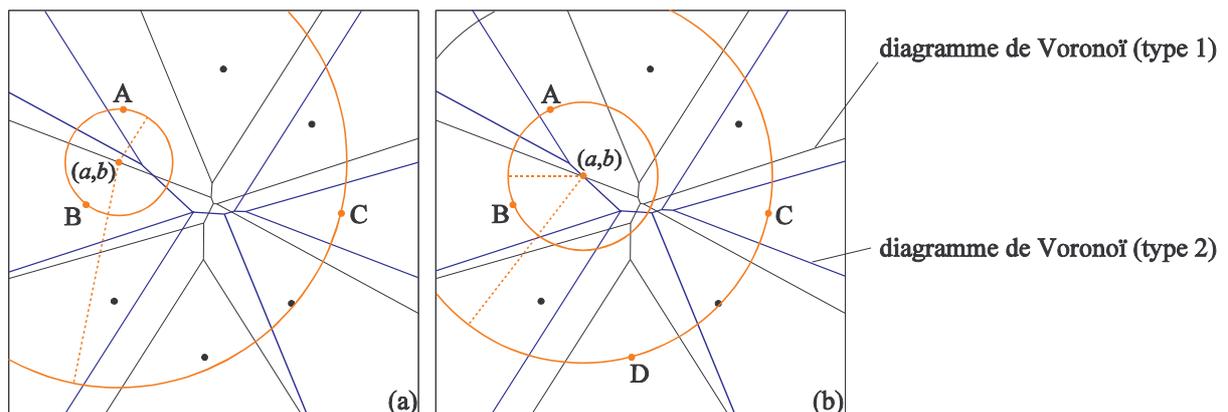


Figure 137 : encadrement s'appuyant sur quatre sites

Prenons un centre de coordonnées (a,b) se trouvant sur une arête du premier diagramme de Voronoï. Le cercle intérieur s'appuie sur deux sites A et B et ne contient aucun autre site (figure 137a). Le cercle extérieur ne s'appuie quant à lui que sur un site, noté C. En déplaçant le centre sur l'arête dans la direction opposée à A et B, le rayon du cercle intérieur augmente et celui du cercle extérieur diminue. Deux situations peuvent se présenter : soit le centre atteint la fin de l'arête et le cercle intérieur touche alors trois sites, soit le centre rencontre une arête du second diagramme, auquel cas le cercle extérieur

rentre en contact avec deux sites, C et D (figure 137b). *A priori*, le centre du plus petit encadrement peut appartenir à l'ensemble des solutions pour lesquelles il y a quatre points de contact, soit :

- les intersections du premier diagramme de Voronoï (trois points de contact sur le cercle intérieur et un sur le cercle extérieur),
- les intersections du second diagramme (trois points sur le cercle extérieur et un sur le cercle intérieur),
- les intersections entre les deux diagrammes de Voronoï (deux points de contact sur chacun des cercles).

Il est possible de démontrer qu'une condition nécessaire pour qu'un encadrement soit minimum est que les cercles intérieur et extérieur s'appuient respectivement sur deux points de l'ensemble [deb98]. Ceci permet d'éliminer les deux premiers types de solutions. Il suffit alors de déterminer toutes les intersections entre les deux diagrammes de Voronoï et de trouver celle qui correspond au plus petit encadrement (figure 138).

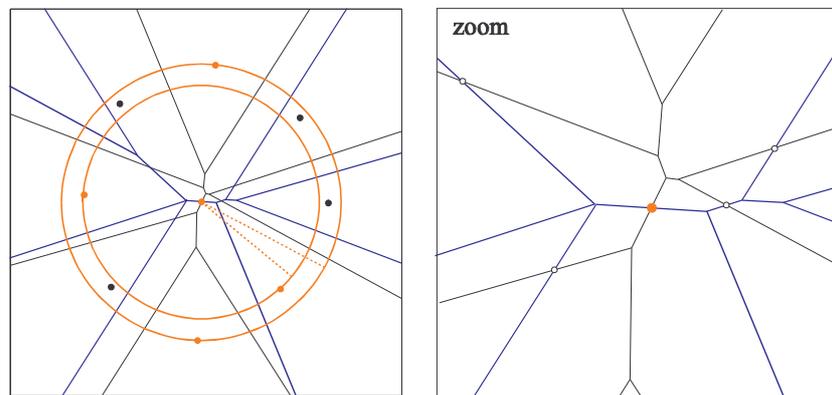


Figure 138 : plus petit encadrement

Sphères

Les problèmes relatifs à la sphère - plus grande sphère inscrite, plus petite sphère circonscrite et sphéricité - peuvent également être résolus grâce aux diagrammes de Voronoï. Conceptuellement, le principe est identique au cas du cercle mais il est nettement plus complexe à programmer. Dans l'espace à trois dimensions, les différentes régions des diagrammes de Voronoï sont séparées non plus par des arêtes mais par des plans. L'intersection entre deux plans est une droite dont les points sont équidistants de trois sites. Le point de percée de cette droite dans un troisième plan est équidistant de quatre sites. Pour déterminer le centre de la plus grande sphère inscrite, on utilise le premier diagramme de Voronoï et on calcule les intersections de tous les triplets de plans, la solution étant le point qui correspond à la plus grande sphère. Le même schéma est utilisé pour déterminer la plus petite sphère circonscrite. Dans les deux cas, la sphère solution présente quatre points de contact au minimum.

Pour obtenir la meilleure sphère, on utilise les deux diagrammes de Voronoï. La solution correspond à l'intersection d'une arête d'un des deux diagrammes avec un plan de l'autre. L'encadrement, constitué de deux sphères concentriques, présente toujours cinq points de contact avec l'ensemble de points, deux sur la sphère intérieure et trois sur la sphère extérieure, ou l'inverse. Les deux contacts sont toujours situés de part et d'autre du plan formé par les trois autres.

4.2.3. Discussion

Les méthodes géométriques comme celle de l'enveloppe convexe ou celles basées sur les diagrammes de Voronoï *conduisent toujours à la solution optimale*. Elles sont dès lors parfaitement adaptées au calcul des erreurs de forme. Malheureusement, de telles méthodes n'existent pas pour les erreurs de cylindricité et de conicité, ce qui justifie le développement d'une méthode plus générale basée sur la *minimisation de fonctions*. Cependant, les méthodes géométriques restent intéressantes à plusieurs points de vue.

Ces méthodes exactes donnent des *valeurs de référence* qui permettent de qualifier les algorithmes basés sur la minimisation de fonctions. Elles sont plus *naturelles* que les méthodes numériques car, à la base, le problème est essentiellement géométrique. En outre, elles permettent de comprendre certains aspects mathématiques qui paraissent obscurs de prime abord. Enfin, elles fournissent un *critère nécessaire d'optimalité lié au nombre de points de contact*. Comme nous l'avons vu, un encadrement optimal a nécessairement un nombre minimum de points de contact avec l'ensemble de points. Le critère correspondant à chaque erreur est indiqué à la table 12. Pour les erreurs de cylindricité et de conicité, nous ne disposons pas d'un tel critère mais nous verrons au chapitre 4.4 qu'il semble bien en exister un, bien que cette propriété n'ait jamais été démontrée formellement.

erreur	nombre de points de contact	combinaisons
rectitude	≥ 3	2-1 1-2
circularité	≥ 4	2-2 ⁽¹⁾
planéité	≥ 4	3-1 1-3 2-2
sphéricité	≥ 5	3-2 2-3 ⁽²⁾
plus grand cercle inscrit	≥ 3	
plus petit cercle circonscrit	≥ 3	
plus grande sphère inscrite	≥ 4	
plus petite sphère circonscrite	≥ 4	

Table 12 : critère d'optimalité pour les différentes erreurs et combinaisons des points de contact; (1) points de contact croisés sur cercles intérieur/extérieur/intérieur/extérieur; (2) deux contacts situés de part et d'autre du plan formé par les trois autres

Il existe de nombreux programmes permettant de construire les diagrammes de Voronoï. Celui que nous utilisons est la suite *Qhull*, le même que celui utilisé pour les enveloppes convexes. Grâce à ce logiciel, il est déjà possible de résoudre quelques problèmes d'erreurs de forme (rectitude, planéité, circularité,...) de manière exacte et avec un minimum d'efforts de programmation.

Enfin, pour clore ce chapitre, il faut noter quelques particularités propres au cercle. En pratique, il arrive fréquemment que le profil circulaire ne soit pas fermé (demi-paliers de vilebrequin ou d'arbre-à-cames par exemple). En deçà d'un certain angle d'ouverture, le problème n'a plus de sens physique. Quand l'angle du profil est plus petit que 180° , le centre du plus petit cercle circonscrit est toujours le point médian des deux points les plus éloignés. Pour le plus grand cercle inscrit, la solution est toujours à l'infini. Ceci peut s'expliquer par le fait que la notion même d'intériorité du centre n'existe plus pour un profil dont l'angle d'ouverture est inférieur à 180° . Par contre, pour le calcul du meilleur cercle

(circularité), on peut admettre des angles d'ouverture plus petits que le demi-cercle. La limite est atteinte lorsque l'erreur de rectitude du profil est inférieure à son erreur de circularité, auquel cas la solution est à l'infini. Les mêmes constatations valent également pour la sphère et le cylindre.

4.3. Méthodes de minimisation

4.3.1. Formulation mathématique du problème

Les erreurs de forme sont associées à un encadrement d'un ensemble de n points : deux droites parallèles, deux plans parallèles, deux cercles concentriques, ... A chaque type d'encadrement, on peut associer une *fonction d'encadrement* continue $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ dépendant des coordonnées \mathbf{x} des points et d'un jeu de paramètres noté $\boldsymbol{\lambda}$ [deb98, deb99]. Les m paramètres λ_j reflètent l'orientation et/ou la position de l'encadrement. Le problème relatif au calcul de l'erreur de forme peut être posé de deux manières : soit la recherche du plus petit encadrement, soit la recherche de la *meilleure approximation*. Les deux problèmes admettent la même solution.

Plus petit encadrement

Pour une valeur donnée de $\boldsymbol{\lambda}$, la dimension de l'encadrement Δ vaut

$$\Delta(\boldsymbol{\lambda}) = \sup_{i=1,n} f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\lambda}) - \inf_{i=1,n} f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\lambda}) \quad (78)$$

Au sens des normes, l'erreur de forme est égale à la plus petite dimension de l'encadrement, notée Δ^* . Le problème à résoudre consiste à chercher le jeu de paramètres $\boldsymbol{\lambda}^*$ qui minimise la fonction Δ , soit

$$\Delta^* = \min_{\boldsymbol{\lambda}} \Delta(\boldsymbol{\lambda}) \quad (79)$$

Prenons le cas de la rectitude. L'encadrement est composé de deux droites parallèles. La fonction d'encadrement associée s'écrit

$$f(x, y, \varphi) = x \cos \varphi + y \sin \varphi \quad (80)$$

ce qui représente la hauteur d'un point (x, y) par rapport à une droite passant par l'origine et dont la normale est inclinée d'un angle φ sur l'axe x (figure 139a). La dimension Δ de l'encadrement pour un angle φ donné est égale à la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la fonction f comptée sur les n points. Enfin, l'orientation optimale φ^* de l'encadrement est celle qui donne la plus petite valeur de Δ (figure 139b).

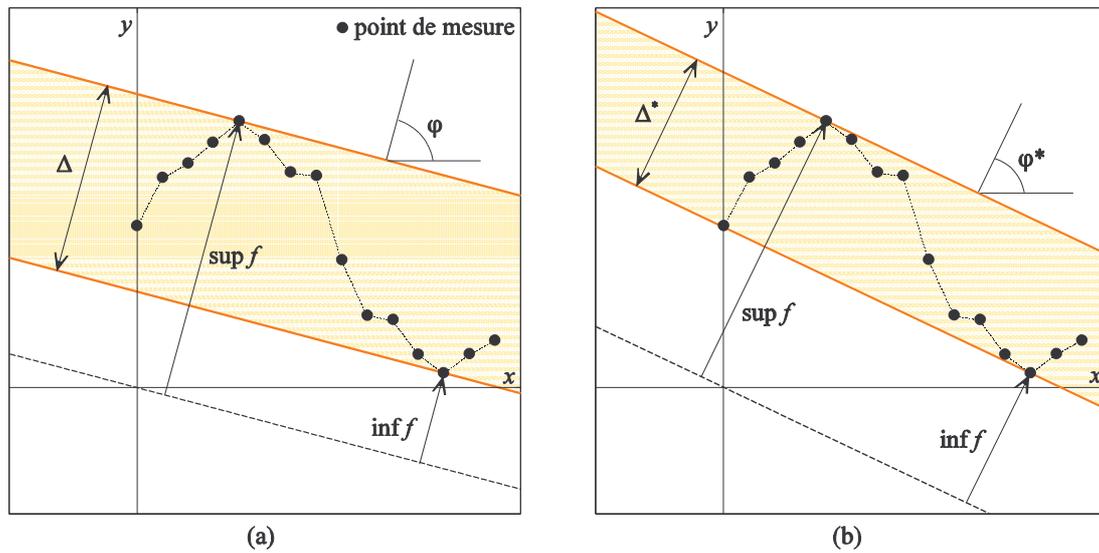


Figure 139 : fonction d'encadrement pour la rectitude (a) et encadrement optimal (b)

Meilleure approximation

En introduisant un paramètre supplémentaire, noté ρ , on peut remplacer la fonction d'encadrement par une fonction qui reflète l'écart par rapport à une forme géométrique, soit

$$e(x, \lambda, \rho) = f(x, \lambda) - \rho \tag{81}$$

L'écart maximum est la plus grande valeur de la fonction e comptée sur les n points. C'est une fonction qui ne dépend que des paramètres λ et du nouveau paramètre ρ , soit

$$e_{\max}(\lambda, \rho) = \sup_{i=1,n} |e(x, \lambda, \rho)| \tag{82}$$

Pour une valeur λ donnée, il est aisé de montrer que la taille de l'encadrement Δ est égale à

$$\Delta(\lambda) = 2 \min_{\rho} e_{\max}(\lambda, \rho) \tag{83}$$

et que la valeur optimale du paramètre ρ est égale à la moyenne des bornes supérieure et inférieure de la fonction d'encadrement f (figure 140).

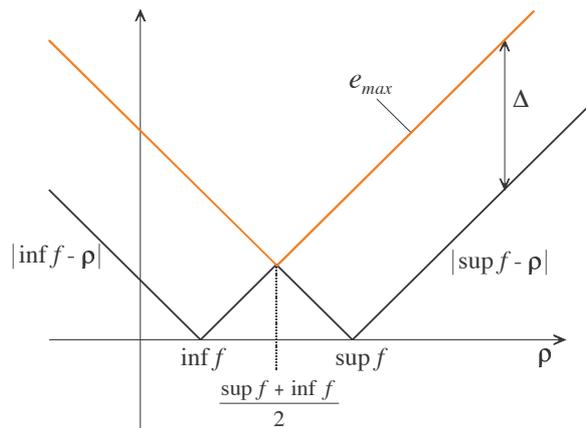


Figure 140 : valeur optimale du paramètre ρ

Le problème de minimisation (79) peut être écrit sous la forme

$$\Delta^* = 2 \min_{\lambda, \rho} e_{\max}(\lambda, \rho) \tag{84}$$

ce qui revient à trouver les paramètres λ^* et ρ^* qui minimisent l'écart maximum. En termes géométriques, on recherche donc la surface d'équation

$$f(x, \lambda) = \rho \tag{85}$$

dont l'écart maximum à l'ensemble de points est minimal. C'est un problème de *meilleure approximation uniforme*, fort similaire à l'approximation des fonctions au sens de Tchébycheff [hac71, ber65].

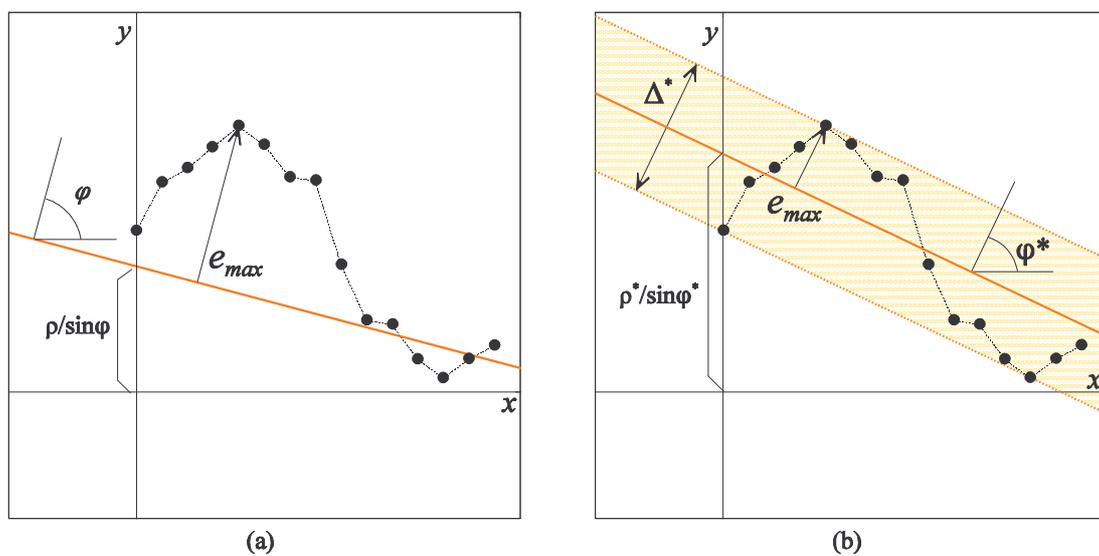


Figure 141 : problème de la rectitude en termes d'écarts

Pour la rectitude (figure 141a), l'écart maximum e_{\max} est la distance entre la droite d'équation

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \rho \quad (86)$$

et le point du profil le plus éloigné. Le problème revient à trouver la meilleure droite, c'est-à-dire celle qui rend minimum l'écart maximum, en déterminant l'orientation optimale φ^* et le terme indépendant ρ^* (figure 141b).

Erreur de planéité

Pour l'erreur de planéité, l'encadrement est constitué de deux plans parallèles. La fonction d'encadrement s'écrit

$$f(x, y, z, \theta, \varphi) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = a x + b y + c z \quad (87)$$

Elle reflète la hauteur d'un point par rapport à un plan passant par l'origine et dont la normale est $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi)$. Les angles θ et φ sont mesurés comme indiqué à la figure 142. Le calcul de l'erreur de planéité revient à trouver l'orientation optimale (φ^*, θ^*) et le terme indépendant ρ^* du plan d'équation

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = a x + b y + c z = \rho \quad (88)$$

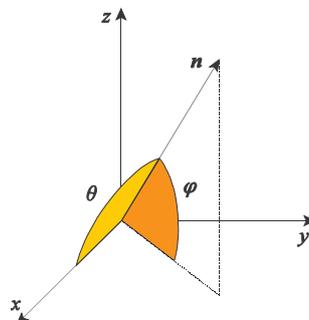


Figure 142 : système d'axes

Erreur de circularité

Pour l'erreur de circularité, la fonction d'encadrement reflète la distance entre un centre de coordonnées (a, b) et les points du profil circulaire, soit

$$f(x, y, a, b) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \quad (89)$$

Le problème consiste à trouver le meilleur centre (a^*, b^*) et le rayon ρ^* du cercle d'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \rho^2 \quad (90)$$

Le cas de la sphéricité est formulé de façon similaire dans l'espace à trois dimensions [mer01].

Erreur de cylindricité

Pour l'erreur de cylindricité, l'encadrement est constitué de deux cylindres coaxiaux. Le problème est un peu plus complexe à formuler. Nous considérons dans un premier temps un axe défini par son vecteur directeur \mathbf{t} . Le vecteur \mathbf{t} est identique au vecteur \mathbf{n} défini pour la planéité. Afin, de se ramener à un problème de circularité, les points sont projetés dans un plan perpendiculaire à l'axe et la fonction d'encadrement s'écrit alors

$$f(x, y, z, \theta, \varphi, a, b) = \sqrt{(x_p - a)^2 + (y_p - b)^2} \quad (91)$$

où x_p et y_p sont les coordonnées projetées sur deux axes orthogonaux dans le plan perpendiculaire à l'axe. Le problème revient à trouver le cylindre d'équation

$$(x_p - a)^2 + (y_p - b)^2 = \rho^2 \quad (92)$$

qui minimise l'écart maximum par rapport aux points. Cette formulation du problème de la cylindricité conduit au plus petit nombre de paramètres, quatre en l'occurrence. Certains auteurs utilisent une formulation plus simple, mais avec un plus grand nombre de variables : les trois coordonnées d'un point de l'axe P_0 et les trois composantes du vecteur directeur \mathbf{t} .

Erreur de conicité

L'erreur de conicité est formulée de manière similaire à celle de cylindricité avec une fonction d'encadrement qui s'écrit

$$f(x, y, z, \theta, \varphi, a, b, \alpha) = r_p \cos \alpha + z_p \sin \alpha \quad (93)$$

où α est le demi-angle du cône et r_p et z_p sont les coordonnées radiale et axiale dans un système de coordonnées cylindriques basé sur l'axe \mathbf{t} . Cette fonction d'encadrement est identique à celle de la rectitude car il s'agit de trouver la meilleure génératrice du cône dans le plan des coordonnées (r_p, z_p) .

Cercle, sphère et cylindre inscrits ou circonscrits

Enfin, la recherche des plus grandes formes géométriques inscrites ou des plus petites formes circonscrites est formulée de la manière suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\lambda} \inf_{i=1,n} f(\mathbf{x}, \lambda) \\ \min_{\lambda} \sup_{i=1,n} f(\mathbf{x}, \lambda) \end{array} \right. \quad (94)$$

où f est la fonction d'encadrement associée à l'élément géométrique considéré. Prenons le cas du plus grand cercle inscrit par exemple. Il s'agit de trouver le centre qui rend maximum le plus petit rayon compté sur les n points, ce qui correspond à

$$\max_{a,b} \inf_{i=1,n} \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad (95)$$

4.3.2. Méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés est à proprement parler un *ajustement aux moindres carrés*, c'est-à-dire la recherche de l'entité géométrique qui approche le mieux un ensemble de points au sens des moindres carrés. La solution est obtenue en minimisant la somme des carrés des écarts des points par rapport à une forme géométrique donnée (une droite, un plan, ...). Le problème est formulé de manière à ce que les écarts dépendent *linéairement* des paramètres, ce qui revient à minimiser une fonction *quadratique*.

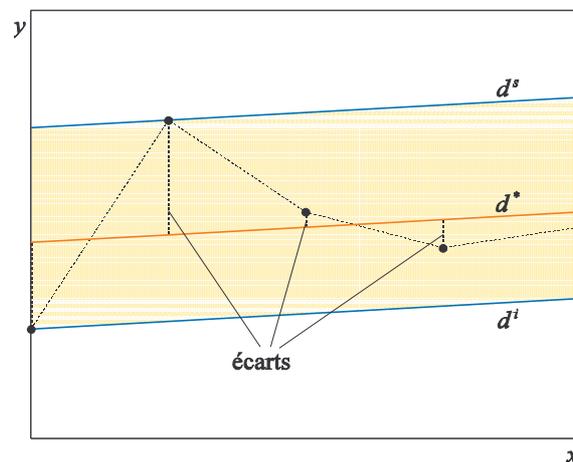


Figure 143 : rectitude d'un profil

Prenons le cas de la rectitude. Pour un ensemble de n points de coordonnées (x_i, y_i) , il s'agit de trouver la droite d^* d'équation $y = m x + p$ qui minimise la norme d'ordre deux des écarts, soit

$$\min_{m,p} L_2 = \sum_{i=1}^n (y_i - m x_i - p)^2 \quad (96)$$

Les écarts sont comptés parallèlement à l'axe y (figure 143). On présuppose donc que la solution est proche d'une droite horizontale. Les dérivées de L_2 par rapport à m et à p valent

$$\begin{cases} \frac{\partial L_2}{\partial m} = \sum_{i=1}^n (y_i - m x_i - p) (-x_i) \\ \frac{\partial L_2}{\partial p} = \sum_{i=1}^n (y_i - m x_i - p) (-1) \end{cases} \quad (97)$$

En annulant les dérivées, on obtient le système

$$\begin{bmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i x_i y_i \\ \sum_i y_i \end{bmatrix} \quad (98)$$

dont la solution est immédiate. L'erreur de rectitude est égale à la différence entre le plus grand et le plus petit écart sur les n points. Graphiquement, l'erreur de rectitude est la distance entre les droites d^s et d^i parallèles à d^* et qui encadrent l'ensemble de points. La méthode des moindres carrés est applicable à la plupart des erreurs de forme classiques (planéité, circularité, cylindricité) moyennant une formulation linéaire des écarts par rapport à la forme géométrique [shu87].

Le système (98) admet toujours une solution¹⁰, ce qui explique en partie pourquoi cette méthode est si largement utilisée. On note également que tous les points ont le même poids. Ainsi, si un point est fortement décalé par rapport aux autres suite à une erreur de mesure (choc, présence d'un copeau, ...), la droite d^* obtenue ne change quasiment pas, pour autant que le nombre de points soit suffisamment grand. Notons que si l'orientation de la droite d^* change peu lorsqu'un point est *accidentellement décalé*, l'erreur de rectitude peu quant à elle être fortement affectée.

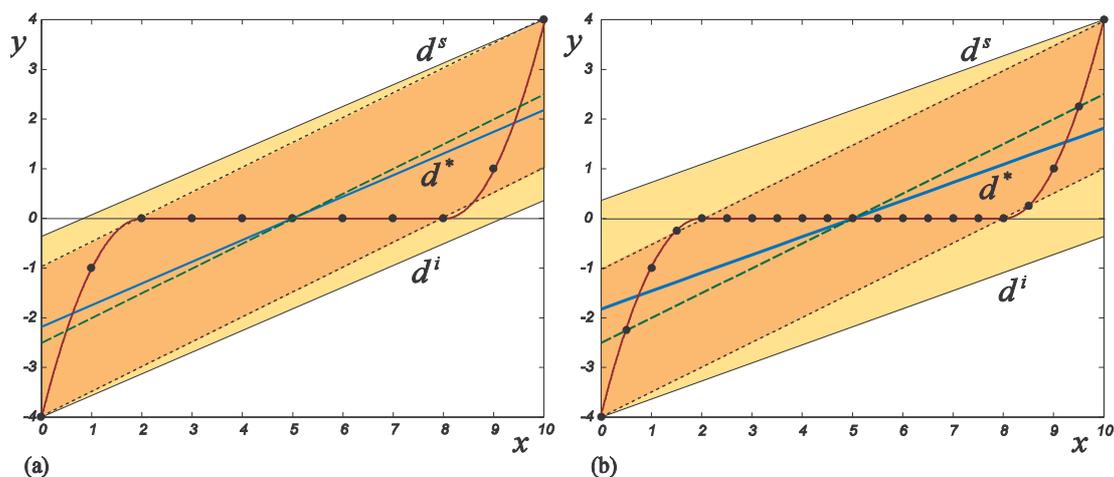


Figure 144 : solutions obtenues aux moindres carrés sur le même profil en prenant 10 points (a) et 20 points (b)

La solution obtenue par la méthode des moindres carrés est influencée par la répartition des points de mesures. Le profil illustré à la figure 144 est constitué d'un segment de droite (entre 2 et 8 mm) et de deux segments de paraboles de part et d'autre. Nous avons disposé respectivement 10 et 20 points sur le profil. Dans les deux cas, la solution obtenue par une méthode exacte (droite en traits pointillés) ne change pas et l'erreur de rectitude correspondante vaut 2.68 mm. Avec la méthode des moindres carrés, l'orientation de la droite d^* change avec le nombre de points. L'erreur de rectitude, c'est-à-dire la distance entre les droites enveloppes d^s et d^i , passe de 3.33 à 4.1 mm. Ainsi, plus on dispose de points sur le profil, plus la droite d^* se rapproche de l'axe x et plus l'erreur de rectitude augmente, alors même que le profil reste identique. Ceci s'explique par le fait qu'il y a proportionnellement plus de points sur la partie horizontale du profil que sur les deux parties paraboliques et que la méthode des moindres carrés

¹⁰ Pour autant que les points ne soient pas alignés sur l'axe y et qu'il y ait au moins deux points.

est plus sensible aux zones à forte densité de points.

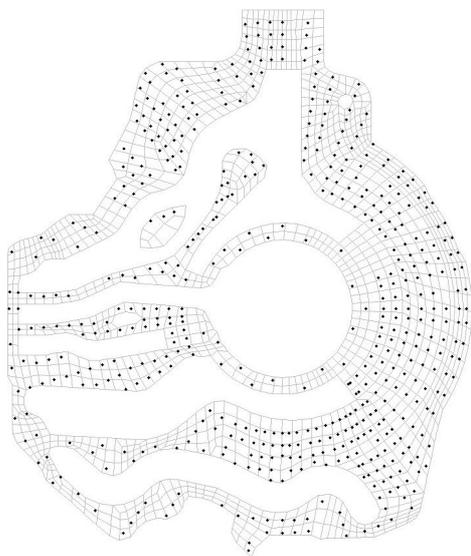


Figure 145 : répartition de points sur la face d'accouplement d'un moyeu de boîte de vitesses

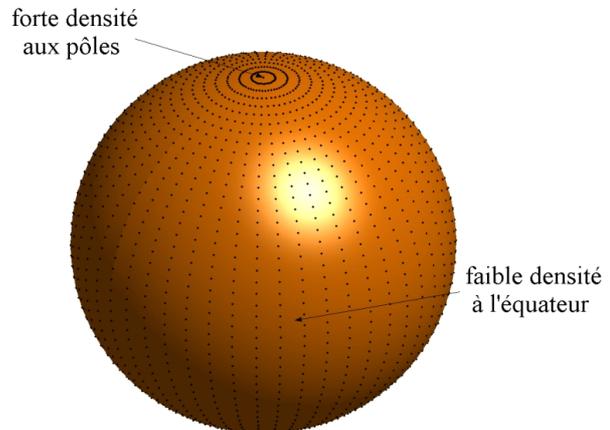


Figure 146 : répartition de points sur une sphère

Des répartitions de points de mesure non homogènes se rencontrent fréquemment en pratique. Elles peuvent être dues à la topologie de la surface (figure 145) ou au mode de répartition des points, comme pour la mesure de surfaces sphériques [mer01] (figure 146). Notons que ce problème se pose aussi pour les ensembles de points obtenus par simulation, puisque le maillage suit la géométrie de la pièce. Pour le moyeu de boîte de vitesses illustré à la figure 147, la densité de points dans la partie de droite est plus faible que pour celle de gauche à cause de la présence des canaux d'alimentation d'huile. Dès lors, le plan obtenu aux moindres carrés s'oriente principalement sur la partie gauche de la pièce et diffère complètement du plan obtenu avec une méthode exacte.

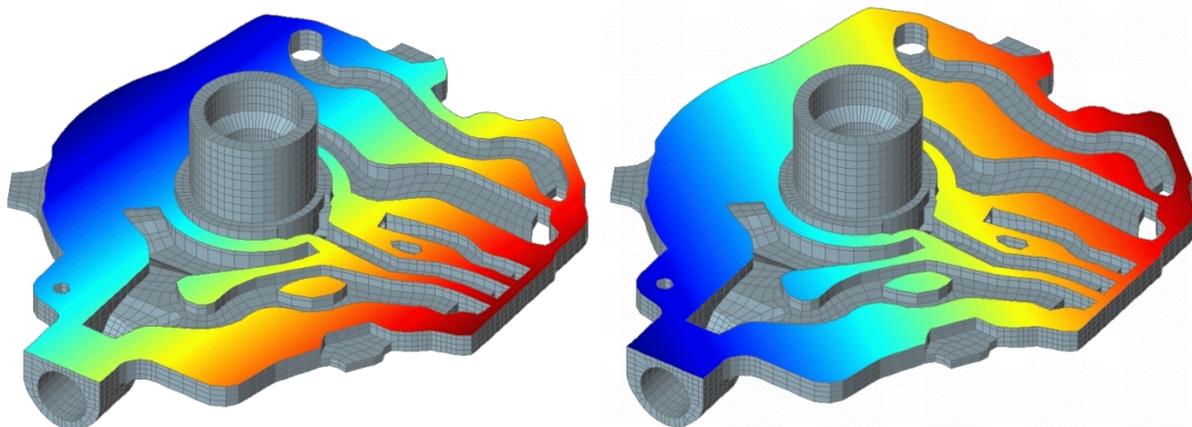


Figure 147 : plans obtenus par les moindres carrés (gauche) et par une méthode exacte (droite); les couleurs indiquent la cote par rapport au plan horizontal

Remarquons enfin que, pour les erreurs d'orientation, les références simulées obtenues par la méthode des moindres carrés diffèrent des références simulées obtenues avec des méthodes exactes, ce qui donne évidemment des erreurs différentes. Pour s'en convaincre, il suffit de comparer l'orientation des deux plans de la figure 147. L'erreur de perpendicularité de l'axe de l'alésage par rapport à la face

d'accouplement du moyeu sera différente selon qu'on utilise un plan ou l'autre comme référence.

La méthode des moindres carrés est une méthode simple et rapide pour évaluer *grossièrement* les erreurs de forme mais on ne peut se satisfaire de cette méthode car elle conduit *systématiquement à une erreur de forme surévaluée*. Pour contrôler les pièces en production, il est impératif d'utiliser une méthode conforme aux définitions établies dans les normes.

4.3.3. Méthode basée sur le gradient

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le calcul de l'erreur de forme peut être résolu comme la recherche du plus petit encadrement ou la recherche de la meilleure approximation uniforme d'un profil ou d'une surface décrit(e) par un ensemble de points. Dans les deux cas, il s'agit de minimiser une fonction, respectivement les fonctions Δ et e_{\max} . Voyons d'abord à quoi ressemblent ces fonctions.

Pour l'erreur de rectitude, la fonction Δ ne dépend que de la variable φ qui correspond à l'orientation de l'encadrement. L'allure de la fonction est illustrée à la figure 148. Elle est continue mais *non continûment dérivable* et elle peut présenter des *minima locaux*. En planéité et en circularité, la fonction présente les mêmes caractéristiques (figure 149).

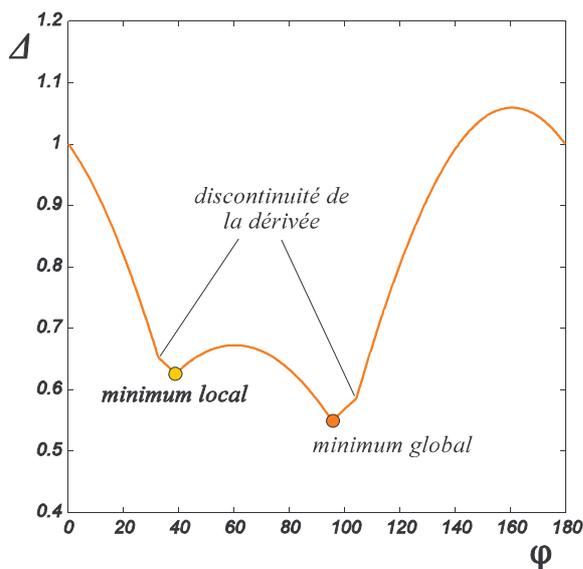


Figure 148 : fonction Δ en rectitude

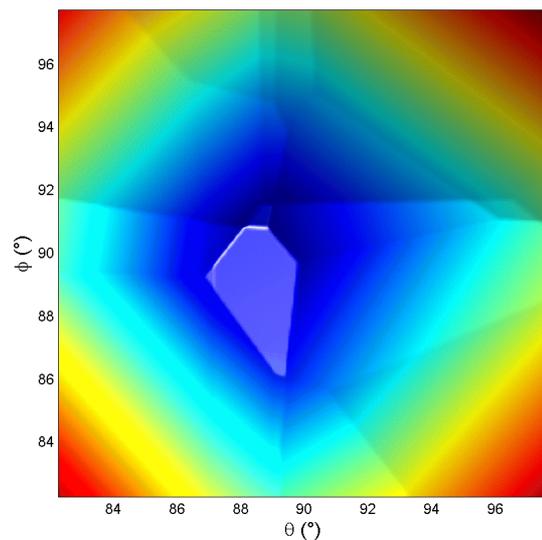


Figure 149 : fonction Δ en planéité

La fonction e_{\max} dépend d'une variable supplémentaire ρ de sorte qu'on ne peut la visualiser que pour la rectitude. La figure 150 montre l'allure de la fonction e_{\max} correspondant au même profil que pour la figure 148. Les deux fonctions Δ et e_{\max} se ressemblent car les deux problèmes de minimisation sont équivalents et admettent la même solution.

Les méthodes classiques basées sur la dérivée de la fonction, comme celle de Newton-Raphson ou les méthodes de gradient, sont mal adaptées à ce type de problème car la dérivée première n'est pas continue. De plus, elles ne permettent pas d'éviter les minima locaux.

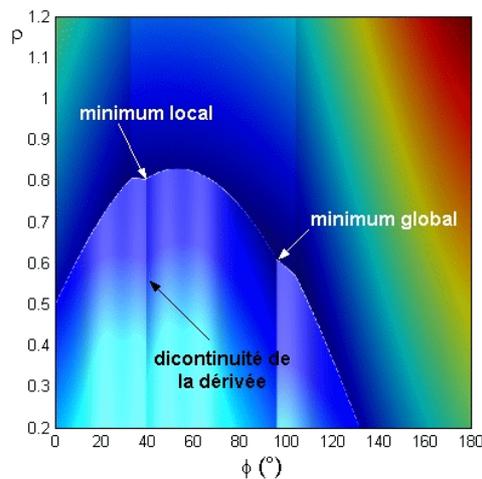


Figure 150 : fonction e_{\max} en rectitude

4.3.4. Méthode du simplexe

Les méthodes d'ordre zéro, qui ne font pas appel aux dérivées de la fonction, sont *a priori* bien adaptées pour résoudre les problèmes liés au calcul des erreurs de forme. Citons la méthode de Monte-Carlo ou les algorithmes génétiques. La *méthode du simplexe* de Nelder et Mead [nel65] est une méthode de ce type basée sur les diverses déformations d'un polytope convexe appelé *simplexe*. Le nombre de sommets du polytope est égal au nombre de variables plus un : triangle pour une fonction de deux variables, tétraèdre pour une fonction de trois variables, ... Elle s'applique à tous les types de fonctions, continues ou discontinues, convexes ou non. L'algorithme consiste à déformer le polytope selon différents modes qui dépendent des valeurs de la fonction aux sommets du polytope. A chaque itération, le mode de déformation est choisi de manière à trouver un nouveau point où la valeur de la fonction est plus petite. L'avantage de la méthode du simplexe est qu'elle est naturellement stable, contrairement aux méthodes de gradient.

Un des inconvénients du simplexe est que le nombre d'itérations est généralement élevé, ce qui est propre à toutes les méthodes d'ordre zéro. Cependant, pour les problèmes qui nous occupent, l'évaluation des fonctions est très peu coûteuse. Pour donner un ordre d'idée, mille évaluations de la fonction Δ pour un ensemble de mille points en cylindricité prend un temps de l'ordre d'une seconde sur un PC actuel. Dès lors, le nombre d'itérations n'est pas un facteur limitatif.

Comme beaucoup d'autres méthodes, celle du simplexe est très sensible au choix du point de départ. Pour un problème à m variables, le simplexe de départ est un polytope à $m+1$ sommets. Ces $m+1$ points sont choisis de manière à couvrir le plus possible l'espace des variables. Dans sa forme simple, la méthode du simplexe est une *méthode locale*. En d'autres termes, cela signifie qu'à partir d'un point de départ donné, l'algorithme converge toujours vers la même solution. Si cette solution est un minimum local, l'algorithme ne peut pas converger vers le minimum global de la fonction. Dès lors, on doit effectuer plusieurs essais en partant d'un simplexe de départ aléatoire, de manière à augmenter les chances d'atteindre le minimum global de la fonction.

Nous avons appliqué la méthode du simplexe à tous les problèmes d'erreurs de forme. Pour la plupart des problèmes comportant une ou deux variables (rectitude, planéité, circularité), elle permet d'obtenir la solution exacte du premier coup car ils présentent rarement des minima locaux. Par contre, pour les problèmes présentant plus de deux variables (sphéricité, cylindricité, conicité), il faut effectuer de l'ordre

d'une centaine d'essais pour atteindre la bonne solution. Sur la figure 151, on constate bien que l'algorithme se bloque dans la majeure partie des cas sur des minima locaux qui sont d'ailleurs généralement situés dans des vallées de la fonction où la dérivée est discontinue.

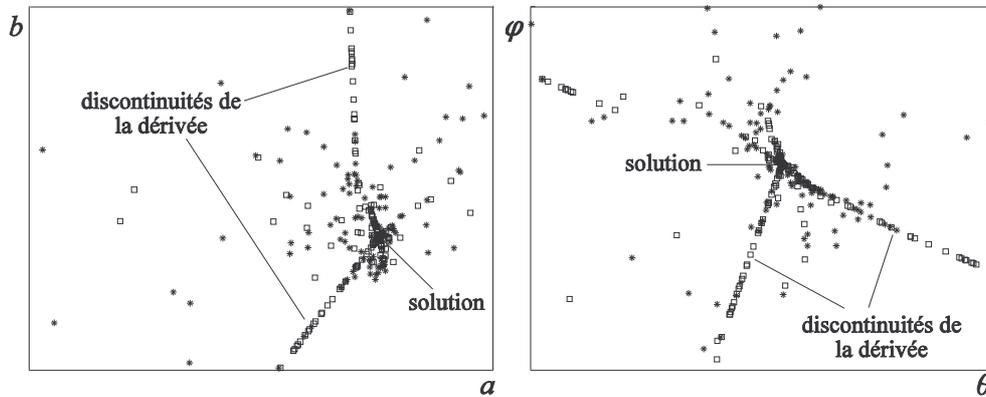


Figure 151 : solutions obtenues en partant d'un simplexe aléatoire pour un calcul de cylindricité; les solutions sont affichées dans le plan des variables a et b (localisation de l'axe) et dans celui des variables θ et φ (orientation de l'axe)

La méthode du simplexe s'applique bien au calcul des erreurs de forme. Elle est du reste extrêmement simple à mettre en oeuvre. Son inconvénient majeur est qu'on n'est jamais certain d'avoir obtenu la bonne solution, même en effectuant un grand nombre d'essais. De fait, on peut obtenir des solutions différentes d'un essai à l'autre.

4.4. Minimisation des normes p

4.4.1. Définitions et propriétés

Les problèmes de minimisation sont difficiles à résoudre à cause des caractéristiques des fonctions Δ et e_{\max} : dérivées premières discontinues et présence de minima locaux. On peut dès lors songer à minimiser des fonctions plus douces qui tendent vers les fonctions originales. Dans cette optique, la norme d'ordre p des écarts présente des propriétés intéressantes. Elle est définie par

$$N_p = \left(\sum_{i=1}^n |e_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{99}$$

Sa première propriété est de tendre vers e_{\max} lorsque p tend vers l'infini. En effet, il est aisé de montrer que l'inégalité

$$e_{\max} \leq N_p \leq e_{\max} n^{\frac{1}{p}} \tag{100}$$

est toujours vérifiée quel que soit l'exposant p . La norme d'ordre p présente aussi la propriété de diminuer quand l'exposant p augmente (inégalité de Jensen) :

$$N_p \geq N_q \text{ pour } q > p \tag{101}$$

On peut facilement montrer que la *moyenne d'ordre p* des écarts, définie par

$$M_p = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |e_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{102}$$

tend également vers e_{\max} lorsque p tend vers l'infini :

$$e_{\max} \geq M_p \geq e_{\max} n^{-\frac{1}{p}} \tag{103}$$

et qu'elle augmente lorsque l'exposant augmente :

$$M_p \leq M_q \text{ pour } q > p \tag{104}$$

Dès lors, pour n'importe quelle valeur des paramètres λ et ρ , la fonction e_{\max} est toujours encadrée par la norme d'ordre p et la moyenne d'ordre p des écarts (figure 152). Il faut atteindre des valeurs de p suffisamment élevées pour que N_p et M_p converge vers e_{\max} . Si l'on veut approcher la fonction e_{\max} avec une précision ϵ donnée, la valeur de l'exposant p à atteindre dépend du nombre de points n

$$\epsilon = \frac{N_p - e_{\max}}{e_{\max}} \leq n^{\frac{1}{p}} - 1 \Rightarrow p \geq \frac{\log n}{\log(1 + \epsilon)} \tag{105}$$

La figure 153 montre les exposants p à atteindre en fonction du nombre de points et de la précision voulue. Par exemple, pour un ensemble de 1000 points et une précision désirée de 10^{-5} , il faut minimiser la norme d'ordre $p = 6.9 \cdot 10^5$.

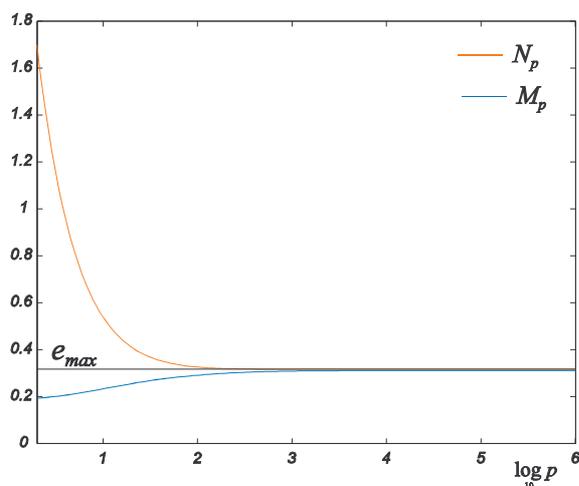


Figure 152 : moyenne et norme d'ordre p

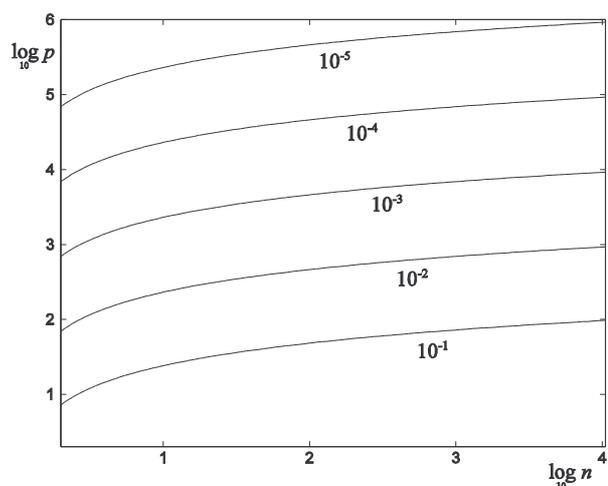


Figure 153 : exposant p à atteindre pour une précision donnée

Le principe consiste à minimiser la norme N_p qui est une fonction continûment dérivable et qui tend vers e_{\max} . Cette idée n'est pas neuve. Goch a proposé cette solution [goc90]. La difficulté vient du fait qu'il faut atteindre des exposants très élevés, de l'ordre de 10^6 , pour que la norme N_p tende effectivement vers e_{\max} . Pour de tels exposants, la norme N_p n'est plus continûment dérivable d'un point de vue numérique et on retrouve les mêmes difficultés que pour la minimisation de la fonction originale. Dans son travail, Goch atteignait un exposant de l'ordre de 50 à 60, ce qui est beaucoup trop faible pour obtenir la solution du problème.

4.4.2. Principe

La méthode que nous proposons consiste à *minimiser les normes N_p successives* en partant de la norme d'ordre 2 et en augmentant progressivement l'exposant. L'accroissement de l'exposant p suit une progression géométrique de raison τ . Le choix de τ influence la vitesse et la stabilité de l'algorithme. Une valeur trop grande risque de le faire diverger et une valeur trop petite conduit à un grand nombre d'itérations sur p . Après quelques tests, la valeur de τ a été fixée à $\sqrt{2}$, de sorte que la solution est obtenue après 39 itérations si l'exposant p à atteindre est égal à 10^6 .

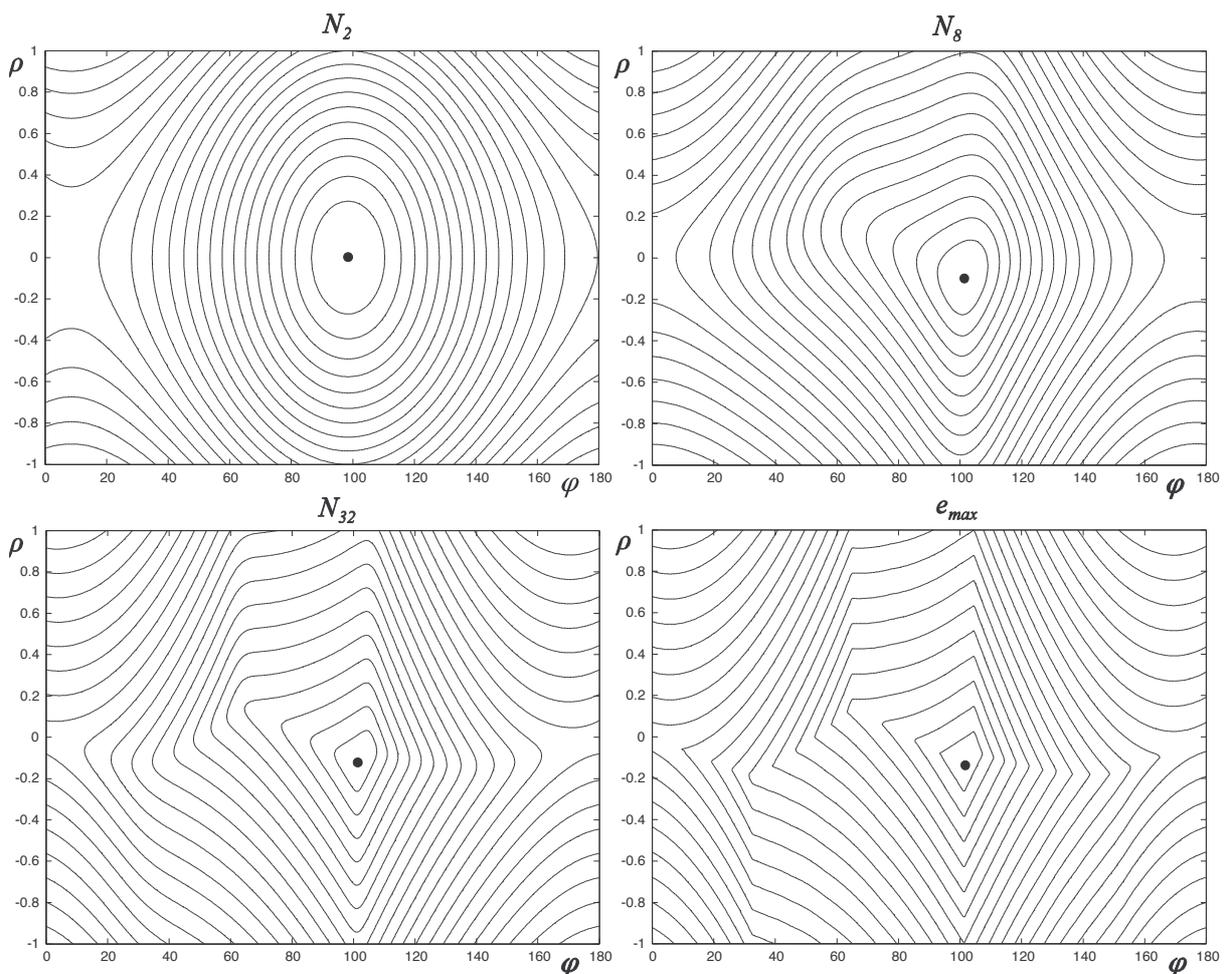


Figure 154 : évolution de la norme d'ordre p (rectitude)

Cette méthode s'avère particulièrement bien adaptée aux problèmes de calcul d'erreurs de forme pour

plusieurs raisons. La première est que la norme N_2 , qui est le point de départ de l'algorithme, est très douce et donc très facile à minimiser, ce qui donne une solution initiale stable (figure 154). La seconde est liée au fait que les minima de deux normes successives sont très proches, ce qui réduit fortement les risques de divergences.

Enfin, la propriété la plus marquante est que *la suite des minima successifs tend vers le minimum global de la fonction e_{\max}* . Cette propriété ne peut pas se démontrer et de fait, elle n'est pas générale. En effet, on a observé des cas où elle n'était pas vérifiée, mais il s'agissait toujours de cas *académiques* qui présentaient des propriétés de symétrie que l'on ne rencontre pas en pratique. En cylindricité, où l'on constate toujours la présence d'un grand nombre de minima locaux, l'algorithme trouve toujours son chemin vers le minimum global de la fonction e_{\max} (figure 155).

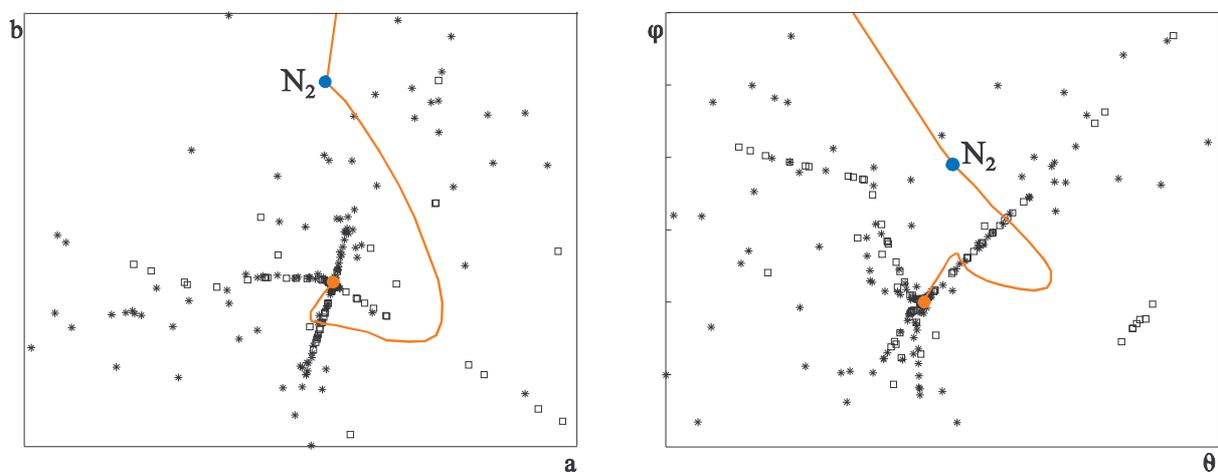


Figure 155 : convergence de la méthode des normes p sur un cas de cylindricité

4.4.3. Mise en oeuvre

Le principe de l'algorithme est relativement simple. Cependant, sa mise en oeuvre requiert la minimisation des normes N_p successives et nécessite quelques précautions pour éviter les problèmes numériques liés aux exposants élevés.

Minimisation de N_p

A partir d'un point de départ choisi arbitrairement, on minimise d'abord la norme d'ordre 2. L'exposant est alors multiplié par la raison τ et on repart du minimum de N_2 pour minimiser la norme d'ordre 2τ . On procède de même jusqu'à atteindre l'exposant ou la précision souhaités. Pour minimiser la norme N_p à chaque itération, deux méthodes de minimisation ont été implantées : celle de Newton-Raphson et celle du simplexe.

Avec la méthode de Newton-Raphson, on ne minimise pas à proprement parler toutes les normes successives. En réalité, on ne cherche le minimum effectif que pour la norme d'ordre 2. Celui-ci est généralement atteint après 3 ou 4 itérations. Par après, on ne réalise qu'une seule itération pour chaque norme, de manière à ne pas atteindre un point où la dérivée n'est pas définie. Cependant, il arrive que l'algorithme diverge. On se base sur l'inégalité de Jensen pour déceler une amorce de divergence. Si la valeur de la norme est plus grande qu'à l'itération précédente, l'exposant est bloqué jusqu'à ce qu'une

valeur plus petite soit trouvée et on reprend alors le processus normal. Remarquons que les cas de divergence sont très rares : ils ne se sont produits dans nos tests que pour des problèmes académiques.

Les problèmes de divergence ou de dérivée indéfinie ne se posent pas avec la méthode du simplexe. Dès lors, on peut rechercher le minimum de chaque norme N_p . A chaque itération sur l'exposant p , le simplexe de départ est construit autour du minimum trouvé à l'itération précédente, les m autres sommets du polytope étant choisis aléatoirement mais de manière à couvrir le plus possible l'espace des variables. Ainsi, si la suite des minima des normes successives tendait vers un optimum local, l'algorithme pourrait retrouver le chemin de l'optimum global. Mis à part de très rares cas, les solutions obtenues sont toujours identiques, que l'on utilise la méthode de Newton-Raphson ou celle du simplexe.

Mise à échelle

L'évaluation de la norme d'ordre p requiert le calcul des termes $|e_i|^p$. Pour des valeurs élevées de p , on atteint la limite machine de représentation d'un réel, *overflow* en anglais. Dès lors, on est obligé de mettre à échelle les écarts en multipliant haut et bas par la valeur e_{\max} ce qui donne

$$N_p = \left(\sum_{i=1}^n e_{\max} \left| \frac{e_i}{e_{\max}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = e_{\max} \left(\sum_{i=1}^n |\tilde{e}_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (106)$$

où les écarts \tilde{e}_i sont tous compris entre -1 et 1. Lorsque p tend vers l'infini, tous les termes de la somme pour lesquels la valeur absolue de l'écart \tilde{e}_i est strictement inférieure à l'unité tendent vers zéro. Seuls les termes associés aux points extrêmes, dont l'écart est égal à un, se retrouvent dans la somme.

Elimination des nombres très petits

Certains ordinateurs anciens ne sont pas capables de gérer les nombres positifs très petits (*underflow* en anglais). Pour éviter ce problème, les termes $|\tilde{e}_i|^p$ qui sont plus petits que la limite de la machine ne doivent pas être évalués. Ces termes à rejeter satisfont la condition

$$|\tilde{e}_i| \leq 10^{-\frac{\epsilon}{p}} \quad (107)$$

où $10^{-\epsilon}$ est la limite de la machine. Cette précaution, qui n'est pas indispensable sur les machines récentes, permet cependant d'accélérer fortement le calcul. En effet, à mesure que l'exposant augmente, le nombre de termes rejetés est de plus en plus grand et, à la fin du processus, on ne conserve que les points pour lesquels la valeur absolue de l'écart est proche de l'unité. Ces points sont en fait ceux sur lesquels l'encadrement optimal s'appuie. La figure 156 montre le nombre de points conservés au cours des itérations correspondant respectivement à des écarts positifs et négatifs. Lorsque la solution est atteinte, il ne reste que les points pour lesquels l'écart mis à échelle \tilde{e}_i vaut un ou moins un. Pour un calcul de planéité (figure 156a), l'encadrement optimal présente deux points de contact sur le plan inférieur et deux sur le plan supérieur, ce qui correspond à un couple d'arêtes gauches¹¹. Pour un cas de cylindricité (figure 156b), on trouve six points de contact, deux sur le cylindre extérieur et quatre sur le

¹¹ En planéité, on peut aussi trouver les solutions 1-3 ou 3-1. En cylindricité, on trouve généralement les solutions 2-4, 3-3 et 4-2, mais nous n'avons jamais trouvé les solutions 1-5 ou 5-1.

cylindre intérieur.

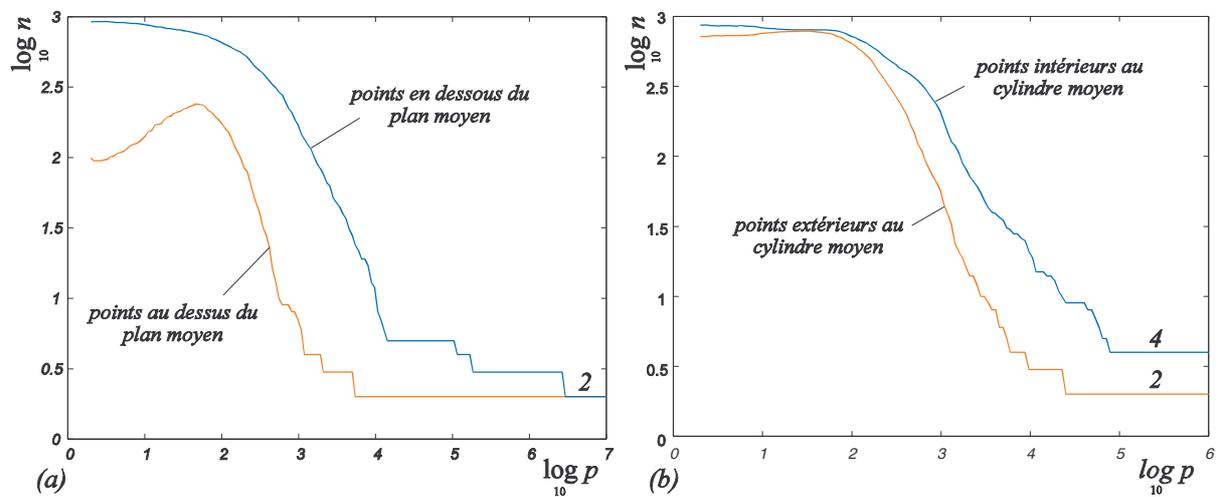


Figure 156 : évolution du nombre de points gardés au cours des itérations en planéité (a) et en cylindricité (b)

4.4.4. Discussion

La figure 157 montre l'écart entre l'erreur de rectitude calculée en norme 2, ce qui équivaut à la méthode des moindres carrés, et celle obtenue avec la méthode des normes p sur un ensemble d'environ 500 mesures. La différence moyenne est de 12.7% et la différence maximum observée atteint 21.5%. Pour les autres erreurs de forme, les différences sont du même ordre de grandeur. Ceci montre bien l'intérêt d'utiliser une méthode exacte pour évaluer les erreurs de forme.

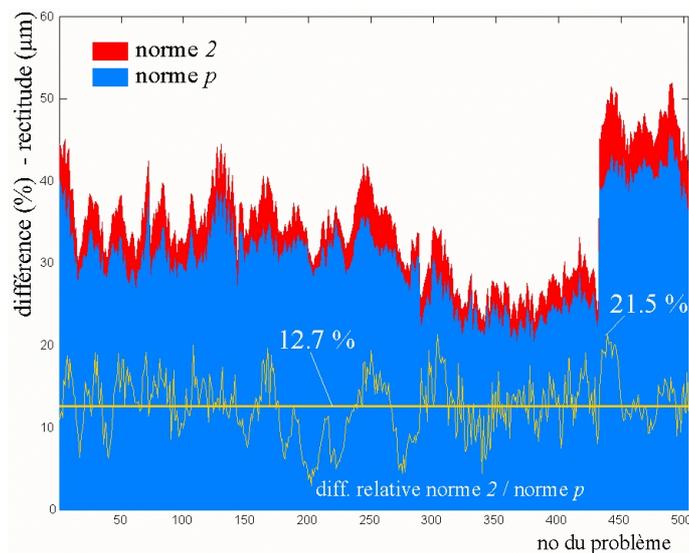


Figure 157 : différence entre le minimum de la norme 2 et celui de la norme p

La méthode des normes d'ordre p est extrêmement fiable. En comparant les solutions obtenues avec celles des méthodes géométriques (rectitude, planéité, circularité), elle donne toujours la solution exacte, pour autant qu'il s'agisse de cas réalistes. Cette méthode a été intensivement testée sur de nombreux cas de mesures ou de résultats de simulation. En outre, elle a été adoptée par la firme RENAULT, après

évaluation de plusieurs algorithmes différents, comme base pour un logiciel de calcul des erreurs de forme, d'orientation et de position (DEFGEOM).

Il est clair que si l'ensemble de points ne ressemble pas du tout à la forme théorique (une droite, un plan, un cercle, ...) correspondant au défaut que l'on calcule, le problème perd beaucoup de son sens. Dans ces conditions, il peut exister un grand nombre de minima locaux que l'algorithme n'arrive pas à éviter. Par exemple, si l'on calcule la planéité d'un ensemble de points répartis sur une sphère, l'obtention du minimum global est assez improbable, quelle que soit la méthode de minimisation (figure 158). Pour cet exemple, seule la méthode de l'enveloppe convexe donne la solution optimale.

Les méthodes géométriques fournissent des valeurs de référence qui permettent de qualifier les méthodes basées sur la minimisation de fonctions. En outre, elles sont beaucoup plus visuelles, ce qui permet de comprendre certains aspects du problème. Lorsque l'on trace la fonction Δ d'un problème de circularité en fonction des coordonnées du centre de l'encadrement (a, b) et que l'on superpose les deux diagrammes de Voronoï (figure 159), on constate que les discontinuités de la dérivée première de Δ correspondent aux arêtes des deux diagrammes. Pour un centre A quelconque de l'encadrement, ce dernier ne touche que deux points de l'ensemble. Lorsque le centre se déplace, la variation de la fonction Δ est continue. Lorsque le centre touche une arête d'un des deux diagrammes de Voronoï (point B), un des cercles est en contact avec un troisième point de l'ensemble. Lorsque le centre se déplace encore (point C), l'encadrement quitte un des deux points de contact initiaux et la distance entre les deux cercles ne varie plus de la même façon, ce qui explique la discontinuité de la dérivée première. La même constatation vaut pour les problèmes de rectitude et de planéité avec l'enveloppe convexe.

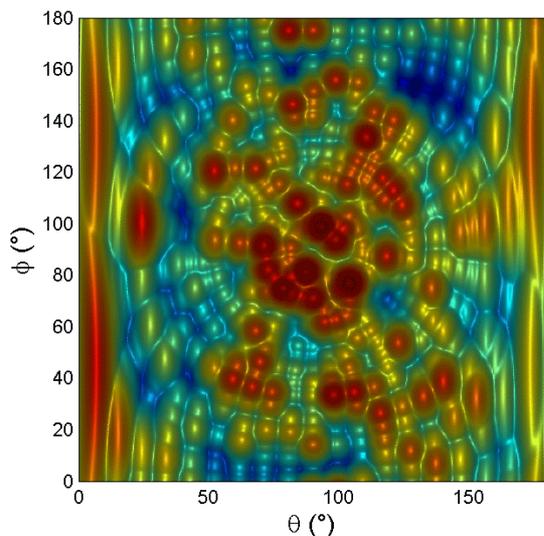


Figure 158 : allure de la fonction Δ pour le calcul de la planéité d'un ensemble de points répartis sur une sphère

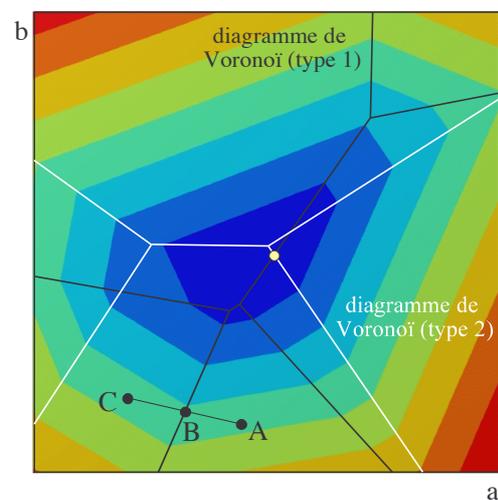


Figure 159 : discontinuité de la dérivée première de la fonction Δ en circularité

5. Modélisation du broutement

Le mécanisme du broutement est très différent de celui des vibrations forcées car il s'agit de vibrations auto-entretenues. Il est généralement provoqué par l'élément le moins rigide du système dont les vibrations libres s'amplifient au cours du temps par régénération : la vibration provoque une oscillation de l'épaisseur de coupe, ce qui produit un effort de coupe fluctuant qui, à son tour, entretient la vibration. Le broutement se produit lorsque l'engagement dépasse une certaine limite qui dépend des paramètres d'usinage et de l'amortissement du système. La profondeur de passe limite varie avec la fréquence de rotation de l'outil ou de la pièce selon des lobes de stabilité. Pour le type d'applications que nous étudions, il est plus approprié de ne déterminer que la limite inconditionnelle de stabilité, c'est-à-dire la profondeur de passe maximale quelle que soit la fréquence de rotation. La méthode que nous avons développée est fondée sur la théorie de Tlusty. Chaque noeud de la surface est considéré comme un système indépendant à un degré de liberté dont la raideur est calculée à partir de la matrice de flexibilité du superélément. En fraisage, ce type d'approche n'est valable que pour les problèmes de broutement des parois minces, qui représentent néanmoins un grand nombre des cas rencontrés en pratique. La profondeur de passe limite est calculée en chaque noeud de la surface usinée, ce qui permet d'établir une carte du broutement de la surface. Le principal avantage de cette approche est d'être très rapide. L'effet du dispositif de bridage et des différents paramètres de coupe (géométrie, dimension et trajectoire d'outil) sur la profondeur de passe maximale peut être visualisé instantanément une fois la matrice de flexibilité calculée.

5.1. Exposé du problème

5.1.1. Diagrammes de stabilité

Le broutement peut se produire pour n'importe quelle opération d'usinage. Cependant, les causes du broutement et les remèdes à y apporter dépendent fortement du domaine d'application.

Dans le domaine aéronautique, beaucoup d'opérations consistent à usiner *dans la masse*. A partir d'une pièce pleine, l'outil enlève un très grand volume de matière jusqu'à façonner la géométrie voulue. Pour ce type d'opération, on cherche à obtenir le plus grand débit de copeaux possible afin de minimiser le temps d'usinage. Le débit augmente linéairement avec la vitesse de coupe. Dès lors, l'usinage à grande vitesse (UGV) est largement utilisé en aéronautique, d'autant plus que la plupart des matériaux usinés (alliages légers, matériaux non métalliques) autorisent des vitesses de coupe très élevées. Les pièces usinées sont souvent de forme complexe, ce qui nécessite des outils minces et élancés comme des fraises à contourner ou des fraises boules. La grande flexibilité des outils combinée à un choix inadéquat des conditions de coupe provoquent souvent des problèmes de broutement.

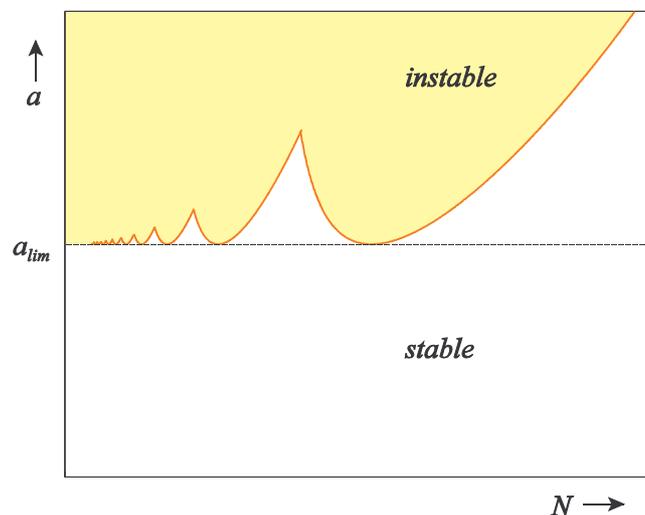


Figure 160 : diagramme de stabilité

Le choix de conditions de coupe se fait généralement au moyen d'un *diagramme de stabilité* (figure 160). Celui-ci est constitué de courbes, appelées *lobes de stabilité*, qui dépendent de la fréquence de rotation de la broche N et de l'engagement de l'outil a . Au-delà des lobes de stabilité, le système est instable et le broutement apparaît. En deçà, il est stable. La droite horizontale qui relie le bas des lobes de stabilité est appelée la *limite inconditionnelle de stabilité*. Elle correspond à l'engagement maximum a_{lim} que l'on peut atteindre sans provoquer du broutement quelle que soit la fréquence de rotation de l'outil.

Le diagramme de stabilité est construit sur base d'un modèle qui reflète le comportement dynamique du système vis-à-vis du broutement. Les premiers modèles furent développés par Meritt [mer65] et par Tlusty [tlu57]. A l'heure actuelle, le modèle développé par Altintas [alt04] est une référence en la matière. Tous ces modèles font intervenir la réponse du système en fonction de la fréquence (*Frequency Response Function*, FRF). Celle-ci peut être déterminée numériquement à partir des caractéristiques du système : masse, raideur et amortissement. Cependant, il n'est pas toujours simple d'évaluer ces caractéristiques, spécialement l'amortissement du système. Une solution plus fiable est de déterminer expérimentalement la FRF en réalisant une analyse modale du système : on fixe un accéléromètre sur l'outil puis on le *sonne* avec un marteau à impulsion. Cette mesure permet également de déterminer l'amortissement du système. Il existe un certain nombre de logiciels permettant d'analyser le comportement d'un système vis-à-vis du broutement et de déterminer des conditions de coupe stables [cut04, har04a].

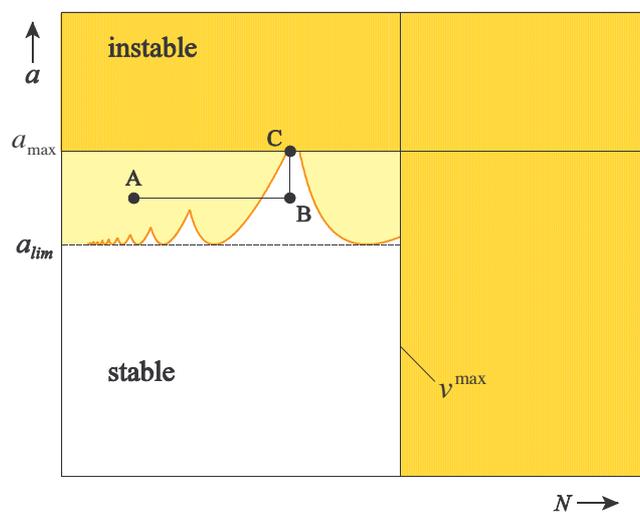


Figure 161 : choix de conditions de coupe stables

Le diagramme de stabilité permet de trouver des conditions de coupe favorables non seulement pour éviter le broutement, mais aussi pour augmenter la productivité. Sur l'exemple présenté à la figure 161, les conditions initiales sont représentées par le point A. Ce point est dans une zone instable du diagramme. Pour trouver un point stable, il suffit de se déplacer parallèlement à l'axe des abscisses jusqu'à atteindre un point situé entre deux lobes (point B). Généralement, on choisit la zone inter-lobes la plus à droite possible. Pour accroître encore le débit de copeaux, on peut augmenter l'engagement de l'outil en se déplaçant jusqu'au point C. Il existe une limite maximum de l'engagement (a_{max}) car les forces de coupe ne peuvent dépasser le niveau de sollicitations prescrit par le fabricant d'outils. Il existe également une fréquence limite liée à la vitesse de coupe maximum (v^{max}). Celle-ci dépend de la nuance des plaquettes utilisées et du matériau usiné.

Pour les applications courantes du domaine aéronautique, le diagramme de stabilité est tout à fait approprié pour choisir des conditions de coupe optimales. Ce choix est facilité par le fait que la plage de vitesses de coupe autorisée est assez vaste. Pour les alliages d'aluminium par exemple, on peut atteindre des vitesses de coupe de l'ordre de 10000 m/min. De plus, on peut jouer sur le diamètre de l'outil pour ajuster la fréquence de rotation et la vitesse de coupe. En pratique, un réglage fin de la vitesse de rotation peut s'avérer nécessaire à chaque changement d'outil. En effet, même si l'outil est théoriquement semblable au précédent, le serrage dans le porte-outil ne se reproduit jamais exactement de la même façon. Les fréquences propres du système peuvent donc changer quelque peu de sorte que les lobes du diagramme de stabilité se retrouvent légèrement décalés. Comme la zone de stabilité entre deux lobes est assez étroite, il faut parfois réajuster la vitesse de rotation manuellement.

Dans le domaine automobile, le contexte est très différent. Du fait des cadences de production beaucoup plus élevées, on ne travaille jamais au *cas par cas* car cela nécessiterait une intervention humaine fréquente. Une fois que la production est lancée, les conditions de fonctionnement d'une machine doivent être réglées une fois pour toutes et on ne peut plus intervenir sur cette machine que pour effectuer le strict minimum (changements d'outils, maintenance, ...). Il importe donc que le réglage ne soit pas trop sensible à de petites perturbations comme le montage/démontage de l'outil ou la variation d'épaisseur des pièces brutes.

De plus, la marge de manoeuvre dans le choix des conditions de coupe est bien moindre. La plage de vitesses de coupe est souvent beaucoup plus restreinte. Sur la fonte, la vitesse de coupe est de l'ordre de 100 m/min. Dans la majorité des cas, on ne peut pas jouer sur le diamètre de la fraise car celui-ci est fixé par la largeur de la surface à usiner, l'opération devant se faire en une seule passe. Dès lors, une augmentation de la vitesse de rotation est souvent irréalisable. A titre d'exemple, sur un carter-cylindres F9, le dégrossissage est réalisé avec une fraise de 400 mm de diamètre avec 64 dents et la vitesse de rotation est de 92 tr/min. Le broutement au niveau de la baignoire d'huile a une fréquence de l'ordre de 3000 Hz. Pour atteindre la zone de stabilité inter-lobes la plus large, qui se trouve précisément vers 3000 Hz, il faudrait multiplier la vitesse de rotation de la fraise par 30, ce qui correspondrait à une vitesse de coupe beaucoup trop élevée pour la fonte (environ 3500 m/min), la vitesse de coupe maximale étant d'environ 150 m/min.

Pour le type d'applications que nous traitons, la détermination des lobes de stabilité n'a donc guère d'intérêt car la marge de manoeuvre sur la fréquence de rotation est trop restreinte. Il nous paraît plus utile de prédire l'*engagement maximum* admissible pour une opération donnée, qui correspond à la limite inconditionnelle de stabilité a_{lim} .

Tous les modèles proposés dans la littérature s'appliquent très bien au broutement de l'*outil* car le comportement d'un outil peut être correctement modélisé par un système simple à un ou deux degrés de liberté. Le broutement engendré par la flexibilité de la *pièce* est nettement plus difficile à modéliser car ses modes de vibration sont plus complexes que ceux d'un outil. On trouve dans la littérature de très nombreux travaux relatifs au broutement des outils mais il en existe très peu qui traitent du broutement des pièces.

5.1.2. Système à un degré de liberté

La méthode que nous avons développée est basée sur la théorie de Tlusty. Avant d'exposer cette théorie, nous rappelons dans ce paragraphe quelques notions de base de dynamique relatives à un système à un degré de liberté.

Soit un système à un degré de liberté constitué d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur visqueux, et soumis à une force oscillante $f(t)$ (figure 162). Le comportement du système est régi par l'équation classique d'équilibre des forces, soit :

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = f(t) \quad (108)$$

où m est la masse, c le coefficient d'amortissement et k la raideur.

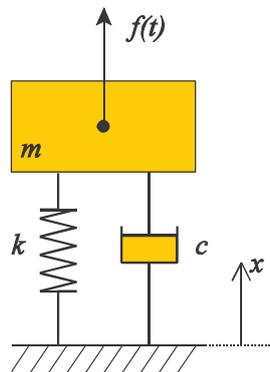


Figure 162 : système à un degré de liberté

Pour une force extérieure périodique et d'amplitude constante $f(t) = F e^{i\omega t}$, la réponse du système est de la forme

$$x(t) = X e^{i\omega t} \quad (109)$$

où ω est la pulsation de la force. En régime établi, tant que la force externe est active, la réponse du système est donnée par

$$X(\omega) = G(\omega) F(\omega) \quad (110)$$

où le terme $G(\omega)$ est appelé la *fonction de transfert* du système et vaut

$$G(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{-\omega^2 m + i \omega c + k} \quad (111)$$

Elle représente l'amplitude de vibration produite par une force unitaire de pulsation ω . On l'appelle aussi la fonction de réponse en fréquence du système (*Frequency Response Function - FRF*). La pulsation propre du système ω_0 , qui correspond à la fréquence des oscillations libres, vaut

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (112)$$

L'amortissement critique du système c_c correspond au coefficient d'amortissement pour lequel la réponse du système cesse d'être oscillante. Il vaut

$$c_c = 2\sqrt{km} \quad (113)$$

Le rapport d'amortissement ξ est défini comme le rapport entre le coefficient d'amortissement c et le coefficient d'amortissement critique c_c . En introduisant la fréquence propre ω_0 et le rapport ξ dans la

formule (111), on obtient une nouvelle forme de la fonction de transfert,

$$G(\omega) = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - r^2 + 2i\xi r} \quad (114)$$

où r est le rapport de fréquence et vaut ω/ω_0 .

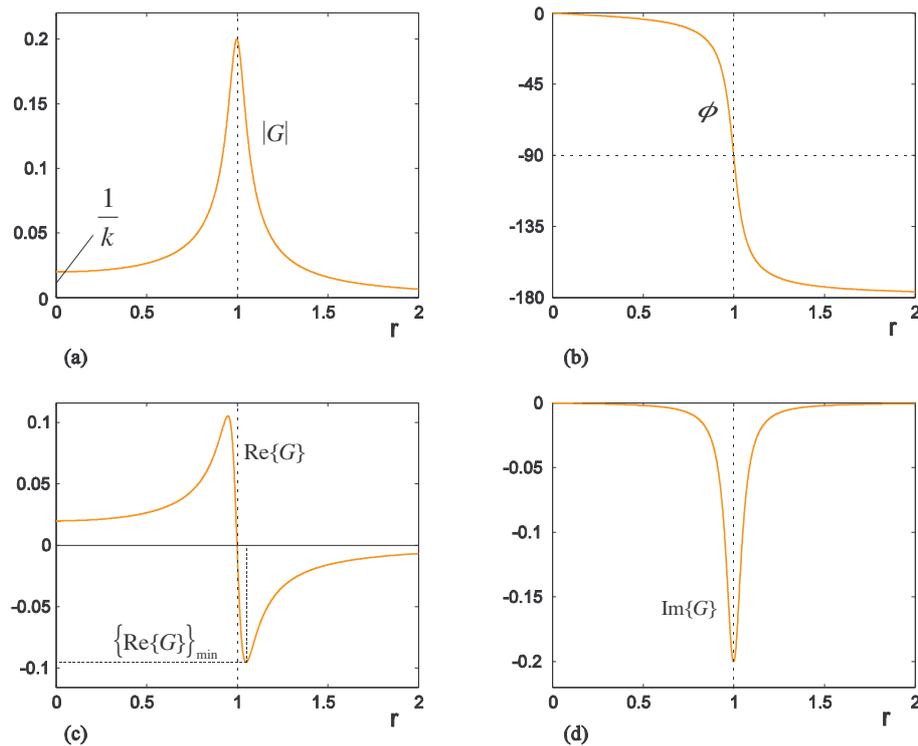


Figure 163 : module de la fonction de transfert (a), déphasage (b), partie réelle (c) et partie imaginaire (d)

La *compliance dynamique* du système est la valeur absolue de la fonction de transfert. Pour une force extérieure non oscillante ($r = 0$), on retrouve la *compliance statique* qui vaut $1/k$ (figure 163). La partie réelle de la fonction de transfert est appelée la *mobilité* du système tandis que la partie imaginaire est appelée l'*inertance*.

5.1.3. Modèle de Tlusty

Lors d'une opération d'usinage, le système pièce/machine/outil a toujours tendance à vibrer. Sa vibration a pour effet de faire varier la position relative entre l'outil et la pièce. La surface coupée par l'outil présente donc une ondulation. Comme l'épaisseur de matière coupée par l'outil varie comme l'ondulation de la surface, l'effort de coupe oscille. Le mécanisme du broutement peut s'expliquer par le fait que le système est en *boucle fermée* : la vibration du système engendre un effort de coupe variable qui, à son tour, provoque la vibration du système. Sous certaines conditions, les vibrations s'amplifient avec le temps et le système devient instable. Rappelons que, pour le broutement, la fréquence de vibration est toujours proche d'une des fréquences propres du système, la première dans la plupart des cas.

Le modèle de Tlusty [tlu57, tlu99] repose sur le schéma présenté à la figure 164. La direction y est la

normale à la surface coupée sur laquelle est mesurée l'épaisseur de coupe h . L'outil est modélisé par un système à un degré de liberté selon l'axe x , incliné d'un angle α par rapport à y . Il se caractérise par une masse m , une raideur k et un coefficient d'amortissement c . La direction de l'effort de coupe F est inclinée d'un angle β par rapport à y .

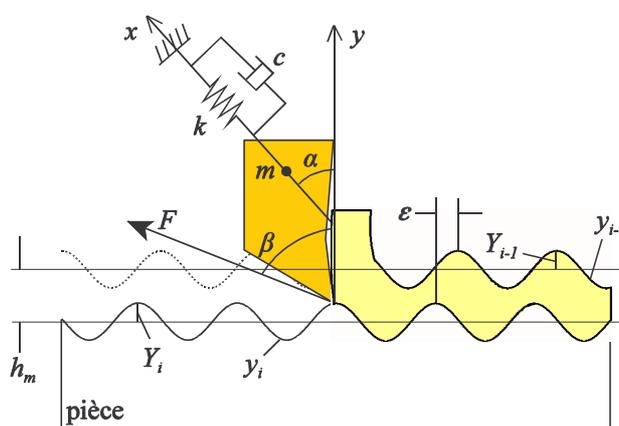


Figure 164 : principe du modèle de Tlustý

La théorie de Tlustý est basée sur quelques hypothèses qui, d'après cet auteur, n'affectent pas la validité du modèle :

- le système est linéaire;
- la direction de la composante oscillante de l'effort de coupe est constante;
- la composante oscillante de l'effort de coupe varie proportionnellement et instantanément avec la variation d'épaisseur de coupe.

Si l'outil vibre à une pulsation ω , l'ondulation qu'il laisse sur la surface est elle-même sinusoïdale et sa pulsation est identique à celle de vibration ω . Si on note Y_i l'amplitude de l'ondulation laissée lors du $i^{\text{ème}}$ passage de l'outil, la vibration selon la direction y vaut

$$y_i = Y_i \sin \omega t = X_i \cos \alpha \sin \omega t \quad (115)$$

où X_i est l'amplitude de la vibration de l'outil. L'épaisseur de coupe présente une composante constante h_m et une composante oscillante qui vaut

$$dh = y_{i-1} - y_i = (x_{i-1} - x_i) \cos \alpha \quad (116)$$

où l'indice $i-1$ correspond au passage antérieur de l'outil.

Afin de rendre le système linéaire, on admet l'hypothèse selon laquelle la partie oscillante de l'effort de coupe dF dépend linéairement de la variation d'épaisseur de coupe dh et de la largeur de coupe b . L'outil est donc soumis à une composante variable de l'effort qui vaut

$$dF = k_d b dh = k_d b [x_{i-1} - x_i] \cos \alpha \quad (117)$$

où k_d est la raideur de coupe dynamique. Elle correspond à l'incrément de l'effort de coupe pour une largeur de coupe unitaire et pour un incrément d'épaisseur de coupe unitaire.

D'après l'équation (110), la réponse du système est de la forme $X = GF$, ce qui donne ici

$$x_i = dF \cos(\alpha - \beta) G(\omega) \quad (118)$$

En combinant les équations (117) et (118), on obtient la relation entre l'amplitude de l'ondulation courante et celle de l'ondulation laissée par l'outil au passage antérieur, soit

$$\frac{y_i}{y_{i-1}} = \frac{x_i}{x_{i-1}} = \frac{G_d(\omega)}{G_d(\omega) + \frac{1}{k_d b}} \quad (119)$$

où $G_d(\omega)$ est la fonction de transfert directionnelle qui vaut

$$G_d(\omega) = \frac{u}{k} \frac{1}{1 - r^2 + 2i\xi r} \quad (120)$$

Le coefficient directionnel u , égal à $\cos \alpha \cos(\alpha - \beta)$, tient compte de l'orientation de l'effort de coupe F et de l'orientation de la direction de vibration x par rapport à la direction normale à la surface coupée y . D'après Tlustý, le système est instable si l'amplitude des vibrations augmente avec le temps. Il est stable si elle décroît. La limite de stabilité peut donc s'écrire

$$\left| \frac{y_i}{y_{i-1}} \right| = 1 \quad (121)$$

En égalant le module de l'équation (119) à l'unité, on obtient

$$\left| G_d(\omega) + \frac{1}{k_d b} \right| = |G_d(\omega)| \quad (122)$$

La fonction de transfert $G_d(\omega)$ est complexe. Par contre, les valeurs k_f et b sont réelles. En ne considérant que la partie réelle de l'équation (122), il vient

$$\operatorname{Re} \left\{ G_d(\omega) \right\} + \frac{1}{k_d b} = \pm \operatorname{Re} \left\{ G_d(\omega) \right\} \quad (123)$$

Le signe plus conduit à une largeur de coupe b infinie, ce qui n'est pas physique. Avec le signe moins, on trouve le critère de stabilité suivant

$$b_{cr} = \frac{-1}{2 k_d \operatorname{Re} \{G_d(\omega)\}} \quad (124)$$

Pour une fréquence ω donnée, les vibrations s'amplifient lorsque la largeur de coupe excède la valeur critique b_{cr} . C'est uniquement pour des valeurs négatives de la partie réelle de la fonction de transfert $G_d(\omega)$ que la valeur critique à un sens. La valeur maximum de la largeur de coupe que l'on peut atteindre quelle que soit la fréquence correspond à la valeur minimum de $\operatorname{Re} \{G_d(\omega)\}$, soit

$$\operatorname{Re}\{G_d(\omega)\}_{\min} = \frac{-u}{4 k \xi (\xi + 1)} \quad (125)$$

qui est atteinte lorsque le rapport de fréquence r vaut $\sqrt{1 + 2\xi}$, $\xi \ll 1$ (figure 163). On obtient finalement le critère de broutement suivant

$$b_{\lim} = \frac{2 k \xi (\xi + 1)}{k_d u} \quad (126)$$

où k est la raideur statique, k_d est la raideur de coupe, ξ est le rapport d'amortissement et u est le coefficient directionnel. Le résultat obtenu par Tlustý est fondamental car il met clairement en évidence les paramètres essentiels qui favorisent la stabilité du processus de coupe :

- *maximiser la raideur du système* : s'agissant d'un outil, on doit veiller à limiter au strict minimum sa longueur et à augmenter le plus possible sa section. Ces recommandations valent également pour le porte-outils, pour la broche et pour la structure de la machine-outil en général;
- *augmenter l'amortissement* : pour l'outil, il existe des systèmes d'amortissement actifs. Pour la machine, on utilise souvent la fonte car elle possède de bonnes propriétés d'amortissement;
- diminuer la raideur de coupe en modifiant les angles d'outils et éventuellement la nuance des plaquettes;
- *diminuer le facteur de direction* en jouant à la fois sur les angles d'outil et sur la trajectoire de l'outil en fraisage.

Pour un système à plusieurs degrés de liberté, la fonction de transfert est égale à la somme des fonctions de transfert (figure 165). La formule (124) devient

$$b_{cr} = \frac{-1}{2 k_d \sum_i u_i \operatorname{Re} \{G_i(\omega)\}} \quad (127)$$

où u_i est le coefficient directionnel du mode i et $G_i(\omega)$ est sa fonction de transfert. La limite de stabilité inconditionnelle correspond alors à la plus petite valeur de la somme des parties réelles (point orange sur la figure 165).

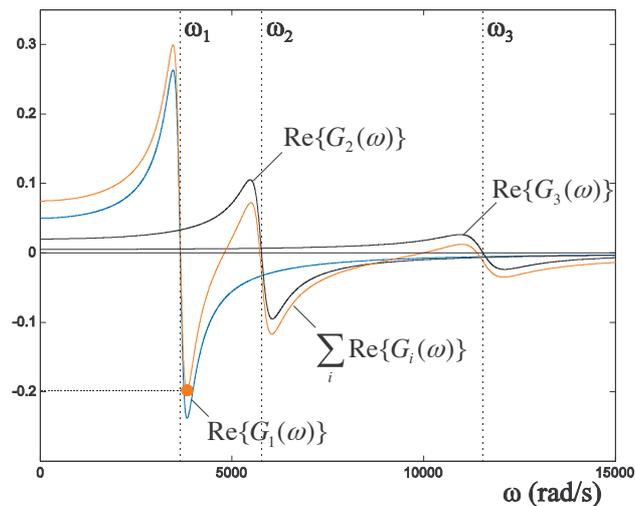


Figure 165 : fonction de transfert d'un système à trois degrés de liberté

L'amortissement du système est de plusieurs natures :

- l'amortissement *structural*, propre à chaque matériau. Pour la fonte, on considère généralement un amortissement structural allant de 3 à 5%;
- l'amortissement par frottement, qui se produit en de nombreux endroits du système comme par exemple au niveau des roulements à billes de la broche ou au niveau des zones de contact entre la pièce et les éléments du montage;
- l'amortissement intrinsèque au processus de coupe (*process damping*).

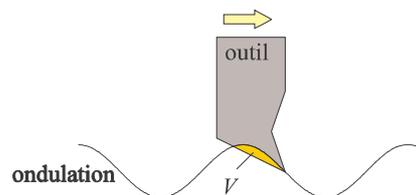


Figure 166 : amortissement intrinsèque

Ce dernier est principalement dû au frottement de la face en dépouille de l'outil sur la surface coupée. D'après plusieurs études [elb94, seg01], l'amortissement introduit est proportionnel au volume de matière déplacé V (figure 166). Comme il varie avec l'amplitude de vibration, il est très difficile de le modéliser. En pratique, on peut déterminer assez facilement l'amortissement structural grâce à une analyse modale. Par contre, il est très difficile de quantifier les deux autres sources d'amortissement.

5.2. Modélisation du broutement de la pièce

5.2.1. Cartes de broutement

L'intérêt du critère de broutement établi par Tlustý est qu'il ne fait intervenir que la raideur *statique*. De plus, dans le cas d'un système à un seul degré de liberté, la fréquence propre du système ω_0 n'intervient pas dans l'équation (126). L'idée fondamentale de la méthode que nous proposons est de considérer

chaque noeud de la surface usinée comme un système à un degré de liberté et d'utiliser la matrice de flexibilité S pour calculer le terme k du critère de brottement [mas04]. Cette méthode ne fait appel à aucune notion *globale* de mode ou de fréquence propre. Elle permet cependant d'obtenir des indications précieuses sur les zones à risque, l'ordre de grandeur de la profondeur de passe limite et la manière de régler les paramètres d'usinage pour réduire les risques de brottement.

Dans la modélisation du défaut engendré par l'usinage, nous inversons la matrice de raideur du superélément après avoir appliqué les conditions aux limites (*cf.* chapitre 3). Nous obtenons ainsi la matrice de flexibilité S du superélément. La ligne i de la matrice de flexibilité correspond au champ de déplacements lorsqu'on applique une force unitaire sur le degré de liberté i .

Comme aucun noeud de la surface usinée ne peut être fixé, on retrouve dans la matrice de flexibilité les lignes et les colonnes correspondant aux trois degrés de liberté de chaque noeud. La sous-matrice diagonale \tilde{S} , de dimensions 3×3 , associée à un noeud de la surface reflète la souplesse locale au niveau de ce noeud (figure 167a). Les vecteurs propres de la matrice \tilde{S} représentent les trois directions principales de souplesse. La valeur propre S_i associée à une direction principale \vec{v}_i est la flexibilité du noeud selon cette direction (figure 167b). La matrice des flexibilités principales \tilde{S} ne présente plus de termes de couplage entre les trois degrés de liberté du noeud.

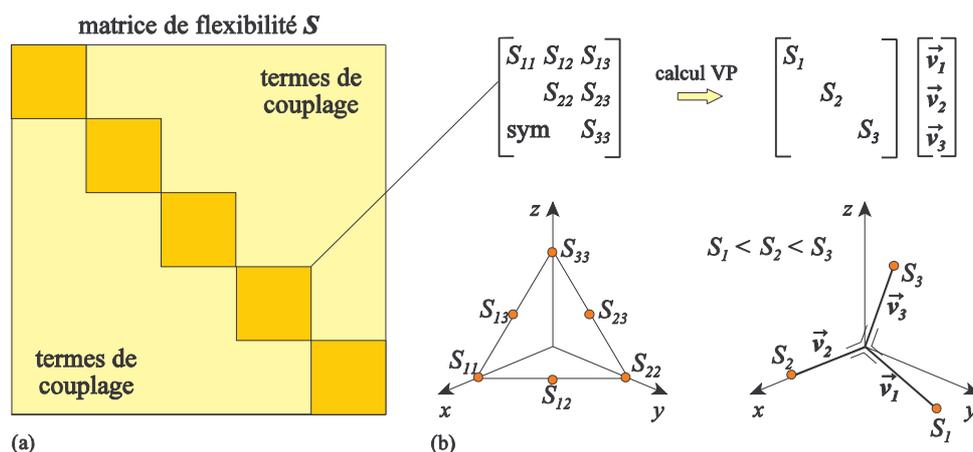


Figure 167 : sous-matrice de flexibilité (a); valeurs propres et vecteurs propres de la matrice (b)

Pour toutes les pièces étudiées, nous avons constaté que :

- pour les zones massives ou proches des fixations, les trois termes de flexibilité sont du même ordre de grandeur, ce qui signifie qu'il n'y a pas de direction de déformation privilégiée;
- pour les parties flexibles, qui sont quasiment toujours des parois minces, le plus grand terme de flexibilité S_3 est nettement plus élevé que les deux autres.

Prenons comme exemple une plaque mince fixée sur trois pans de son pourtour et dont la face supérieure est fraisée. Pour les noeuds situés au milieu de la surface usinée, le terme de plus grande flexibilité S_3 (figure 168) est environ 40 fois plus élevé que les termes S_1 et S_2 (figure 169). Par contre, pour les zones proches des fixations, les trois termes sont sensiblement égaux.

Nous modélisons chaque noeud de la surface comme un système à un degré de liberté dont la direction est donnée par le vecteur propre \vec{v}_3 et dont la raideur est égale à $1/S_3$. L'approximation est évidemment beaucoup moins bonne pour les zones rigides mais elles sont naturellement moins critiques pour le

broutement que les parties flexibles de la pièce.

Avec cette simplification, le critère de broutement (126) peut alors être appliqué à chaque noeud. Il suffit de remplacer le terme de raideur par $1/S_3$, soit

$$b_{\text{lim}} = \frac{2 \xi (\xi + 1)}{S_3 k_d u} \quad (128)$$

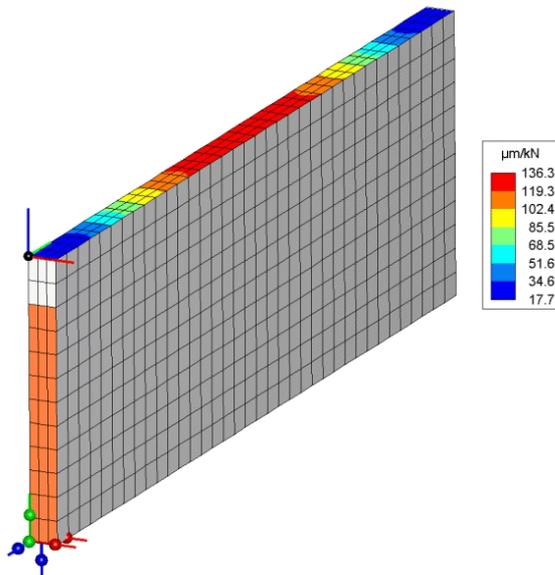


Figure 168 : plus grands termes de flexibilité (S_3)

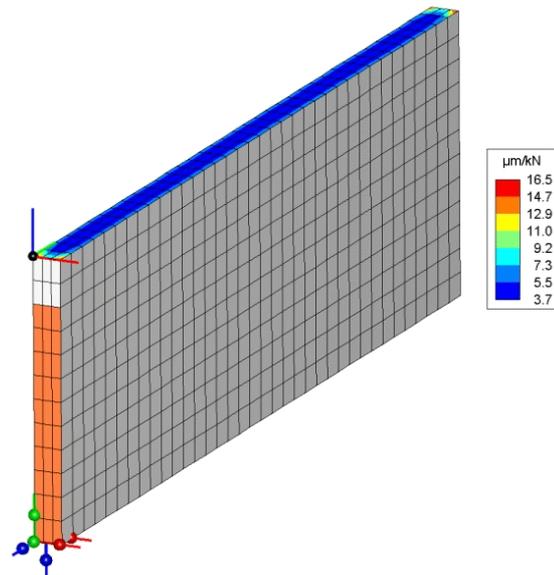


Figure 169 : 2nd plus grands termes de flexibilité (S_3)

En fraisage, cette approche n'est valable que pour le broutement de *parois minces* sur lesquelles *une seule dent est en prise à un instant donné*. En effet, nous considérons ici un modèle ponctuel dans lequel chaque noeud est excité par la seule force appliquée en ce noeud. Pour l'exemple de la figure 168, si deux plaquettes sont en prise au même moment, chacune a un effet sur l'amplitude de vibration au point d'application de l'autre. Il y a un *couplage* entre les dents en prise, ce qui requiert le calcul de la *forme du mode propre de vibration* et l'adoption d'une méthode de calcul plus complexe.

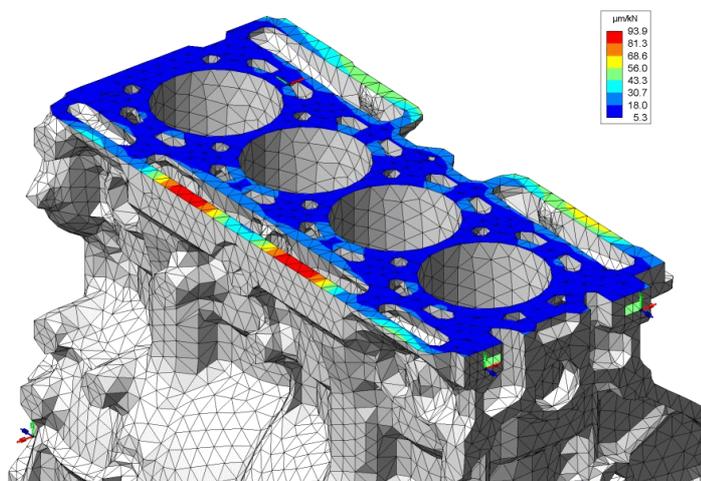


Figure 170 : flexibilité de la surface usinée d'un carter-cylindres D4 (termes S_3)

Néanmoins, le modèle adopté reste valable lorsque plusieurs parois minces de la pièce sont sollicitées au même moment pour autant que les modes de vibration de ces parois soient découplés. Pour un carter-cylindres, plusieurs baignoires d'huile peuvent être excitées simultanément mais chacune présente un mode de vibration indépendant des autres, comme le suggère la carte de flexibilité de la figure 170.

5.2.2. Méthode de calcul

En pratique, on règle plutôt la profondeur de passe a que la largeur de coupe b . La formule (128) devient

$$a_{\text{lim}} = \frac{2\xi(\xi + 1)}{S_3 k_d u} \sin \kappa_r \quad (129)$$

où κ_r est l'angle de direction d'arête principale. La *carte de broutement* est obtenue en évaluant la profondeur de passe limite a_{lim} en chaque noeud de la surface usinée. L'amortissement est supposé constant. Les grandeurs qui varient d'un noeud à l'autre de la surface usinée sont donc :

- la flexibilité S_3 ,
- la raideur de coupe dynamique k_d ,
- le coefficient directionnel u .

Calcul de la raideur de coupe dynamique

Lors des vibrations du système, la largeur de coupe b est supposée constante. Seule l'épaisseur de coupe h oscille autour de sa valeur moyenne h_m . La raideur de coupe dynamique est obtenue en réalisant un développement au premier ordre de l'effort de coupe autour de h_m , soit

$$\tilde{F}(h) \approx \tilde{F}(h_m) + \left. \frac{\partial \tilde{F}(h)}{\partial h} \right|_{h=h_m} (h - h_m) = \tilde{F}(h_m) + k_d (h - h_m) \quad (130)$$

où \tilde{F} est l'effort de coupe divisé par la largeur de coupe b (figure 171).

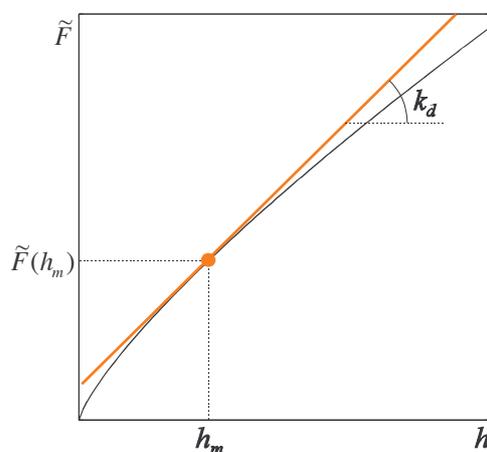


Figure 171 : développement au premier ordre de \tilde{F}

L'effort total est décomposé selon trois directions, soit

$$\vec{F} = F_c \vec{u}_c + F_f \vec{u}_f + F_p \vec{u}_p \quad (131)$$

où \vec{u}_c , \vec{u}_f et \vec{u}_p sont respectivement les directions de la force de coupe F_c , de la force d'avance F_f et de la force passive F_p . Selon le modèle de forces de coupe utilisé, le calcul de la raideur de coupe est sensiblement différent. Prenons tout d'abord le cas d'un modèle à exposants comme celui de Kienzle. Chaque composante de l'effort total est de la forme

$$F_i = b h^{1-m_i} k_{i1.1} \quad (i = c, f, p) \quad (132)$$

La raideur de coupe selon chaque direction est égale à la dérivée première de chaque composante en h_m , soit

$$k_{di} = \left. \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial h} \right|_{h=h_m} = k_{i1.1} (1-m_i) h_m^{-m_i} \quad (i = c, f, p) \quad (133)$$

La raideur de coupe totale est donnée par

$$k_d = \left| k_{dc} \vec{u}_c + k_{df} \vec{u}_f + k_{dp} \vec{u}_p \right| \quad (134)$$

Pour le modèle de Gu *et al.*, si l'on considère un modèle à exposant pour la pression normale K_n et la pression de frottement K_f , on obtient des expressions semblables au modèle de Kienzle.

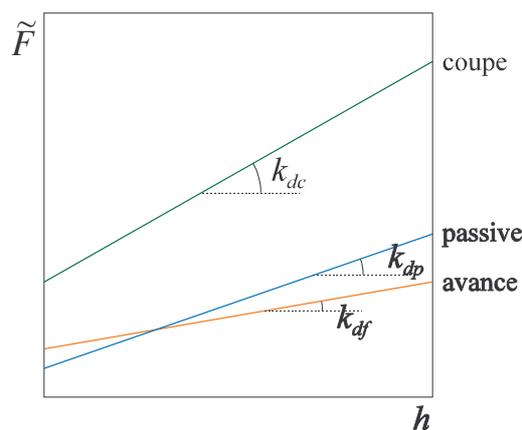


Figure 172 : évolution linéaire des efforts de coupe avec l'épaisseur de coupe

Par contre, avec un modèle de forces affines de l'épaisseur de coupe, les forces varient linéairement avec l'épaisseur. Par conséquent, les raideurs de coupe k_{di} sont égales à la pente de chaque droite (figure 172). Si les pressions K_n et K_f sont de la forme

$$\begin{cases} K_n = [C_{1n} + \frac{C_{2n}}{h}] C_n^* (\gamma_n, v) \\ K_f = [C_{1f} + \frac{C_{2f}}{h}] C_f^* (\gamma_n, v) \end{cases} \quad (135)$$

où $C_i^* (\gamma_n, v)$ sont les facteurs qui dépendent de l'angle de coupe normal γ_n et de la vitesse de coupe v (équation 34, chapitre 2.3), les raideurs de coupe selon les trois directions sont données par

$$\begin{cases} k_{dc} = C_{1n} C_n^* \cos \gamma_p \cos \gamma_n + C_{1n} C_f^* (\sin \kappa_{re} \sin \gamma_n + \cos \kappa_{re} \sin \gamma_p) \\ k_{df} = -C_{1n} C_n^* \cos \gamma_p \sin \gamma_n + C_{1n} C_f^* \sin \kappa_{re} \cos \gamma_n \\ k_{dp} = -C_{1n} C_n^* \sin \gamma_p + C_{1n} C_f^* \cos \kappa_{re} \cos \gamma_p \end{cases} \quad (136)$$

et la raideur de coupe totale par l'équation (134). Contrairement au cas du modèle de Kienzle, la raideur de coupe ne dépend pas de l'épaisseur de coupe moyenne h_m .

En pratique, on ne dispose souvent que des données fournies par le fabricant d'outils, c'est-à-dire la pression de coupe $k_{c1.1}$ et l'exposant de coupe m_c , ce qui ne permet de calculer que la force de coupe F_c . En considérant un coefficient de frottement μ , on peut estimer la force tangentielle F_t par

$$\vec{F}_t = \mu |F_c| \vec{u}_t = \mu k_{c1.1} b h^{1-m_c} \vec{u}_t \quad (137)$$

où \vec{u}_t est la direction définie par l'angle de direction d'arête apparent κ_{re} . La force tangentielle F_t est plus ou moins perpendiculaire à la force de coupe, pour autant que les angles γ_n et λ_s soient petits en valeurs absolues. Par conséquent, la raideur de coupe est donnée par

$$k_d = k_{c1.1} (1 - m_c) h_m^{-m_c} \sqrt{1 + \mu^2} \quad (138)$$

Le coefficient de frottement μ est situé dans une fourchette allant de 0.4 à 0.6 pour une épaisseur de coupe h_m supérieure à 0.2 mm. Ceci est évidemment une méthode très approchée mais elle donne tout de même une assez bonne estimation de la raideur de coupe.

Calcul du coefficient directionnel

D'après le schéma utilisé par Tlustý (figure 164), le coefficient directionnel vaut $\cos \alpha \cos (\alpha - \beta)$. Les angles α et β sont respectivement les inclinaisons de la direction de vibration \vec{u}_v et de la direction de l'effort de coupe \vec{u}_F par rapport à la normale à la surface coupée, notée \vec{u}_n . Si la coupe se fait principalement sur la portion rectiligne de l'arête de coupe (grande profondeur de passe et/ou petit rayon de bec), on peut considérer que la direction \vec{u}_n est définie dans le plan de référence P_r par

$$\vec{u}_n = -\vec{u}_f \sin \kappa_r + \vec{u}_p \cos \kappa_r \quad (139)$$

où κ_r est l'angle de direction d'arête de l'outil. Pour des plaquettes rondes ou lorsque la coupe se fait sur

la partie arrondie de l'arête de coupe, on considère la direction normale à la corde qui va d'une extrémité à l'autre de l'arête de coupe en prise (figure 173), ce qui correspond à l'angle de direction d'arête apparent κ_{re} . Le vecteur \vec{u}_n est alors calculé par l'équation (139) en remplaçant κ_r par κ_{re} .

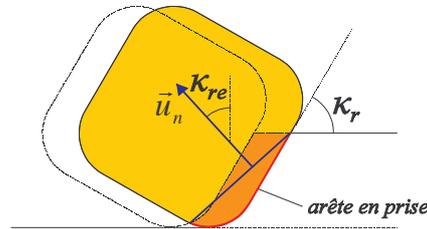


Figure 173 : direction \vec{u}_n

La direction de l'effort de coupe total \vec{u}_n est définie par

$$\vec{u}_F = \frac{\vec{F}_c + \vec{F}_f + \vec{F}_p}{|\vec{F}_c + \vec{F}_f + \vec{F}_p|} = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} \quad (140)$$

où les forces de coupe F_c , F_f et F_p sont calculées par une des méthodes décrites auparavant. Les directions de ces efforts sont les directions classiques de coupe, d'avance et passive. La direction de vibration \vec{u}_v est donnée par le vecteur propre \vec{v}_3 associé au terme de plus grande flexibilité S_3 .

Enfin, le coefficient directionnel est calculé par

$$u = \cos \alpha \cos(\alpha - \beta) = (\vec{u}_F \cdot \vec{u}_n) (\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_n) \quad (141)$$

Tous les vecteurs sont définis selon les axes locaux de la surface usinée. Pour toutes les opérations excepté le fraisage, nous choisissons toujours des axes locaux correspondant aux directions principales de coupe \vec{u}_c , \vec{u}_f et \vec{u}_p .

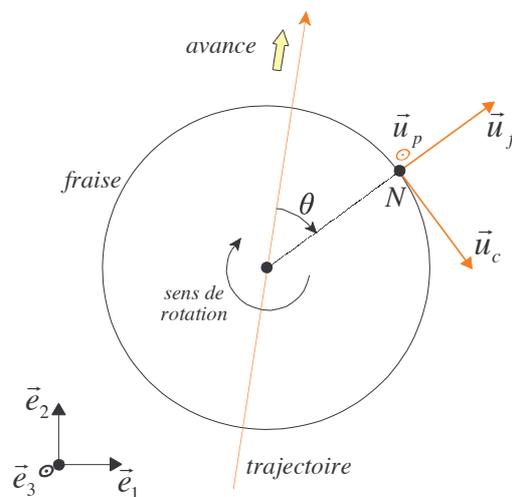


Figure 174 : directions de coupe en fraisage

En fraisage, le système d'axes est constitué des deux axes \vec{e}_1 et \vec{e}_2 dans le plan de la surface usinée et de l'axe \vec{e}_3 normal à la surface et pointant vers l'extérieur de la pièce. La direction de plus grande flexibilité \vec{v}_3 est définie selon ce système d'axes. Par contre, les vecteurs \vec{u}_F et \vec{u}_n sont définis par rapport aux trois directions principales de coupe qui varient avec la position du noeud considéré.

On doit dès lors définir les directions \vec{u}_c , \vec{u}_f et \vec{u}_p en fonction de la trajectoire, du diamètre de la fraise et de la position du noeud N (figure 174). Une fois ces trois vecteurs obtenus, on utilise alors l'équation (140) pour définir la direction de l'effort total de coupe \vec{u}_F et l'équation (139) pour définir la direction normale à la surface coupée \vec{u}_n .

5.2.3. Discussion

A l'heure actuelle, les concepteurs de gammes ne disposent d'aucun moyen pour analyser les risques de broutement. La méthode que nous proposons a le mérite de fournir des indications utiles sur ces risques et sur le réglage le plus approprié des paramètres d'usinage (trajectoire, géométrie de coupe, ...). Rappelons qu'un tel outil d'analyse est sensé être utilisé lors de la phase de pré-production, au cours de laquelle seuls des modèles numériques des pièces sont disponibles. Certains paramètres comme l'amortissement ou les forces de coupe ne peuvent être mesurés et l'on doit donc se contenter de valeurs *estimées*. Dans ce cadre, l'intérêt d'un outil d'analyse est de donner des tendances réalistes. Nous avons pu vérifier sur un cas réel que le modèle adopté donnait des résultats corrects. Il s'agissait de l'ébauche de la face 500 d'un carter-cylindres, décrite en détail au chapitre 6.

L'avantage de la méthode développée est de fournir une solution immédiate car elle ne requiert aucun calcul lourd, mis à part celui de la matrice de souplesse S . La carte de broutement permet de visualiser sur la surface usinée les zones à risque. Comme son évaluation est quasiment instantanée, on peut déterminer de manière interactive le meilleur réglage de l'opération : trajectoire de l'outil, sens de rotation, géométrie des plaquettes, ... La figure 175 illustre la carte de broutement d'une paroi mince encastrée sur son pourtour et usinée avec une fraise de 80 mm dont la trajectoire est décalée de 10 mm par rapport au bord de la pièce. La profondeur de passe maximale est égale à 0.71 mm au milieu de la surface usinée.

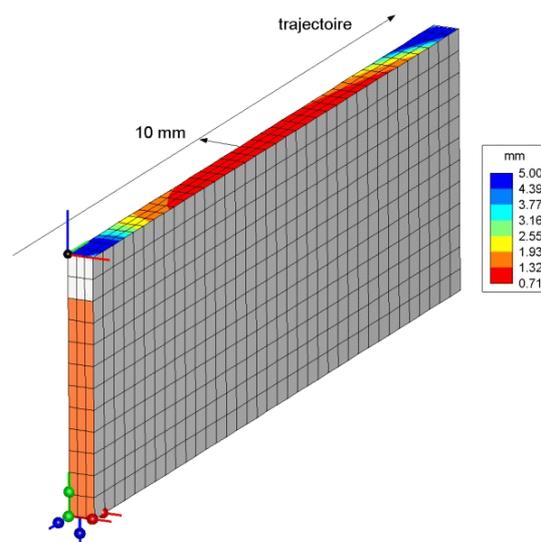


Figure 175 : carte de broutement pour une trajectoire décalée de 10 mm à gauche de la pièce

On peut tracer aisément l'évolution de la profondeur de passe limite a_{lim} en fonction du décalage de la trajectoire (figure 176). C'est pour une trajectoire centrée sur la pièce que la profondeur de passe limite est la plus grande. Pour une trajectoire décentrée, il vaut mieux que l'outil se trouve à droite de la plaque dans le sens d'avance (décalage positif) plutôt qu'à gauche. La trajectoire de l'outil joue un grand rôle vis-à-vis du broutement car l'orientation des forces varie énormément selon la position de l'outil par rapport à la pièce : lorsque la fraise se trouve à gauche, l'effort total F est quasiment normal à la plaque, ce qui favorise le broutement; lorsqu'elle se trouve à droite, la force F est plus orientée selon le plan moyen de la plaque.

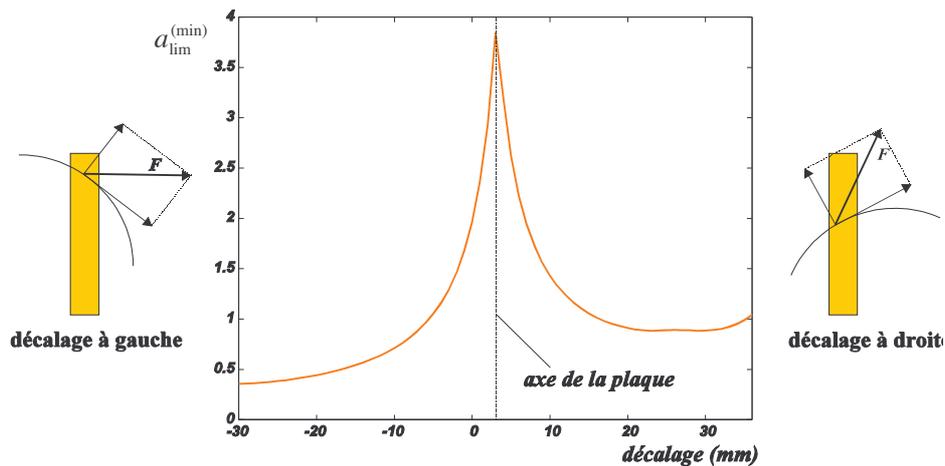


Figure 176 : influence du décalage de la trajectoire sur la profondeur de passe limite

La géométrie de l'outil, spécialement l'angle de direction d'arête κ_r , a également une grande influence sur le broutement, car elle modifie à la fois l'orientation de l'effort total de coupe et celle de la surface coupée. On peut également modifier la configuration du bridage de la pièce, ce qui demande une nouvelle inversion de la matrice de raideur du superélément. La figure 177 illustre le cas de la plaque sur laquelle on a disposé un appui anti-poussée. La profondeur de passe maximum atteinte dans ce cas 1.63 mm au lieu des 0.71 mm obtenus sans appui anti-poussée.

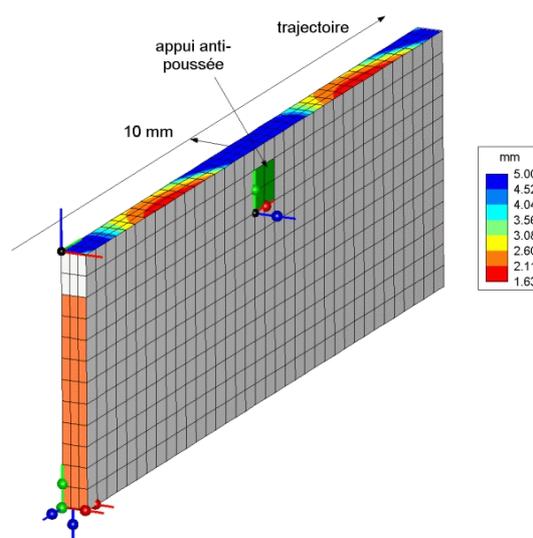


Figure 177 : influence d'un appui anti-poussée sur la profondeur de passe limite

6. Applications

En premier lieu, nous présentons le logiciel d'analyse qui a été écrit durant ce travail. Toutes les étapes de la simulation y sont intégrées ainsi que des outils graphiques permettant de visualiser et d'analyser les résultats. Nous illustrons l'utilisation de ce logiciel sur quelques applications. La première porte sur le chariotage d'un barreau cylindrique monté entre pointes. Pour ce type de pièce, nous disposons d'un modèle analytique qui intègre l'effet de l'enlèvement de matière, ce qui permet de quantifier l'erreur commise dans la modélisation par éléments finis. L'influence du bridage est mise en évidence sur le cas d'un carter de boîte de vitesses en analysant différentes configurations des points de fixation de la pièce. Sur le fraisage d'un collecteur d'échappements, plusieurs aspects sont étudiés : nombre de dents en prise, trajectoire de l'outil et défaut dû aux imperfections des surfaces d'appuis. Ce dernier point est également étudié dans le cas d'un disque de frein et dans celui d'un tambour de frein. Pour celui-ci, le dispositif de serrage est très souple, ce qui nécessite son intégration dans le modèle d'éléments finis. Enfin, la dernière application décrit un cas réel de broutement et la solution mise en oeuvre pour y remédier. Pour cette application, des mesures ont montré que la méthode d'analyse du broutement développée dans ce travail donnait des résultats cohérents.

6.1. Description du logiciel développé

Au cours de ce travail, nous avons développé un logiciel *complet* permettant de réaliser des simulations d'usinage à partir d'un modèle d'éléments finis standard. L'interface graphique (figure 178) a été écrite en langage MATLAB car c'est un langage disposant de nombreuses possibilités graphiques (menus, boutons, visualisations 3D, ...). Par contre, MATLAB est un langage interprété, qui est par conséquent mal adapté aux calculs lourds. Dès lors, toute la partie *calcul* du logiciel (inversion, résolution) a été écrite en FORTRAN 90.

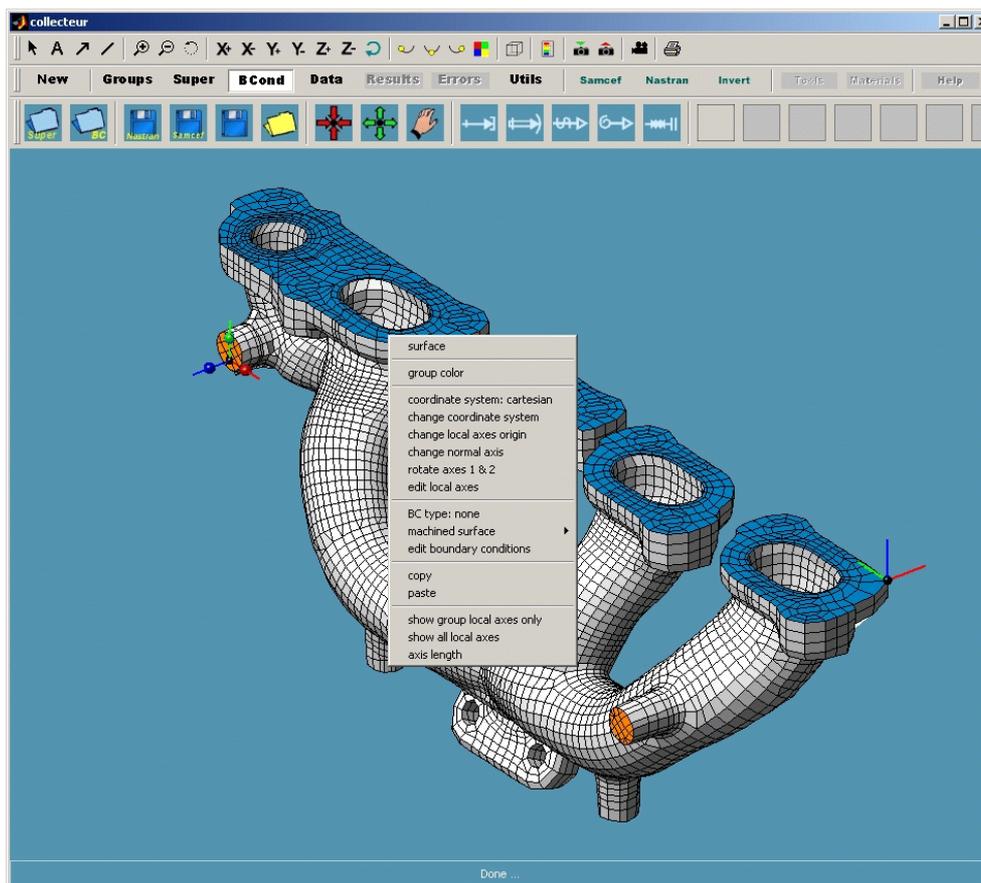


Figure 178 : interface graphique du logiciel développé

Le logiciel dispose de toutes les fonctions nécessaires pour la modélisation du système et l'analyse des résultats. Il est organisé en modules qui permettent de réaliser les différentes étapes du calcul :

- création de groupes de noeuds en vue de la création du superélément et de la définition des

- conditions aux limites (appuis, serrage, ...),
- écriture des fichiers de création d'un superélément pour SAMCEF ou pour NASTRAN et lancement du code d'éléments finis en tâche de fond,
- lecture de la matrice de raideur condensée, définition des axes locaux et des conditions aux limites et calcul de la matrice de flexibilité,
- définition des paramètres d'usinage (trajectoire, conditions de coupe, géométrie de l'outil, ...) et calcul de la forme de la surface usinée,
- analyse des résultats obtenus par EF (erreurs de forme, d'orientation, ...),
- calcul d'une carte de broutement de la surface usinée.

L'avantage d'une telle interface graphique est qu'elle est bien adaptée aux spécificités du problème : on ne visualise que la peau du modèle d'éléments finis et les résultats ne sont affichés que sur la ou les surface(s) usinée(s). De plus, le langage MATLAB permet de développer des procédures *interactives* comme par exemple modifier la trajectoire et visualiser instantanément son effet sur la carte de broutement.

Grâce à l'interface graphique et au soin apporté à la rapidité du calcul, ce logiciel s'avère parfaitement bien adapté à une utilisation en milieu industriel.

6.2. Chariotage d'un barreau

6.2.1. Présentation

La première application est le chariotage d'un barreau cylindrique en acier monté entre pointes. La longueur du barreau est de 150 mm et son diamètre initial est de 20 mm. La profondeur de passe est de 2.5 mm. Le but de cette application est de comparer le résultat du calcul numérique à la solution analytique décrite au premier chapitre. On vérifiera également l'effet de *l'enlèvement de matière* sur le défaut obtenu grâce au modèle analytique développé par Debongnie [deb94]. Notons que, sur un barreau aussi élancé, on utilise normalement une lunette-à-suivre (figure 179) qui se déplace avec l'outil et qui permet d'annuler quasiment toute déformation de la pièce.

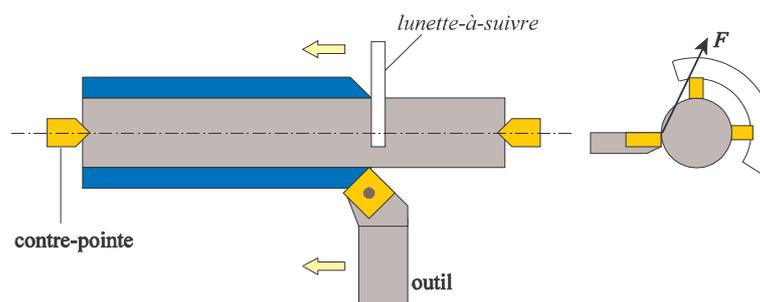


Figure 179 : montage entre pointes avec une lunette-à-suivre

Le maillage est constitué d'éléments à 6 ou 8 noeuds du premier degré. C'est un modèle de petite taille qui comporte 810 éléments et 880 noeuds. Le module de Young est de 210000 MPa et le coefficient de Poisson est égal à 0.29. La géométrie du modèle est celle de la pièce finie.

6.2.2. Modélisation et simulation

La première étape est de sélectionner les surfaces de la pièce. Pour la surface usinée, on crée un groupe de faces comprenant les faces sur la surface cylindrique de la pièce. Pour les deux contre-pointes, on sélectionne une couronne de faces sur l'axe de la pièce (figure 180).

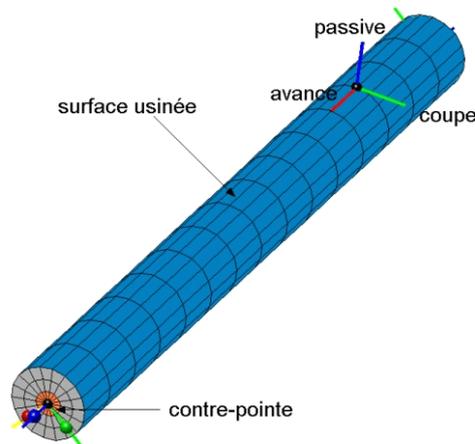


Figure 180 : maillage du barreau cylindrique, noeuds retenus dans le superélément et axes locaux

Ensuite, on crée le superélément, ce qui prend environ une dizaine de secondes pour un modèle de cette taille¹². Pour la surface usinée, les axes locaux des noeuds sont définis dans un système d'axes cylindriques. Le troisième axe est l'axe normal à la surface (en bleu). Pour les deux contre-pointes, les déplacements sont fixés. L'inversion de la matrice de raideur du superélément prend environ deux secondes.

Une fois la matrice inversée, nous pouvons déjà visualiser les cartes de souplesse de la surface usinée. La pièce est évidemment la plus souple selon la direction radiale. Les termes S_{33} des sous-matrices diagonales de la matrice de flexibilité S sont représentés à la figure 181. Physiquement, chaque terme correspond au déplacement normal à la surface pour une force de 1000 N appliquée selon la direction normale (axe local en bleu). La souplesse selon la direction d'avance (figure 182) est environ 12 fois plus faible tandis que la souplesse selon la direction de coupe est négligeable.

Pour calculer les forces de coupe, on choisit les caractéristiques suivantes :

- acier Ck45
- avance par tour : 0.5 mm
- vitesse de coupe : 100 m/min
- angles d'outil : $\kappa_r = 45^\circ$, $\gamma_n = -6^\circ$, $\lambda_s = -6^\circ$
- rayon de bec : 0.8 mm

¹² Pour toutes les applications, une machine plus récente que celle décrite au chapitre 3 a été utilisée (Pentium 4 3.0 GHz avec 2Gb de mémoire physique).

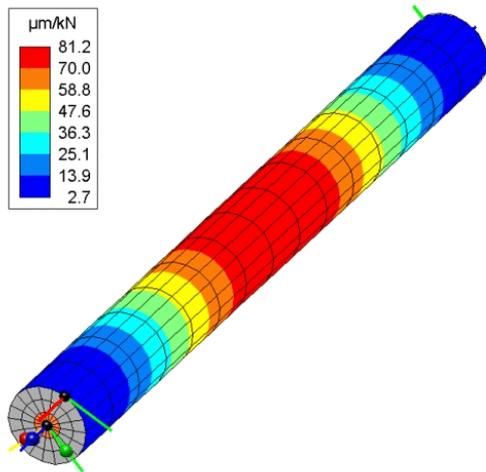


Figure 181 : carte de souplesse (direction normale)

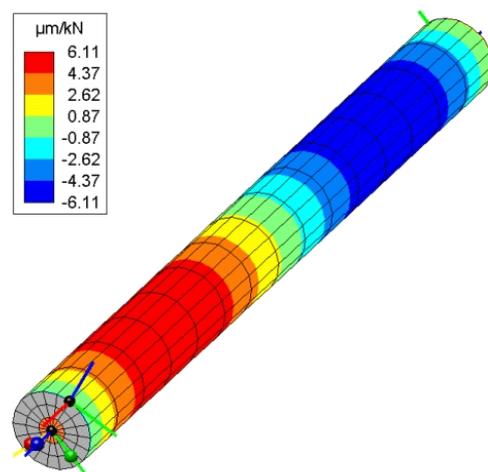
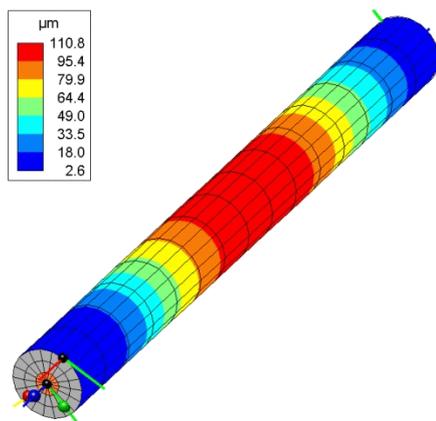
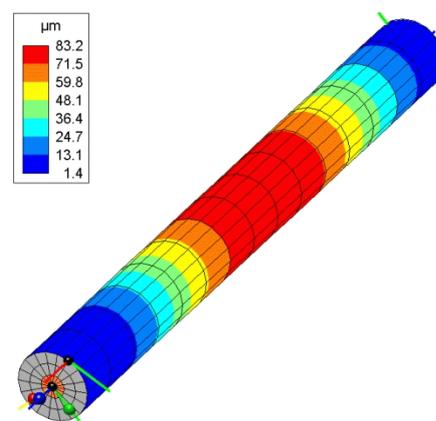


Figure 182 : carte de souplesse (direction d'avance)

En utilisant le modèle de Gu et les paramètres déterminés pour cet acier au chapitre 2.3, on obtient une pression de coupe normale K_n de 2556 MPa et une pression de frottement K_f de 918 MPa. Pour cette géométrie de coupe, l'angle de direction d'arête apparent κ_{re} est égal à 38.6° , en considérant une pression de frottement constante, et l'aire de coupe est égale à 1.243 mm^2 . Les forces de coupe valent :

- force de coupe : $F_c = 2920 \text{ N}$
- force d'avance : $F_f = 1037 \text{ N}$
- force passive : $F_p = 1350 \text{ N}$

Le défaut calculé lorsque l'outil de déplace selon la direction d'avance (axe rouge sur la figure 180) est illustré à la figure 183. On remarque que le défaut a exactement la même allure que la carte de souplesse de la figure 181, ce qui montre que, dans ce cas, la force passive est largement prédominante. L'amplitude du défaut est environ égale à 1.35 fois la souplesse, ce qui correspond bien à $F_p / 1000$. La force d'avance a très peu d'effet sur l'amplitude du défaut, mis à part un léger déplacement du défaut maximum par rapport au milieu du barreau.

Figure 183 : défaut obtenu avec κ_r égal à 45° Figure 184 : défaut obtenu avec κ_r égal à 75°

Pour diminuer le défaut sans modifier les conditions de coupe, on peut utiliser un outil avec un angle d'attaque κ_r plus grand, ce qui a pour effet de diminuer la force passive et d'augmenter la force d'avance. Pour un angle d'attaque de 75° et des conditions de coupe identiques, l'angle de direction d'arête apparent

κ_{re} est égal à 58° et l'aire de coupe est quasiment inchangée. Les forces de coupe valent dans ce cas :

- force de coupe : $F_c = 2955$ N
- force d'avance : $F_f = 1292$ N
- force passive : $F_p = 1006$ N

Le défaut tombe à $80 \mu\text{m}$ environ (figure 184). Pour diminuer encore le défaut, on peut par exemple utiliser un outil avec un rayon de bec plus petit, ce qui donne un angle de direction d'arête apparent κ_{re} plus grand et, par conséquent, une force passive plus petite.

Pour la force passive correspondant à un angle d'attaque de 45° , le défaut obtenu avec le modèle analytique du premier chapitre est de $182 \mu\text{m}$ environ, à comparer avec les $110.8 \mu\text{m}$ obtenus par simulation. Cette différence s'explique par le fait que, dans le modèle numérique, les deux contre-pointes sont modélisées par un groupe de noeuds fixés, ce qui s'apparente plus à un encastrement qu'à un appui à rotule comme c'est le cas dans le modèle analytique. Si on ne fixe que deux noeuds se trouvant sur l'axe de la pièce (figure 185), on obtient un défaut beaucoup plus proche de la solution analytique.

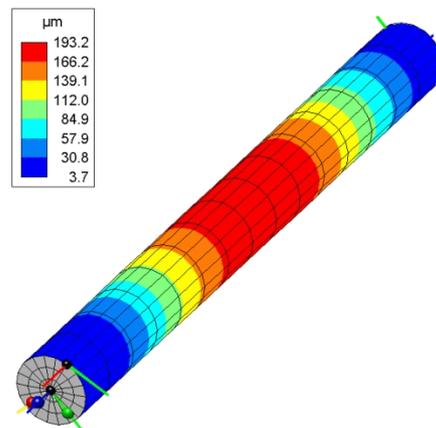


Figure 185 : défaut calculé en fixant uniquement deux noeuds situés sur l'axe de la pièce

6.2.3. Effet de l'enlèvement de matière

Pour ce type d'opération, l'enlèvement de matière provoque une forte diminution de la raideur de la pièce durant l'usinage. L'outil enlève 5 mm sur le diamètre, ce qui représente une diminution de 25% et une différence de raideur entre le barreau initial et le barreau usiné d'environ 70%, étant donné que la raideur est proportionnelle à la quatrième puissance du diamètre.

Le modèle analytique développé par Debongnie prend en compte la variation continue de diamètre durant l'usinage et les effets de la force d'avance F_f et de la force passive F_p . La force d'avance induit au point où se trouve l'outil (figure 186a) un moment concentré qui vaut

$$M_f = F_f \frac{d}{2} \quad (142)$$

où d est le diamètre moyen. Pour les mêmes conditions que celles du premier calcul (figure 183), les

résultats obtenus avec le modèle analytique sont illustrés sur les figures 186b à 186d. Les effets séparés de chacune des deux forces sont illustrés sur les graphiques de droite. Les courbes en pointillés correspondent au défaut calculé respectivement avec le diamètre initial d_1 et le diamètre final d_2 . L'enlèvement de matière a pour effet de décaler le maximum du défaut dans le sens de l'avance, c'est-à-dire de la partie la plus massive du barreau. Le défaut dû à la force passive en tenant compte de l'enlèvement de matière se trouve en tout point du barreau entre les défauts calculés avec les diamètres d_1 et d_2 . Par contre, ce n'est pas le cas pour le défaut dû à la force d'avance.

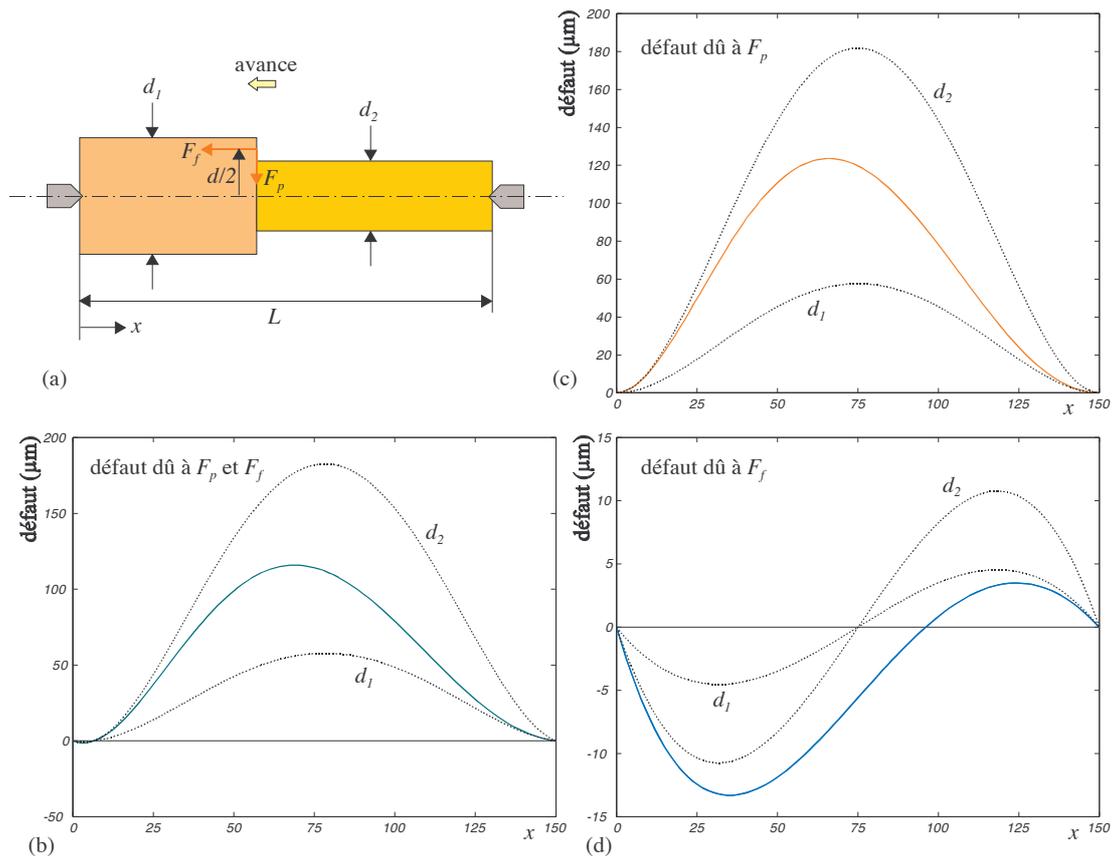


Figure 186 : modèle analytique et défauts calculés

Dans la modélisation par éléments finis, le moyen le plus simple de prendre en compte la diminution de raideur est de faire le calcul sur *deux modèles* correspondant respectivement à la pièce finie et à la pièce brute. En général, on dispose du modèle de la pièce finie. A partir de celui-ci, il est facile d'ajouter une ou plusieurs couches d'éléments de façon à obtenir la géométrie de la pièce brute (figure 187a).

Les défauts calculés par éléments finis sur les deux modèles sont illustrés à la figure 187b. Ces deux résultats correspondent en quelque sorte aux *bornes inférieure et supérieure* du défaut réel. De fait, la moyenne des deux solutions obtenues par éléments finis est très proche de la solution analytique.

Pour les applications où la profondeur de passe est grande par rapport à l'épaisseur de la pièce, cette solution est facile à obtenir et relativement peu coûteuse par rapport à des méthodes de remaillage comme celles décrites au chapitre 2.1. En pratique, pour les applications du domaine automobile, on rencontre très rarement des cas où l'effet de l'enlèvement de matière est aussi important.

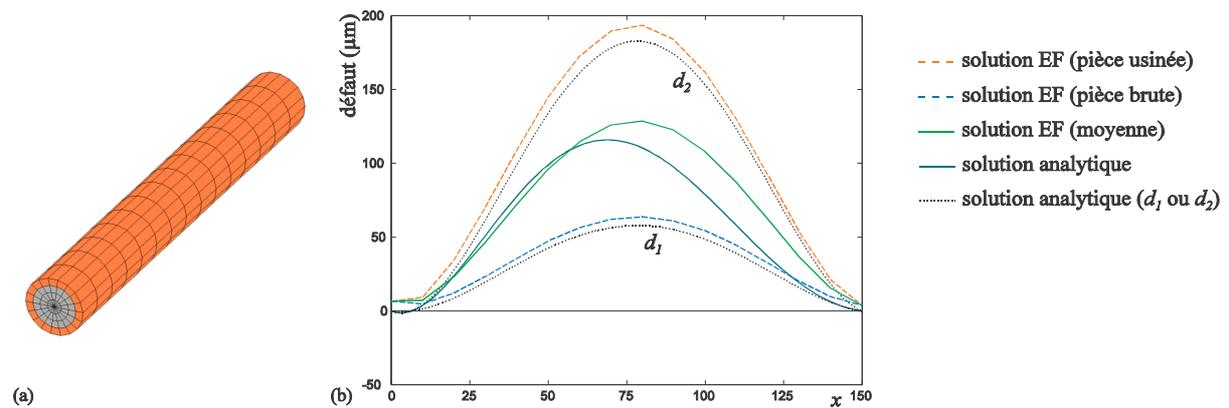


Figure 187 : obtention du maillage de la pièce brute par extrusion (a) et comparaison entre les solutions analytiques et celles obtenues par éléments finis (b)

6.3. Carter de boîte de vitesses

6.3.1. Présentation

Sur le carter de boîte de vitesses présenté à la figure 188, trois *oreilles* sont réalisées en fonderie de manière à fixer la pièce durant l'usinage. Au niveau du bureau d'études, le choix de la position de ces trois points de fixation est opéré en tenant compte de plusieurs contraintes : encombrement, appareillages divers (circuit hydraulique, circuit électrique, ...). En général, l'influence de la disposition des points de fixation sur la rigidité de la pièce bridée est rarement prise en compte.

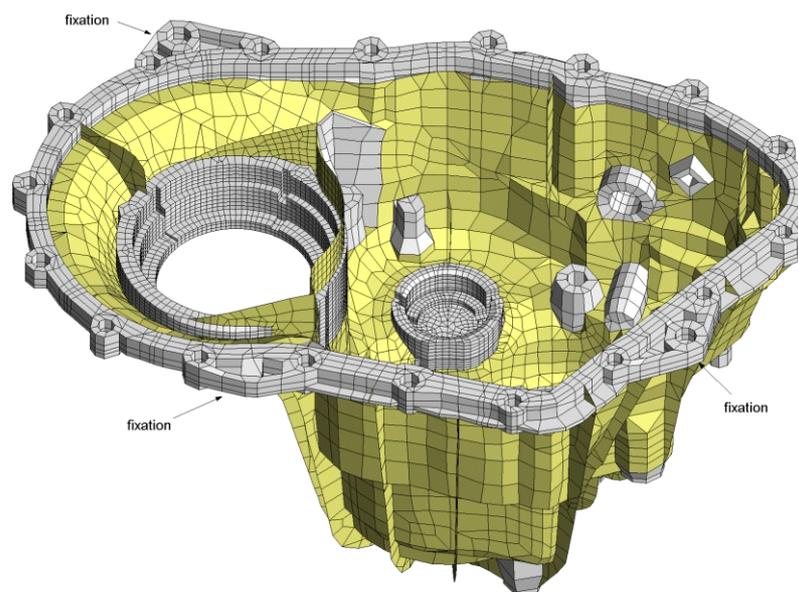


Figure 188 : carter de boîte de vitesses PK6 (RENAULT) et oreilles de fixation

Les zones de la pièce qui se trouvent en dehors du triangle formé par les trois points d'appui sont très peu rigides. Sur des pièces aussi souples, les tolérances sont extrêmement difficiles à tenir. Pour faire

accepter une modification de la position des *oreilles*, le bureau des méthodes doit pouvoir justifier l'amélioration qui en découlerait. Pour cela, il est indispensable de recourir à la simulation, car autrement il est impossible de quantifier les effets d'une nouvelle configuration du bridage. Nous nous proposons ici de rechercher une meilleure disposition des points de fixation.

6.3.2. Résultats

Le carter est en alliage d'aluminium ($E = 75000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.33$). Il présente un grand nombre de parois minces. Dès lors, le maillage comporte des éléments volumiques pour les parties massives et des éléments de coques pour les voiles minces (en jaune sur la figure 188). Pour tester plusieurs dispositions des points d'appui, nous avons créé un superélément en conservant un certain nombre de zones de serrage possibles qui sont coloriées en orange sur la figure 189. Les zones de fixation originales sont coloriées en vert.

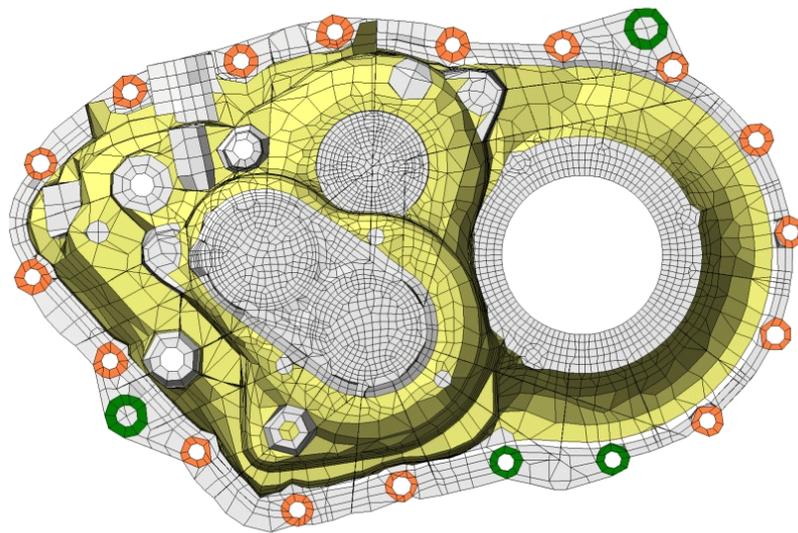


Figure 189 : points de fixation possibles; le carter est vu d'en bas

Afin de pouvoir comparer la rigidité de la pièce bridée pour chaque configuration, nous comparons la carte de souplesse de la surface usinée correspondant au terme de plus grande flexibilité, c'est-à-dire le terme S_3 défini au chapitre 5.2.1. Pour la configuration originale du bridage (figure 190), deux zones sont très en porte-à-faux par rapport aux supports. Par conséquent, elles présentent une très grande flexibilité (jusqu'à $391 \mu\text{m/kN}$).

On peut imaginer un certain nombre de configurations possibles. Nous en avons testé deux. Si l'on déplace un des supports vers l'extrémité droite de la pièce (figure 191), la flexibilité diminue de manière très importante : $236 \mu\text{m/kN}$. Si en plus l'on déplace le support inférieur vers la gauche (figure 192), la flexibilité atteint $200 \mu\text{m/kN}$, ce qui correspond à la moitié de celle du bridage original.

Pour cette application, nous n'avons comparé l'effet du bridage que sur la souplesse au niveau de la surface usinée. En pratique, on peut visualiser cet effet sur plusieurs surfaces à la fois. Par exemple, pour le carter, on pourrait également prendre en compte les alésages qui permettent de fixer les roulements des axes de la boîte de vitesses. L'intérêt d'un schéma de résolution adapté (superélément et inversion) est bien mis en évidence : l'obtention de la carte de souplesse pour une configuration du bridage ne requiert qu'une minute de calcul environ, ce qui permet d'effectuer de nombreux tests et de se faire ainsi une idée précise des améliorations à apporter. De plus, lors des discussions entre le bureau d'études et celui des méthodes, la possibilité de *quantifier* l'influence d'une modification de la pièce ajoute beaucoup de poids aux arguments de ce dernier.

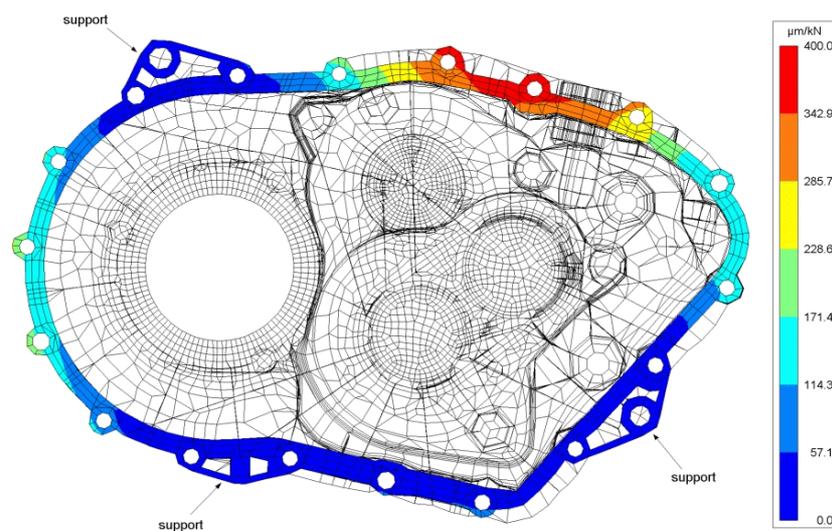


Figure 190 : configuration originale du bridage (pièce vue d'en haut)

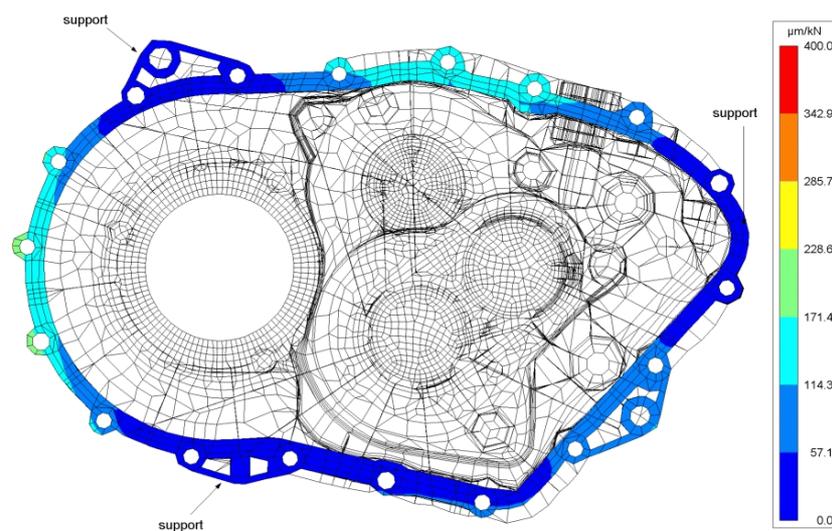


Figure 191 : configuration du bridage n°1

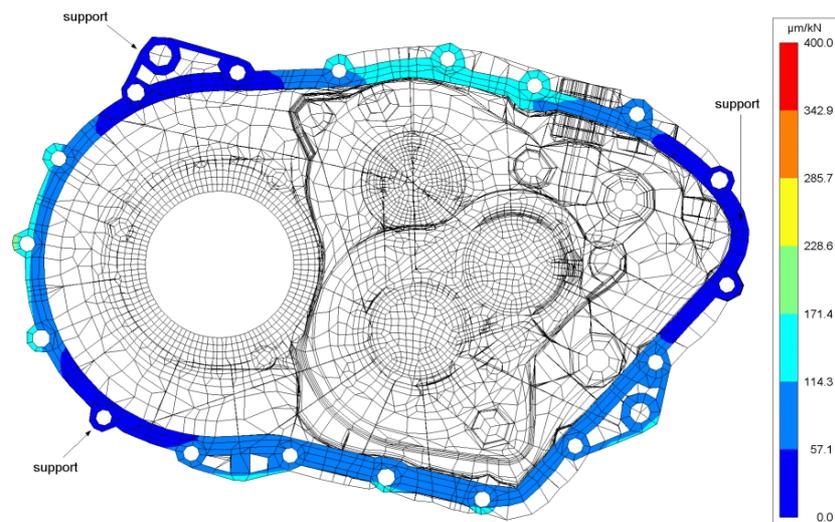


Figure 192 : configuration du bridage n°2

6.4. Collecteur d'échappements

6.4.1. Présentation

Le collecteur d'échappements (RENAULT) est illustré à la figure 193. Il est fixé en cinq points par des couples bride/support et supporté par cinq appuis anti-poussée. La face d'accouplement avec la culasse est fraisée en bout. Le but de cette application est de montrer :

- l'influence de l'outil,
- celle de la trajectoire,
- l'effet d'un posage hyperstatique.

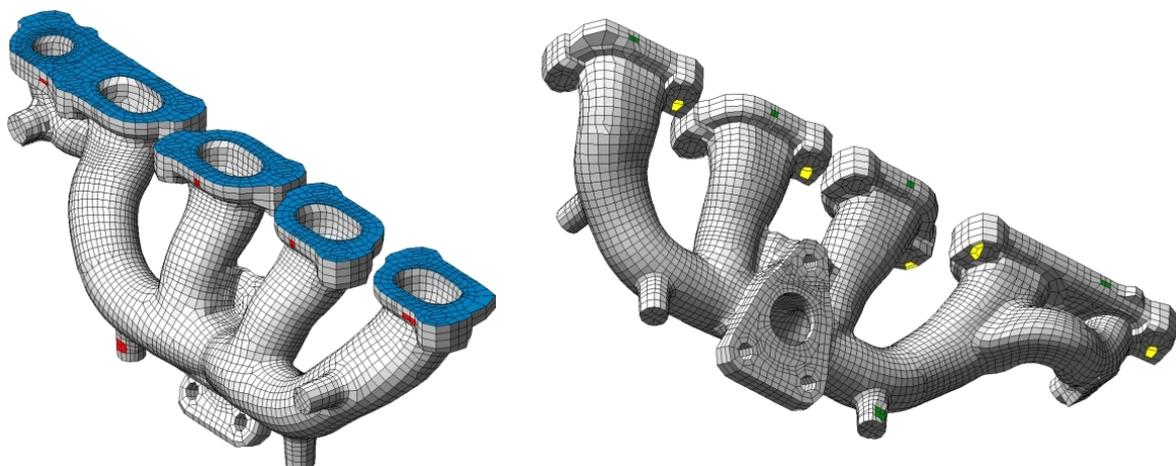


Figure 193 : maillage du carter et zones de fixation; brides en rouge, supports en vert et appuis anti-poussée en jaune

6.4.2. Modélisation et calculs

Le collecteur est réalisé en fonte ($E = 165000$ MPa). La création du superélément, qui comprend la surface usinée et les 15 zones de bridage, prend environ 60 secondes. Pour les brides, les supports et les appuis anti-poussée, nous définissons des axes locaux cartésiens où le troisième axe est normal à la surface. Les appuis anti-poussée sont modélisés par des conditions de contact et une raideur selon la direction normale (figure 194). Pour les supports et les brides, on considère des raideurs selon les trois directions.

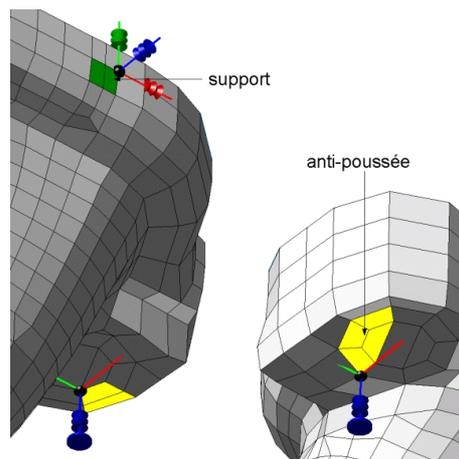


Figure 194 : modélisation des supports et des appuis anti-poussée

L'obtention de la matrice de flexibilité prend environ 90 secondes. La figure 195 illustre la carte de souplesse de la surface usinée. Les zones les plus souples sont celles se trouvant de part et d'autre des lignes joignant la bride au support qui se trouve en vis-à-vis.

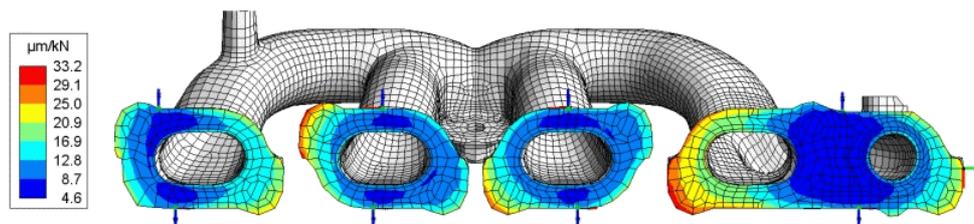


Figure 195 : carte de souplesse de la surface usinée; la plus grand flexibilité de chaque noeud est affichée (cf. chapitre 5)

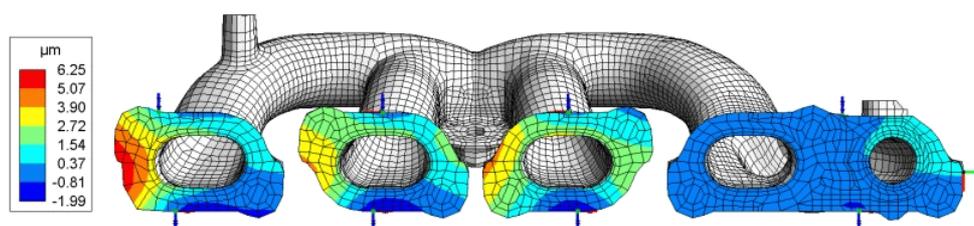


Figure 196 : défaut dû au serrage de la pièce

L'effort de serrage appliqué par chaque bride est de 20000 N. Le défaut imputable au serrage seulement est illustré à la figure 196. Il est relativement peu élevé (environ $8 \mu\text{m}$) étant donné que les brides appuient à peu près en vis-à-vis des supports.

6.4.3. Influence de l'outil

Une fois que la matrice de flexibilité est obtenue, le calcul du défaut de la surface usinée ne demande pas plus de 5 secondes, ce qui permet d'effectuer de nombreux tests. Nous allons d'abord déterminer l'influence de l'outil sur le défaut. L'outil est une fraise de diamètre égal à 200 mm. L'axe de la fraise est dépinçé de 0.3 mm pour 1000 pour ne pas recouper la surface usinée. La profondeur de passe est de 1.5 mm et l'avance par dent de 0.2 mm. Pour calculer les efforts de coupe, on considère une pression spécifique de coupe $k_{c,1}$ de 1900 MPa, un exposant m_c de 0.2 et un coefficient de frottement μ de 0.6.

Dans un premier temps, nous déterminons l'effet du nombre de dents de la fraise sur le chargement de la pièce. La trajectoire de l'outil est centrée sur les conduits d'échappements. Les figures 197 à 201 montrent la *carte du nombre de dents en prise* durant l'usinage pour une fraise comportant de 12 à 28 plaquettes. L'interprétation d'une telle carte est la suivante : la valeur entière affichée en un noeud de la surface usinée indique le nombre de dents qui coupent la matière à cet instant; par exemple, une valeur égale à deux signifie qu'une dent se trouve sur le noeud considéré et qu'une autre dent est également en train de couper la matière.

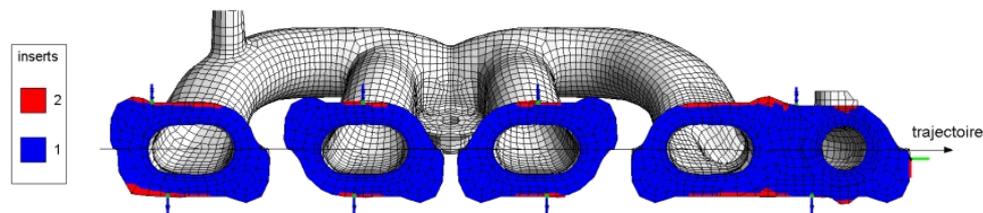


Figure 197 : dents en prise pour une fraise à 12 plaquettes (*insert* en anglais)

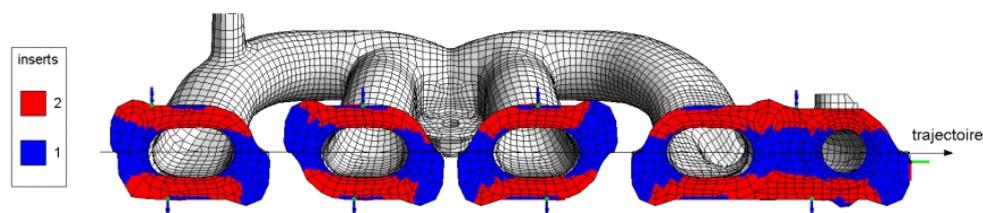


Figure 198 : dents en prise pour une fraise à 16 plaquettes

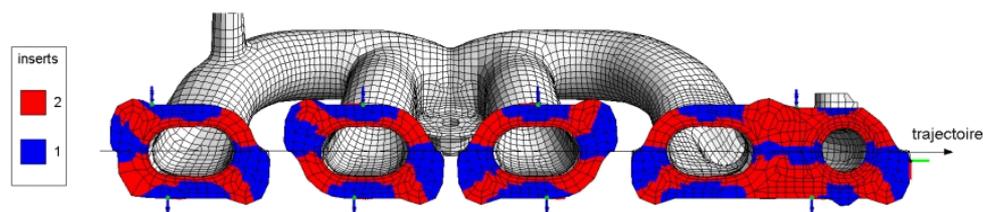


Figure 199 : dents en prise pour une fraise à 20 plaquettes

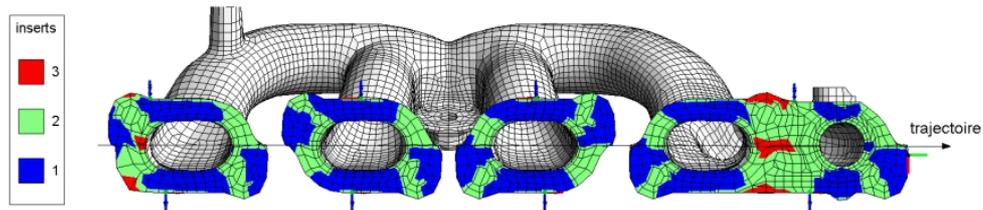


Figure 200 : dents en prise pour une fraise à 24 plaquettes

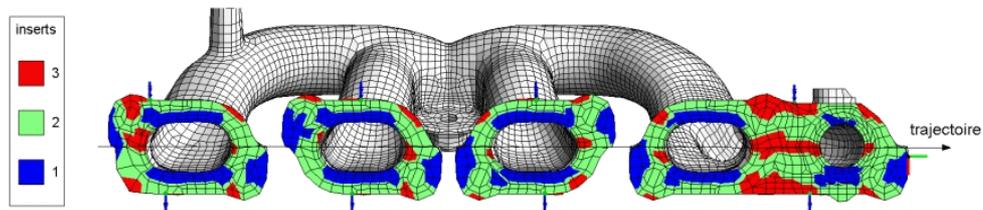


Figure 201 : dents en prise pour une fraise à 28 plaquettes

Pour une fraise à 12 plaquettes, il y a quasiment toujours une seule dent en prise, ce qui signifie que la dent coupe la matière puis sort avant qu'une autre dent n'entre. Cette situation n'est pas idéale car le retour en position continu de la pièce provoque des chocs qui réduisent la durée de vie des plaquettes. Ce cas de figure se produit toujours dans le cas d'une paroi mince sur laquelle une seule dent coupe à la fois. Lorsque le nombre de plaquettes augmente, la zone correspondant à deux dents en prise grandit jusqu'à ce qu'une zone à 3 dents en prise apparaisse pour une fraise à 24 plaquettes.

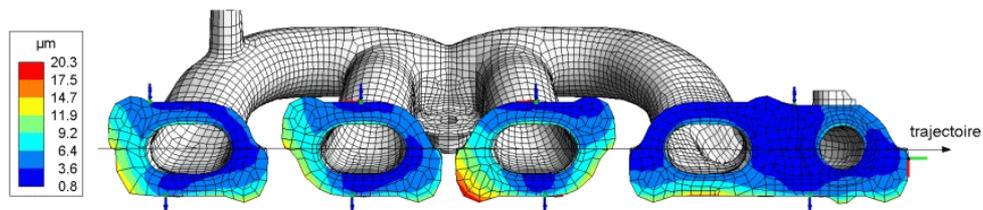


Figure 202 : défaut obtenu avec une fraise à 12 plaquettes

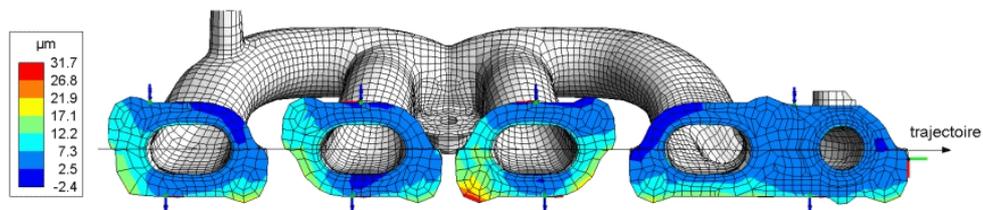


Figure 203 : défaut obtenu avec une fraise à 28 plaquettes

Plus le nombre de dents en prise est grand, plus les efforts appliqués sur la pièce sont élevés, ce qui engendre un défaut de forme plus important. Les défauts obtenus pour les deux cas extrêmes (12 et 28 plaquettes) sont présentés aux figures 202 et 203. Il est presque deux fois plus élevé dans le cas de la fraise à 28 plaquettes.

A conditions de coupe égales (vitesse de coupe, avance par dent et diamètre de la fraise), la vitesse d'avance augmente linéairement avec le nombre de plaquettes et, par conséquent, le débit de copeaux et la productivité augmentent de la même manière. Par contre, l'accroissement du nombre de dents en prise favorise l'apparition du *broutement*. Pour régler une opération d'usinage, il faut trouver le meilleur compromis possible entre différentes situations contradictoires.

6.4.4. Influence de la trajectoire

L'influence de la trajectoire sur le défaut de la surface est de plusieurs natures : modification de l'orientation et de l'intensité des efforts de coupe, variation du nombre de dents en prise, ... Dans certains cas, une simple inversion du sens d'avance de l'outil peut réduire considérablement le défaut de forme [mas01a]. Nous testons ici différentes trajectoires possibles avec la fraise à 28 dents.

Le défaut obtenu pour une trajectoire centrée est illustré à la figure 203. Lorsque la trajectoire est décalée de 35 mm vers la gauche dans le sens d'avance, le défaut augmente ($40.3 \mu\text{m}$). Pour un décalage identique vers la droite, le défaut diminue ($23.5 \mu\text{m}$).

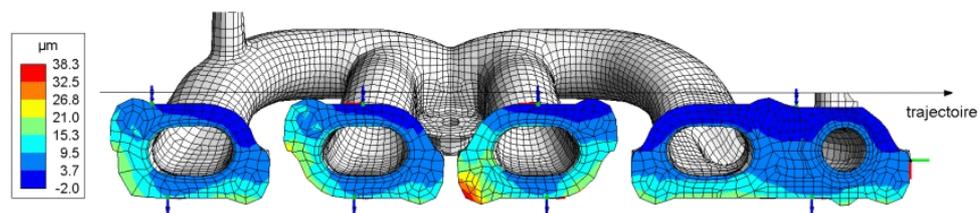


Figure 204 : défaut obtenu pour une trajectoire décalée à gauche

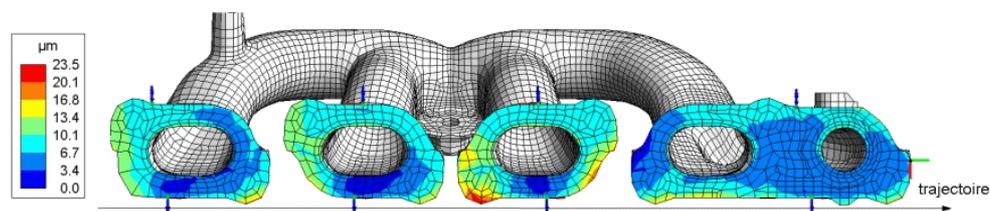


Figure 205 : défaut obtenu pour une trajectoire décalée à droite

La rigidité de la pièce est plus grande selon la direction longitudinale (direction d'avance) que selon la direction perpendiculaire. Lorsque la fraise se trouve à droite de la pièce, la résultante des forces de coupe est plus orientée selon la direction de plus grande rigidité que lorsqu'elle se trouve à gauche (cf. figure 176, chapitre 5). Par ailleurs, la carte du nombre de dents en prise est sensiblement modifiée avec le décalage (figures 206 et 207), ce qui change également le défaut.

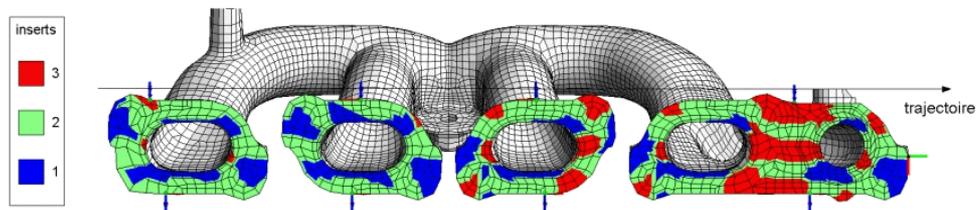


Figure 206 : dents en prise pour un décalage à gauche

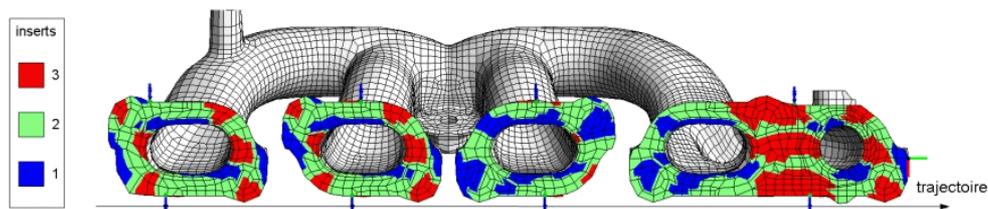


Figure 207 : dents en prise pour un décalage à droite

La figure 208 montre une position particulière de la fraise et la localisation des dents pour cette position. On voit que la topologie de la surface joue un grand rôle dans l'évolution du nombre de dents en prise.

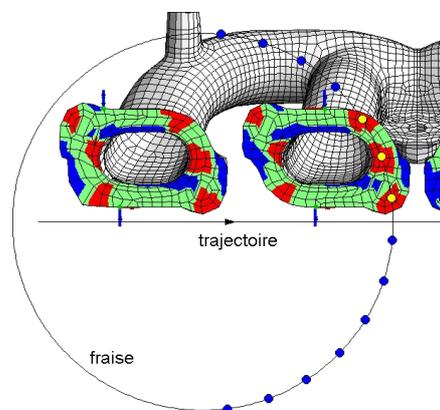


Figure 208 : dents en prise (en jaune) et dents inactives (en bleu)

6.4.5. Influence du bridage

Le montage du collecteur d'échappements est hautement *hyperstatique*. En effet, si l'on excepte les appuis anti-poussée, lorsque l'on pose la pièce sur les cinq supports, il ne peut y en avoir que trois qui sont effectivement en contact avec la pièce. La face sur laquelle repose la pièce est une surface brute de fonderie. Les déviations de forme d'une telle surface peuvent être relativement élevées. Comme les quatre supports des conduits d'échappements sont quasi alignés, la pièce touchera toujours le support inférieur et entrera en contact avec deux supports supérieurs dans le pire des cas (figure 209), et quatre supports

dans le meilleur des cas.

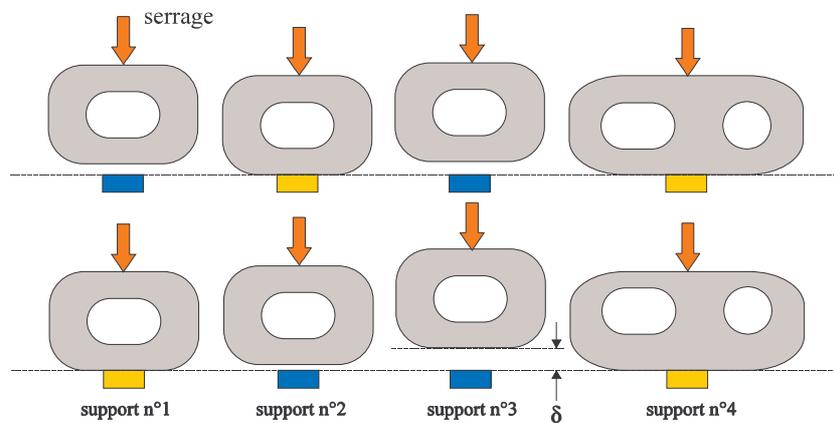


Figure 209 : deux dispositions possibles de la pièce par rapport aux quatre supports supérieurs

Selon la localisation et l'amplitude des jeux δ , la pièce se déformera plus ou moins lors du serrage. Afin de déterminer la sensibilité du défaut engendré par le serrage par rapport aux imperfections de la pièce brute, nous modélisons le problème avec des conditions de contact au niveau des supports. Les différentes situations possibles sont prise en compte en introduisant une borne supérieure U sur les degrés de liberté de contact : pour modéliser un support en contact, on fixe la borne U à zéro et pour un support qui n'est pas en contact, on la fixe à une valeur qui reflète la déviation de forme maximale δ_{\max} de la pièce brute. Pour le collecteur, nous avons choisi une valeur de $50 \mu\text{m}$. Les figures 210 à 215 illustrent le défaut dû au serrage pour quelques situations possibles.

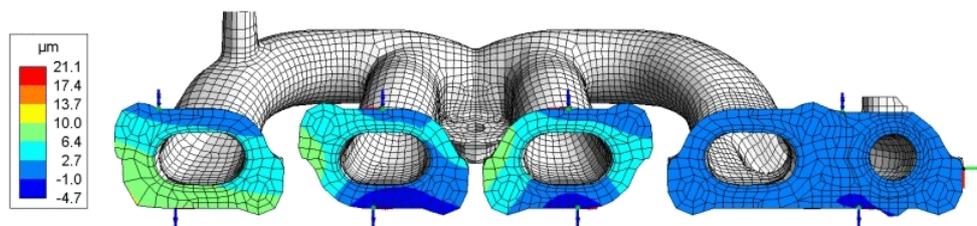


Figure 210 : défaut pour un décalage du support n°1

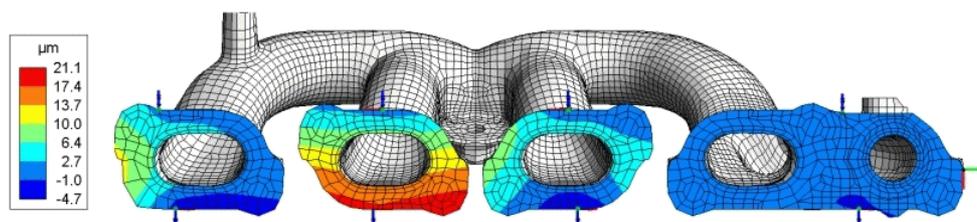


Figure 211 : défaut pour un décalage du support n°2

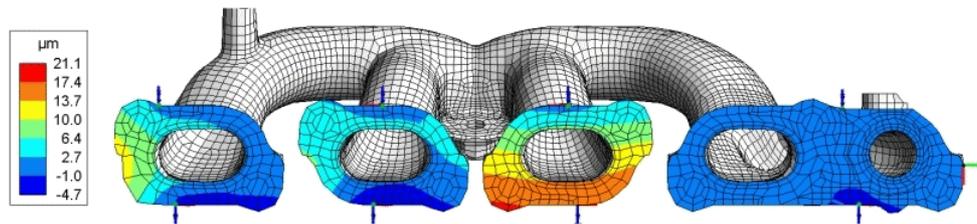


Figure 212 : défaut pour un décalage du support n°3

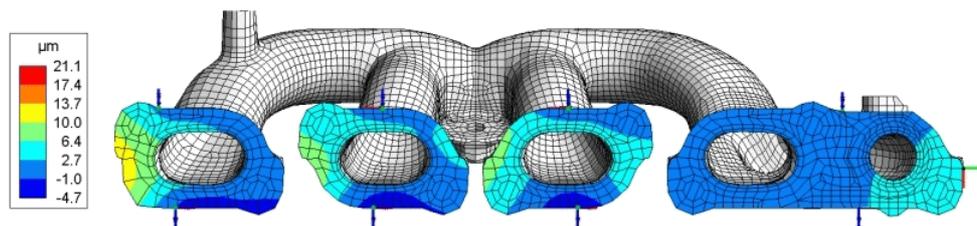


Figure 213 : défaut pour un décalage du support n°4

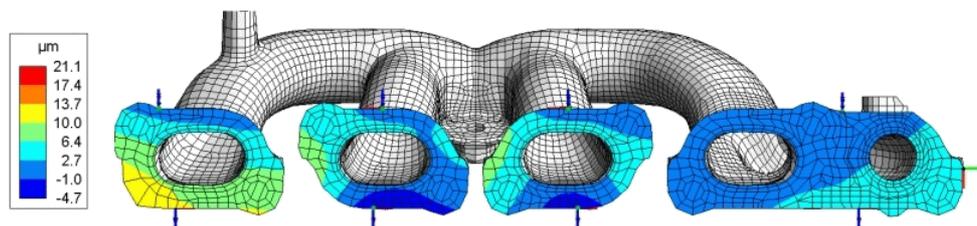


Figure 214 : défaut pour un décalage des supports n°1 et 4

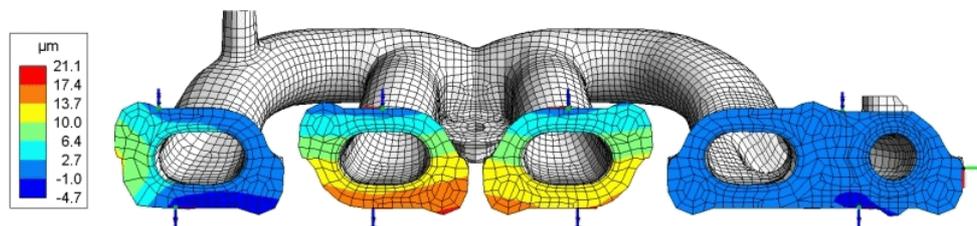


Figure 215 : défaut pour un décalage des supports n°2 et 3

Ce type d'analyse permet de juger si les risques de déformations dues aux imperfections de la surface d'appui de la pièce sont importants ou non. Si c'est le cas, il faut alors faire appel à des systèmes de fixations plus évolués. Par exemple, dans le cas du collecteur d'échappement, on pourrait imaginer la solution suivante : des supports statiques pour les supports 1 et 4 et le support inférieur et des supports mobiles hydrauliques pour les supports 2 et 3. On pose d'abord la pièce sur les trois premiers supports (figure 216a), ce qui correspond à un posage isostatique. Ils sont en contact avec la pièce quelle que soit

la forme de la surface d'appui. Ensuite, on sert les brides correspondantes puis on met en contact les supports 3 et 4, qui sont alors bloqués (figure 216b). Finalement, on serre les deux dernières brides (figure 216c). Cette solution est évidemment beaucoup plus coûteuse que la solution classique, ce qui justifie pleinement le fait de vérifier son opportunité. Notons que, pour cette application, nous avons pris une valeur de δ_{\max} de seulement $50 \mu\text{m}$. En pratique, les pièces brutes peuvent présenter des déviations de forme beaucoup plus grandes, allant jusqu'à quelques dixièmes de millimètres pour certains procédés de fonderie.

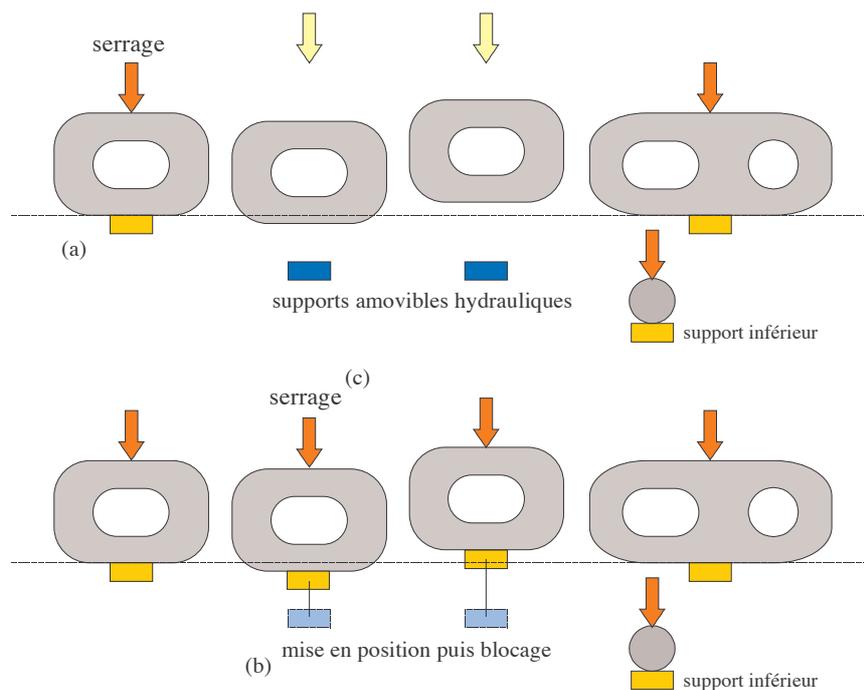


Figure 216 : ordre des opérations pour un système à supports amovibles hydrauliques

6.5. Disques de freins

6.5.1. Présentation

Les disques de freins sont très difficiles à usiner car ce sont des pièces minces et élancées. L'exemple présenté ici est un double disque de frein de grand diamètre (324 mm). Il est réalisé en trois opérations avec deux montages différents (figure 217) : un serrage en mandrin avec des doubles mors pour la première opération (opération 110) et un serrage intérieur du bol avec un mandrin à six mors expansibles pour les deux autres (opérations 120 et 130).

Pour l'opération 110, la piste intérieure du disque est ébauchée (dressage au tour). Les mors sont en forme de coins à 90° et s'insèrent entre les deux pistes du disque de frein. Comme il y a 3 doubles mors, cela correspond à 12 points de contact entre la pièce et le dispositif de serrage. L'utilisation d'un tel système de bridage comporte inévitablement des risques de déformation de la pièce lors du serrage. En effet, la pièce brute, réalisée en fonderie, présente des déviations de forme importantes, ce qui ne permet d'assurer le contact que sur une partie des 12 points de serrage. La dissymétrie des points de fixation entraîne toujours une déformation de la pièce.

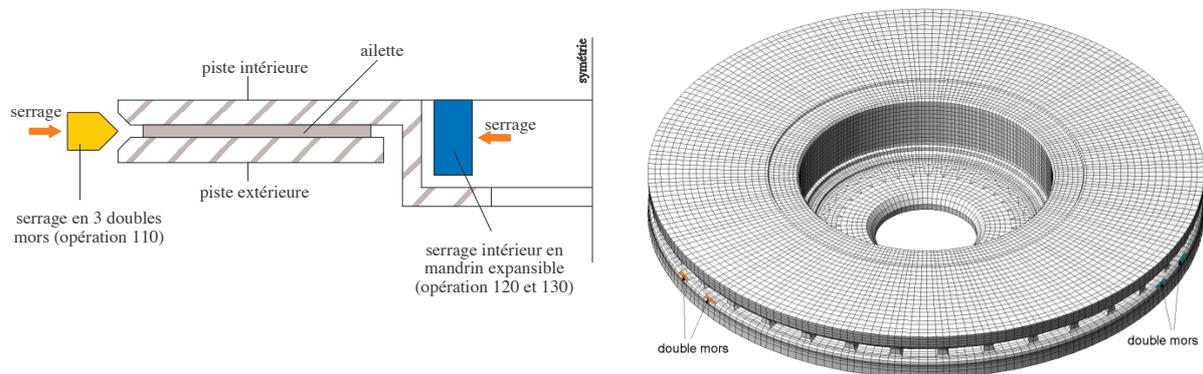


Figure 217 : montages du disque et modèle d'éléments finis (AUTO-CHASSIS INTERNATIONAL, ACI)

6.5.2. Modélisation et calculs

Le disque de frein est réalisé dans une fonte dont le module de Young vaut 102000 MPa. Le maillage du disque est illustré à la figure 217. Il comporte environ 55000 éléments et 550000 degrés de liberté. Nous conservons dans le superélément les 12 zones de fixation et seulement une partie de la piste intérieure, de manière à ne pas avoir un superélément de trop grande taille. Le temps de création du superélément avec SAMCEF est de 25 minutes environ.

Un système d'axes cylindriques est utilisé pour définir les conditions aux limites. Pour chaque zone de serrage, on définit des raideurs k_r , k_θ et k_z équivalentes à celles des mors (figure 218).

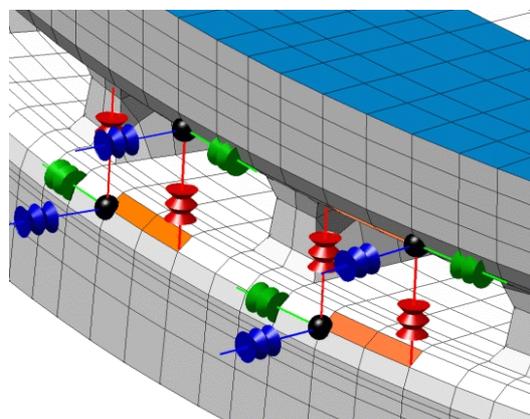


Figure 218 : raideurs équivalentes des mors; direction radiale en bleu, tangentielle en vert et axiale en rouge

Les forces de serrage ont été mesurées : chaque double mors applique un effort radial de 17500 N, ce qui correspond à 4375 N par zone de serrage. Dans le cas où l'on considère que le serrage est parfait, c'est-à-dire que l'effort de serrage est réparti uniformément sur les 12 zones, le défaut engendré par les efforts de bridage est très petit, moins d'un micromètre. Les efforts de coupe ont été déterminés par la firme ACI. Ils valent :

- force de coupe : $F_c = 1698$ N
- force d'avance : $F_f = 841$ N
- force passive : $F_p = 1109$ N

Le défaut obtenu par calcul est présenté à la figure 219. Le battement axial calculé sur une ligne de noeud située à une distance de 157 mm de l'axe de rotation de la pièce est illustré à la figure 220. Il a la forme d'un trilobe, ce qui est logique vu la configuration du bridage, et son amplitude est de $40.2 \mu\text{m}$.

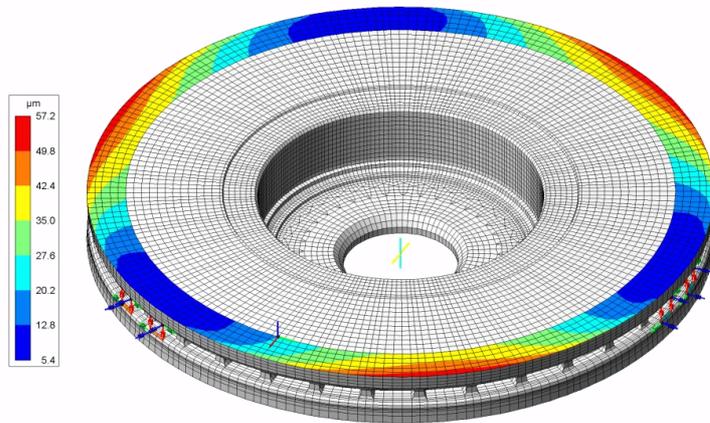


Figure 219 : défaut dû aux seules forces de coupe

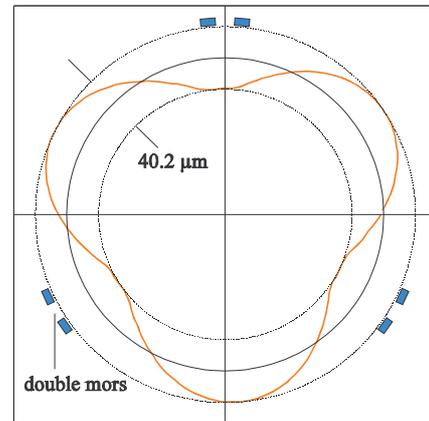


Figure 220 : battement axial calculé

Le battement axial mesuré sur des pièces prélevées juste après l'opération 110 n'a pas du tout la même forme ni la même amplitude (figure 221). De plus, d'une pièce à l'autre, la forme de la courbe de battement varie énormément.

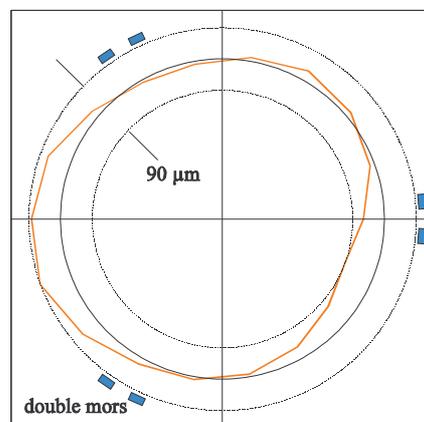


Figure 221 : battement axial mesuré (un point de mesure tous les 20°)

La décomposition en séries de Fourier des courbes de battement mesurées, soit

$$z(\theta) = A_0 + \sum_{i=1}^N A_i \cos(i\theta + \varphi_i) \quad (143)$$

où A_i et φ_i sont l'amplitude et la phase du terme d'ordre i , permet de constater que le défaut comporte:

- une composante trilobée, constante en amplitude et en phase, se retrouvant dans toutes les mesures;

- une composante en forme de bilobe (ordre 2), dont l'amplitude et la phase changent complètement d'une pièce à l'autre.

Au total, six pièces ont été mesurées : pour trois niveaux d'usure de l'outil (après 100, 1000 et 2000 pièces usinées) et sur deux machines-outils. L'évolution des amplitudes A_2 (bilobe) et A_3 (trilobe) est donnée à la figure 222. L'amplitude du trilobe augmente régulièrement avec l'usure de l'outil. Pour un outil neuf, elle correspond exactement à l'amplitude du trilobe obtenu par calcul (figure 220).

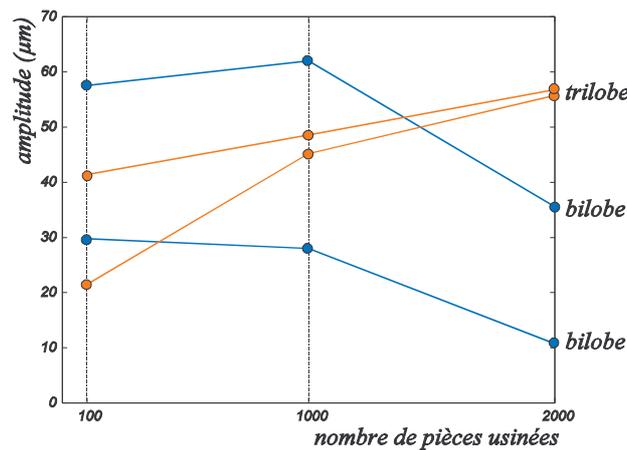


Figure 222 : évolution de l'amplitude des composantes bilobées et trilobées en fonction du nombre de pièces usinées par les deux machines

Par contre, l'amplitude du bilobe varie de manière incohérente. A notre sens, la composante bilobée que l'on retrouve dans les mesures de battement provient de la déformation du disque engendrée par le serrage. En effet, selon les déviations de forme de la pièce brute, le nombre effectif de points de serrage est nécessairement inférieur à 12 et ils peuvent se répartir différemment d'une pièce à l'autre.

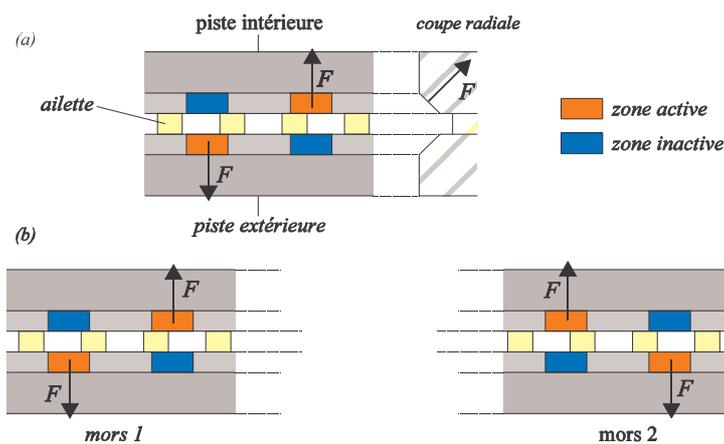


Figure 223 : deux zones inactives croisées pour un seul double mors (a) et situation identique mais sur deux doubles mors (b)

On peut modéliser par éléments finis un serrage non uniforme en considérant que certaines zones de serrage sont inactives, c'est-à-dire que le mors n'appuie pas sur la pièce à cet endroit. Comme il y a douze zones de serrage, les combinaisons possibles sont nombreuses. Nous en avons examiné deux : deux

zones croisées sont inactives pour le même double mors (figure 223a) ou quatre zones sur deux doubles mors sont inactives (figure 223b). Dans les deux cas, le serrage seul entraîne une torsion du disque. Il se soulève d'un côté, ce qui produit un défaut négatif (en bleu sur les figures 224 et 226), et descend de l'autre, ce qui correspond à un défaut positif (en rouge). Les courbes de battement correspondantes sont illustrées aux figures 225 et 227.

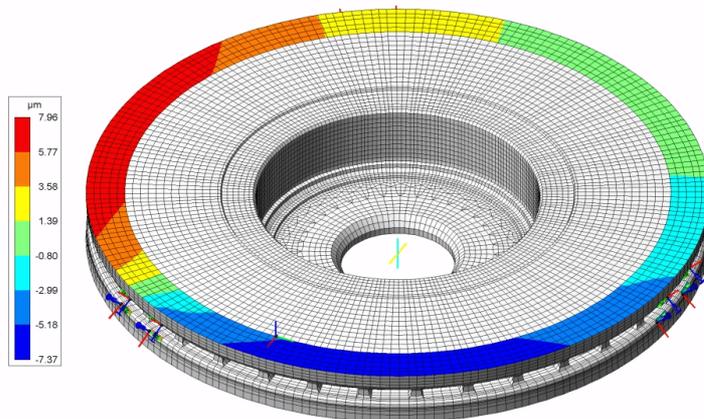


Figure 224 : première possibilité

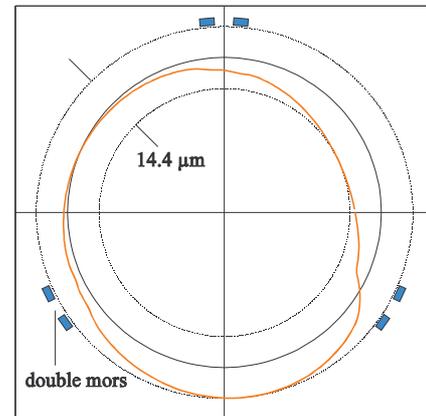


Figure 225 : battement axial correspondant

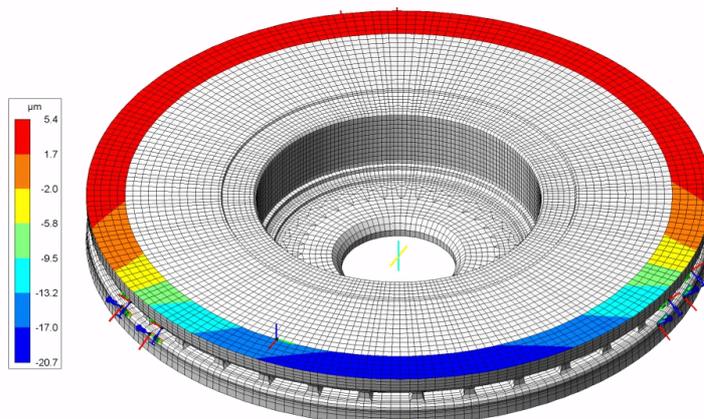


Figure 226 : seconde possibilité

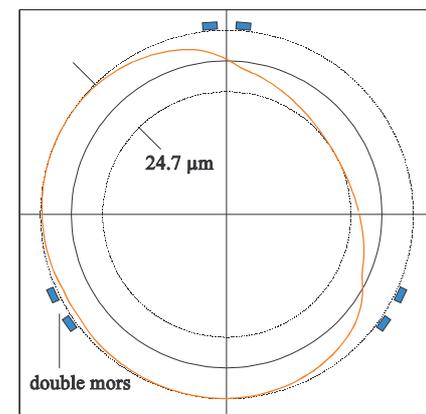


Figure 227 : battement axial correspondant

Il n'est pas évident de reproduire par calcul le même effet que celui observé sur les mesures. Cependant, on constate bien qu'un serrage non uniforme de la pièce entraîne l'apparition d'un bilobe. Lorsqu'on calcule l'effet simultané des forces de coupe et d'un serrage non uniforme, on trouve un défaut qui s'approche en forme et en amplitude des défauts mesurés expérimentalement (figure 228 et 229).

Lors de cette opération, le serrage provoque également un défaut important lorsqu'on usine le bol du disque. Or, la pièce est fixée sur ce dernier pour les opérations 120 et 130. Dès lors, le problème de bridage de l'opération 110 se répercute sur les deux autres opérations et les pièces finies présentent des défauts relativement importants dont la forme varie d'une pièce à l'autre. Pour cette application, la simulation n'est pas utilisée pour prévoir des défauts mais plutôt pour déterminer la cause d'un problème.

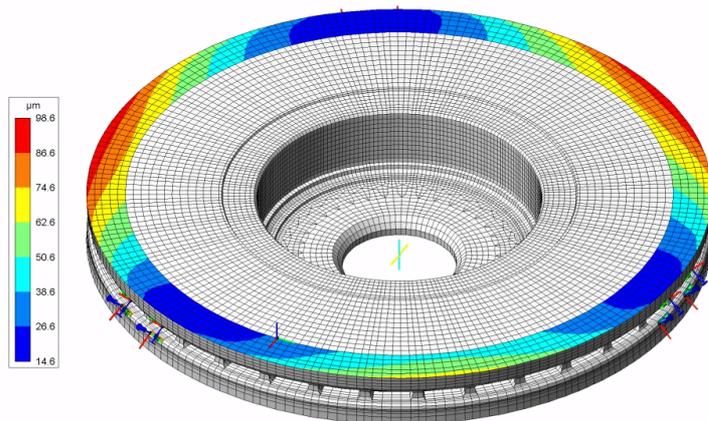


Figure 228 : défaut dû aux forces de coupe et à un serrage non uniforme

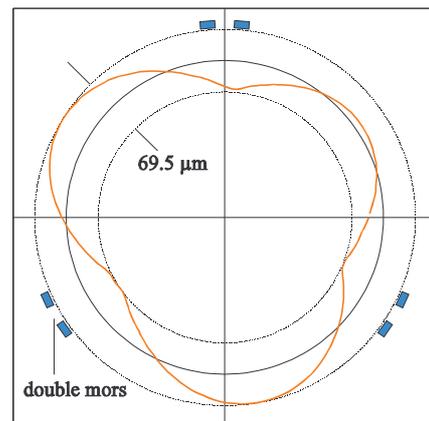


Figure 229 : battement axial correspondant

6.5.3. Prise de pièce non-déformante

Dans le cas du disque présenté ci-dessus, le problème est dû à une mauvaise conception du bridage. Contrairement à une idée répandue, la multiplication des points de serrage n'est pas une bonne pratique. Elle entraîne *toujours* une déformation de la pièce, en particulier lorsqu'il s'agit d'une pièce brute. Lorsque l'on conçoit un bridage, il faut autant que faire se peut s'approcher de l'*isostatisme*. Dans le cas du double disque de frein, des mors *simples* auraient sans doute conduit à de bien meilleurs résultats.

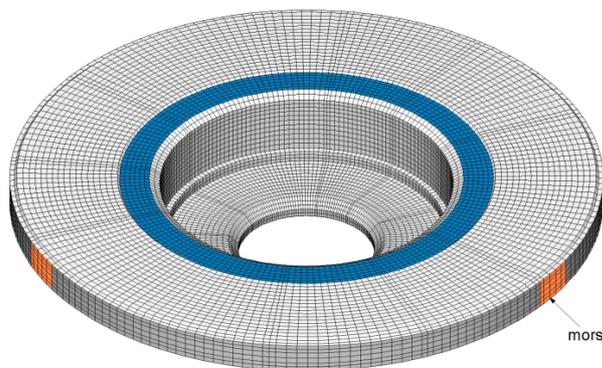


Figure 230 : serrage en 3 mors simples d'un disque de frein

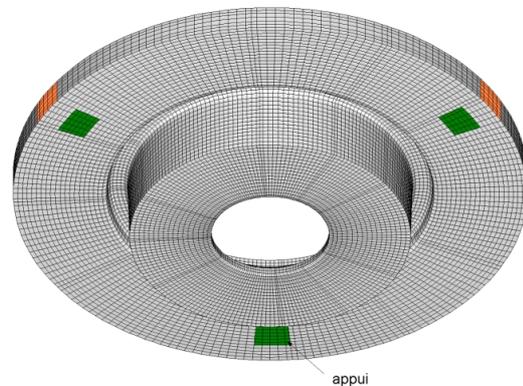


Figure 231 : appuis disposés sous le disque

Pour le disque de frein présenté à la figure 230, le bridage est plus conforme aux règles de bonne pratique. Il est serré dans un mandrin à trois mors simples et posé sur trois appuis se trouvant au droit des mors (figure 231). Le battement axial mesuré sur un cercle au milieu de la surface usinée (coloriée en bleu) a bien une forme de trilobe. Pour cet exemple, la simulation donne un défaut de battement de $14.6 \mu\text{m}$ alors que le défaut mesuré est de $14.4 \mu\text{m}$ [mas03a].

6.6. Tambour de frein

6.6.1. Présentation

Sur les tambours de freins, les tolérances sur la surface de contact avec le dispositif de freinage (figure 232) sont extrêmement fines de manière à assurer un freinage efficace. La tolérance de forme que l'on doit respecter est le *battement radial*. Cette pièce est réalisée en tournage. Son usinage est très difficile car il n'est pas aisé de la maintenir en position sans la déformer.

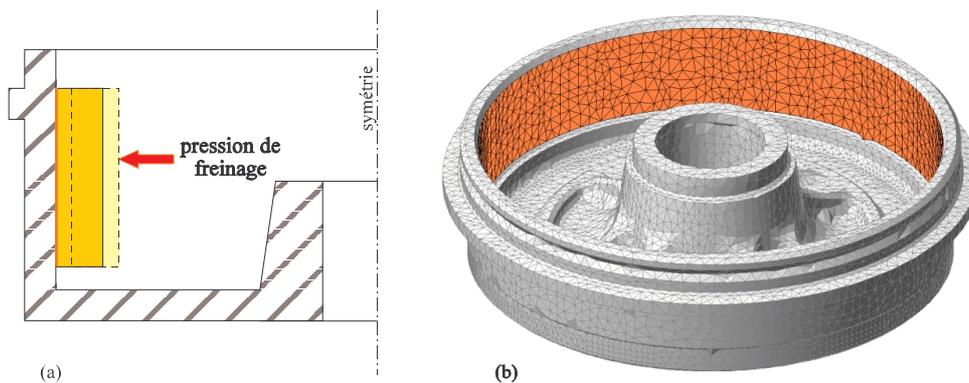


Figure 232 : principe du frein à tambour (a) et maillage de la pièce (b)

L'opération étudiée est l'alésage au tour de la partie intérieure du tambour. Celui-ci est maintenu en position par trois mors doubles *non-palonnés* et supporté par une couronne d'appui (figure 233). Le serrage s'effectue au niveau de la base du tambour de manière à le déformer le moins possible. L'intérêt de cette application est de mettre en évidence l'influence de la flexibilité du dispositif de bridage sur le défaut de la pièce.

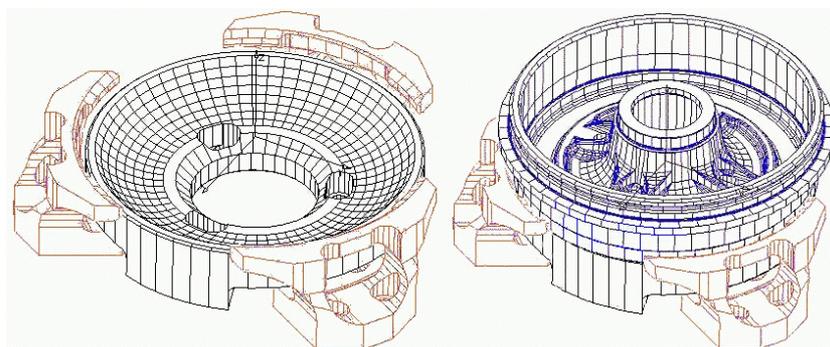


Figure 233 : montage du tambour de frein; la couronne d'appui est dessinée en noir, les double mors en brun et le tambour de frein en bleu foncé (AUTO-CHASSIS INTERNATIONAL)

6.6.2. Modélisation

La pièce est réalisée en fonte globulaire GL09 ($E = 120000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$). Elle est maillée en éléments tétraédriques du second degré. Le modèle comporte 548000 degrés de liberté. Dans le superélément, on

ne garde que le haut de la surface usinée, les six zones de serrage et les noeuds situés sur la zone de contact entre la couronne d'appui et la base du tambour. La création du superélément requiert environ 30 minutes de calcul.

Les mors sont modélisés par des ressorts dont les raideurs équivalentes selon les trois directions k_r , k_θ et k_z ont été déterminées par voie numérique. Les forces de serrage *dynamiques* appliquées selon la direction radiale ont été estimées à 13000 N par mors, soit 6500 N sur chacune des six zones de serrage. Les efforts de coupe ont été calculés avec un logiciel utilisé chez ACI :

- force de coupe : $F_c = 1607$ N
- force d'avance : $F_f = 1084$ N
- force passive : $F_p = 568$ N

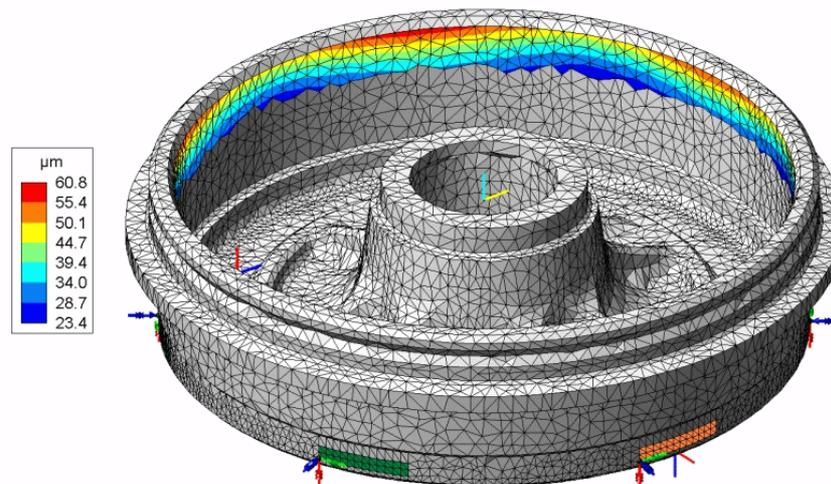


Figure 234 : défaut obtenu

Le défaut obtenu est présenté à la figure 234. Le défaut de battement sur un cercle situé à la limite supérieure de la surface usinée est tracé à la figure 235. Il présente une symétrie d'ordre 6 et une amplitude très faible ($13.6 \mu\text{m}$) par rapport à ce qui est observé expérimentalement : une forme de trilobe dont l'amplitude est de l'ordre de $40 \mu\text{m}$.

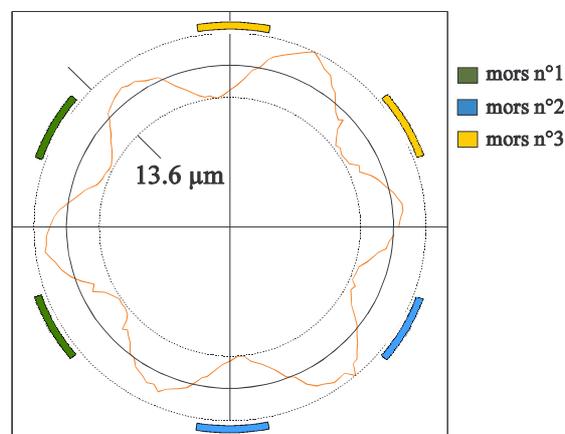


Figure 235 : battement radial

Cette différence vient du fait que la modélisation adoptée, qui consiste à remplacer les éléments de bridage par des raideurs équivalentes, n'est pas valable ici. En effet, les mors sont extrêmement flexibles et, par conséquent, leur mode de déformation ne peut être modélisé par de simples éléments de raideur. Lorsque l'on détermine la flexibilité des mors par éléments finis (figure 236a), on constate que le double mors fléchit et que les deux zones de serrage s'ouvrent (figure 236b).

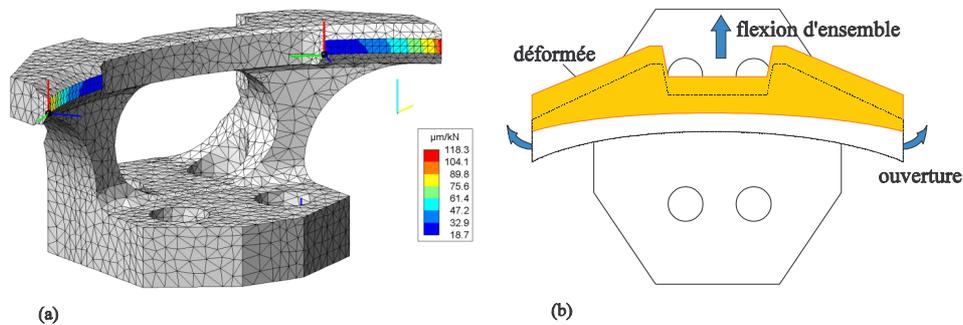


Figure 236 : carte de souplesse du double mors (a) et mode de déformation (b)

6.6.3. Intégration des mors dans le modèle

Pour prendre en compte l'effet de la grande flexibilité des mors, il convient de les intégrer au modèle de la pièce. Comme les deux maillages ne coïncident pas au niveau des six zones de contact, il faut utiliser des éléments de *collage* (cartes .stick dans SAMCEF). Le modèle complet comprenant la pièce et les trois doubles mors est illustré à la figure 237. Pour les conditions aux limites, on fixe les composantes axiales et tangentielles des zones correspondant aux trous de serrage des mors. La composante radiale est laissée libre et on applique selon cette direction l'effort de serrage total du mors (13000 N). Les conditions de contact sont conservées au niveau de la couronne d'appui.

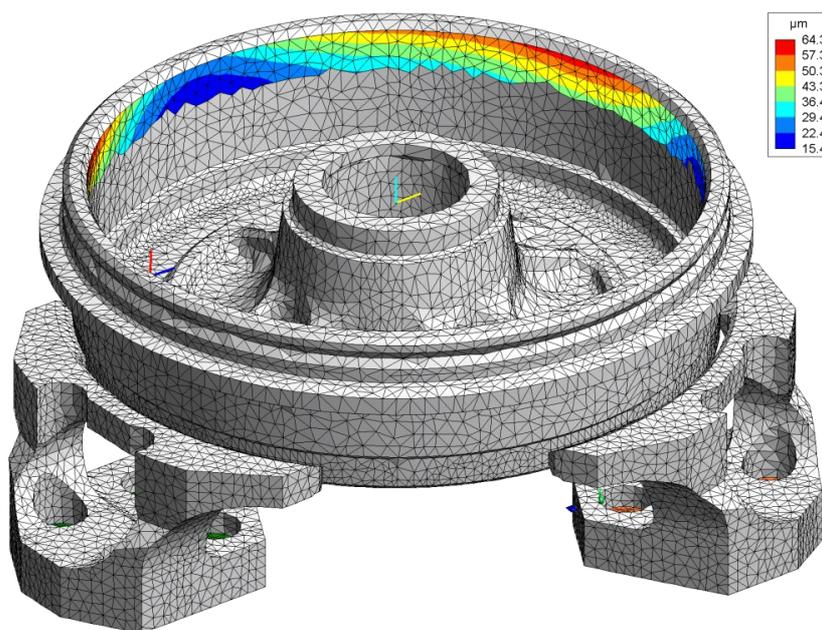


Figure 237 : défaut obtenu en intégrant les mors dans le modèle d'éléments finis

L'amplitude du défaut n'a pas tellement évolué par rapport au premier calcul. Par contre, la forme du défaut est très différente. On a maintenant un défaut présentant une symétrie d'ordre trois, c'est-à-dire un trilobe, ce qui correspond mieux à la physique du problème. L'erreur de battement sur le même cercle que précédemment est illustrée à la figure 238. L'amplitude est beaucoup plus élevée ($38 \mu\text{m}$) et assez proche de la mesure.

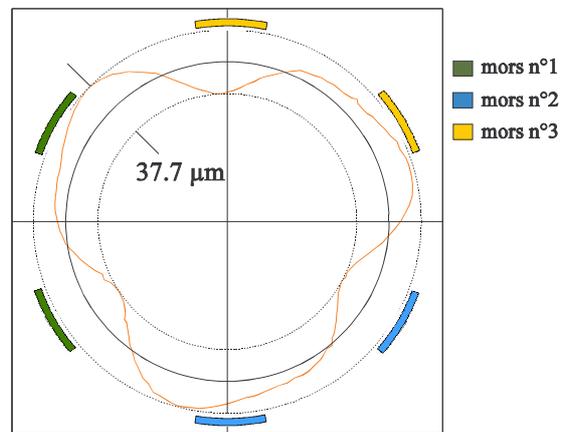


Figure 238 : battement radial

Lorsque l'on examine les déplacements normaux pour les noeuds de la zone de contact, on constate que la pièce est constamment décollée de la couronne d'appui d'au moins trois centièmes de millimètres. Dans ce cas, les mors utilisés sont manifestement trop souples car ils ont tendance à soulever la pièce lors du serrage, ce qui rend la couronne d'appui inutile. De plus, la carte de souplesse des mors (figure 236a) montre que les mors ne sont en contact avec la pièce que sur la partie centrale, les extrémités étant décollées à cause de l'ouverture des mors.

6.7. Fraisage d'ébauche de carters-cylindres

6.7.1. Présentation

Le fraisage d'ébauche de la face 500 des carters-cylindres F9 et F4 (moteurs RENAULT diesel) pose des problèmes de broutement depuis l'installation de la ligne de production il y a environ vingt ans. Le broutement engendre une usure prématurée des plaquettes de la fraise, ce qui oblige à changer le jeu de plaquettes après un nombre de pièces usinées beaucoup plus petit que ce que permettraient des conditions d'usinage standard. Le surcoût est estimé à 120 k€par an [bel02].

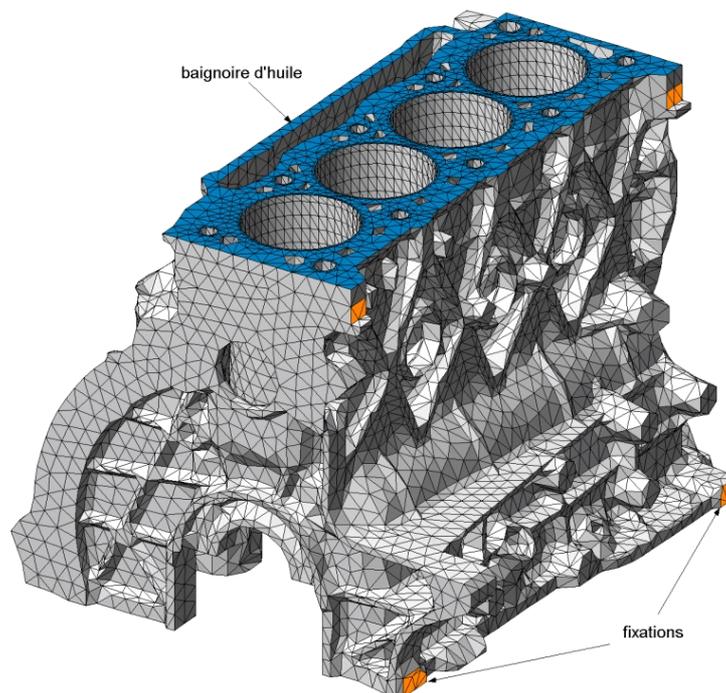


Figure 239 : carter F9; la face 500 est coloriée en bleu

Le broutement se produit sur les baignoires d'huile des carters (figure 239). Des analyses vibratoires ont révélé que la fréquence de broutement se situe entre 3000 et 5000 Hz pour le carter F9. L'ébauche est réalisée avec une fraise de 400 mm à 64 dents. La vitesse de rotation est de 92 tr/min, ce qui correspond à une vitesse de coupe d'environ 115 m/min. La fréquence de passage des dents ZN est égale à 98 Hz. Pour atteindre la zone de stabilité inter-lobes la plus large, qui se trouve vers 3000 Hz, il faudrait multiplier la fréquence de rotation de la fraise par 30 au moins, ce qui correspondrait à une vitesse de coupe irréalisable pour la fonte. Il s'agit bien d'un cas où les lobes du diagramme de stabilité n'ont pas d'intérêt.

6.7.2. Cartes de broutement

Les deux carters sont modélisés avec des éléments tétraédriques du second degré. Ils sont réalisés dans une fonte dont les caractéristiques sont : module de Young $E = 121000$ MPa et coefficient de Poisson $\nu = 0.27$. Pour créer les superéléments, on définit les zones de bridage (sur les deux faces latérales) et les surfaces usinées (faces 500). Pour le carter F9, le système comporte également un support anti-

poussée qui appuie avec une pression constante à peu près au milieu de la baignoire d'huile. Tous les points de fixation des carters sont modélisés en fixant les degrés de liberté dans les trois directions.

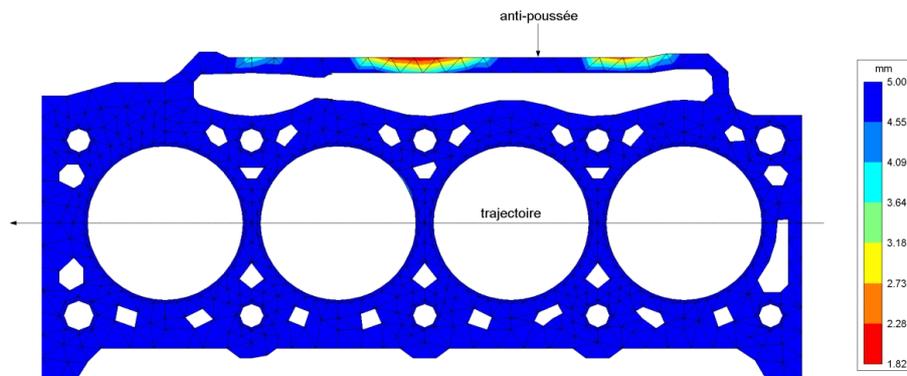


Figure 240 : carte de brottement de la face 500 du carter F9

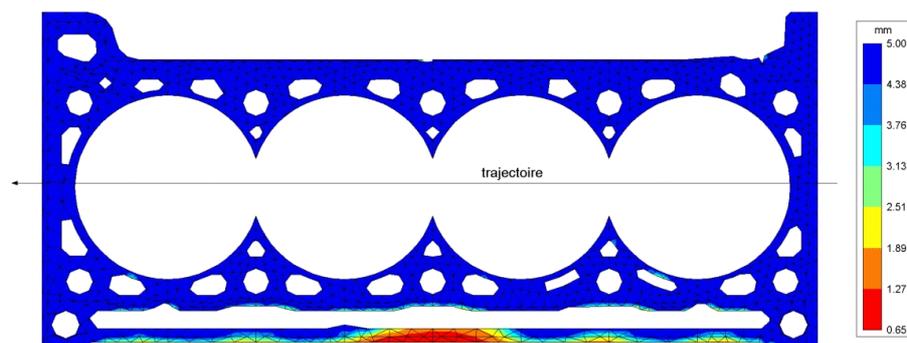


Figure 241 : carte de brottement de la face 500 du carter F4 (vue partielle de la surface usinée)

Pour calculer les cartes de brottement, nous avons utilisé les paramètres décrits ci-dessous. La trajectoire de l'outil est centrée sur les cylindres. Les efforts de coupe sont calculés à partir des données du fabricant d'outil :

- pression de coupe : $k_{c1,1} = 1300$ MPa
- exposant de coupe : $m_c = 0.25$

Pour calculer les deux autres forces de coupe, on utilise un coefficient de frottement moyen μ de 0.4. L'angle de direction d'arête κ_r est de 45° . L'avance par dent est de 0.22 mm et la profondeur de passe nominale est de 3 mm. A cause des dispersions sur l'épaisseur des pièces en fonderie, l'engagement peut atteindre 4 mm. Une analyse vibratoire de la baignoire d'huile du carter F9 a permis de déterminer un amortissement ξ d'environ 6% pour le premier mode de vibration.

Pour le carter F9, il y a trois zones où le risque de brottement est très important (figure 240). Pour le carter F4, c'est principalement le milieu de la baignoire d'huile qui pose des problèmes (figure 241). Sur les pièces sortant de la ligne de production, on constate des marques de brottement (figure 242) aux mêmes endroits que dans le calcul.

Sur le carter F9, des essais ont été réalisés dans trois configurations pour lesquelles la hauteur de matière sur les baignoires d'huile avait été préalablement amenée à 1, 2 et 3 mm. Le niveau de vibration augmente fortement lorsque la hauteur de matière coupée atteint 2 mm (figure 243). L'engagement limite obtenu par calcul (1.81 mm) est tout à fait comparable à ce que l'on observe, ce qui montre que la méthode développée fournit des résultats réalistes.

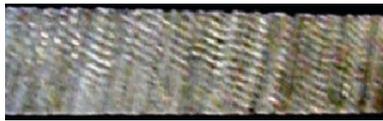


Figure 242 : marques de broutement

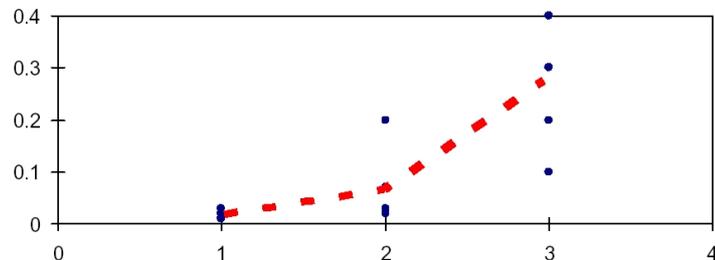


Figure 243 : niveau de vibration en mm/s mesuré sur la partie centrale de la baignoire d'huile du carter F9 en fonction de la hauteur de matière

6.7.3. Solution du problème de broutement

La machine de production est une machine-transfert sur laquelle il y a très peu de possibilités de réglage. Seule la vitesse de rotation peut être modifiée, ce qui ne permet pas de résoudre le problème. La solution imaginée et réalisée par l'équipe d'ingénierie *process* RENAULT [bel03] a été de développer une *fraise étagée* en collaboration avec le fournisseur d'outils SANDVIK-COROMANT. Le principe est de disposer sur l'outil deux étages de plaquettes de manière à ce que chaque étage coupe environ la moitié de la hauteur de matière (figure 244). De plus, les dents sont disposées sur la fraise de façon à ce qu'une *seule* soit engagée sur les baignoires d'huile à un instant donné (figure 245). Les plaquettes du premier étage coupent 1.5 mm tandis que celles du second coupent entre 1.5 et 2.5 mm à cause de la dispersion des pièces brutes.

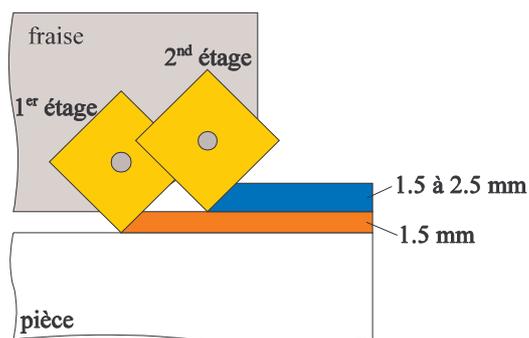


Figure 244 : principe de la fraise étagée

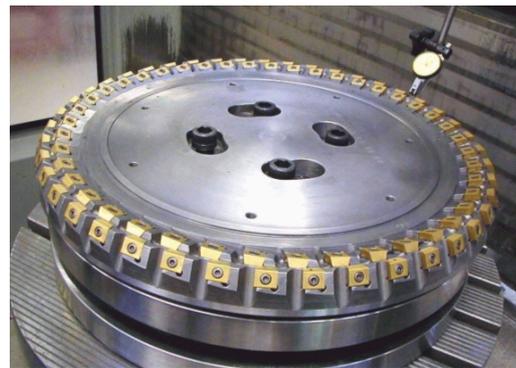


Figure 245 : fraise étagée

Cette fraise a été validée récemment sur la ligne de production. Le broutement a quasiment disparu : il se produit encore légèrement sur certaines pièces où la surépaisseur du brut est plus élevée (4 mm). Le nombre de pièces usinées avec le même jeu de plaquettes a considérablement augmenté (1200 à la place de 500). De plus, l'erreur de planéité de la face a diminué.

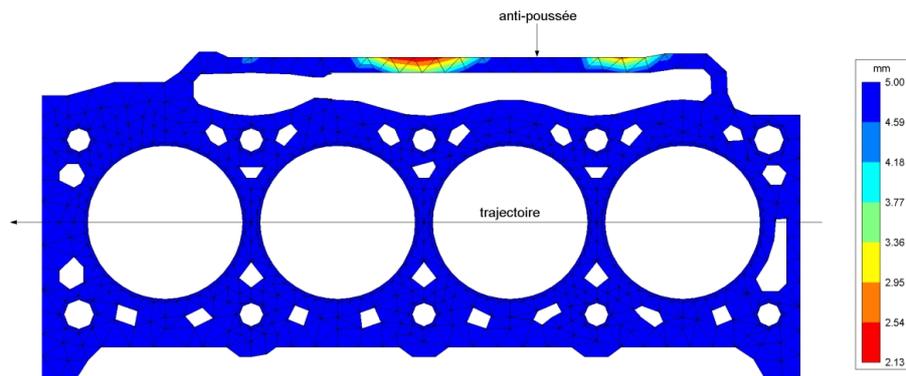


Figure 246 : carte de brottement pour le premier étage (carter F9)

Les caractéristiques de la fraise étagée sont :

- premier étage : $D = 400 \text{ mm}$ et $\kappa_r = 53.8^\circ$
- second étage : $D = 430 \text{ mm}$ et $\kappa_r = 60^\circ$

Avec ces valeurs, on détermine les cartes de brottement pour chaque étage de la fraise dans le cas du carter F9. L'allure des cartes (figure 246) est la même que celles obtenues précédemment. La profondeur de passe admissible est de 2.13 mm pour le premier étage et de 2.37 mm pour le second, ce qui montre que l'on se trouve à la limite du brottement si la surépaisseur du brut est de 4 mm.

6.7.4. Amélioration des paramètres d'usinage

Pour le cas des carters F9 et F4, il n'est pas possible de modifier les paramètres d'usinage. Pour illustrer leur influence, nous étudions le cas du carter-cylindres D4, qui est usiné sur une ligne flexible. Il est fixé en quatre points sur les faces 100 et 300 (figure 247).

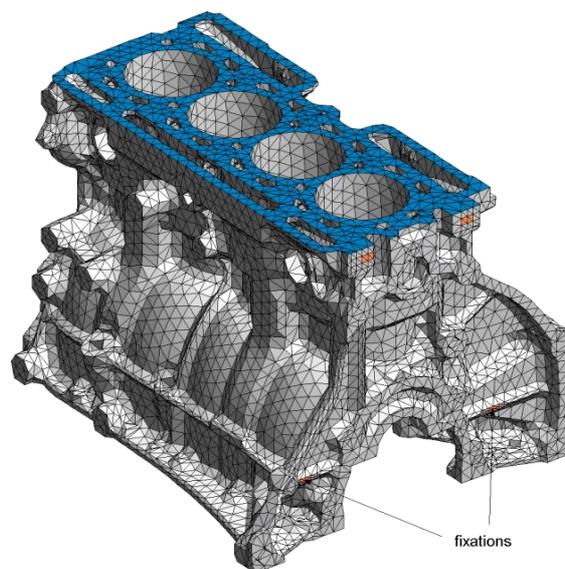


Figure 247 : carter-cylindres D4

On considère une fraise de 400 mm dont l'angle d'attaque κ_r est de 45° . Le sens de rotation de la fraise influence la manière dont la vibration est excitée par l'intermédiaire du coefficient directionnel u . Pour une trajectoire centrée sur les cylindres, lorsque la fraise tourne dans le sens horlogique, nous obtenons la carte de broutement illustrée sur le graphique de gauche de la figure 248. L'engagement limite est de 1.7 mm. Lorsque la fraise tourne dans le sens anti-horlogique, cette valeur tombe à 1.19 mm.

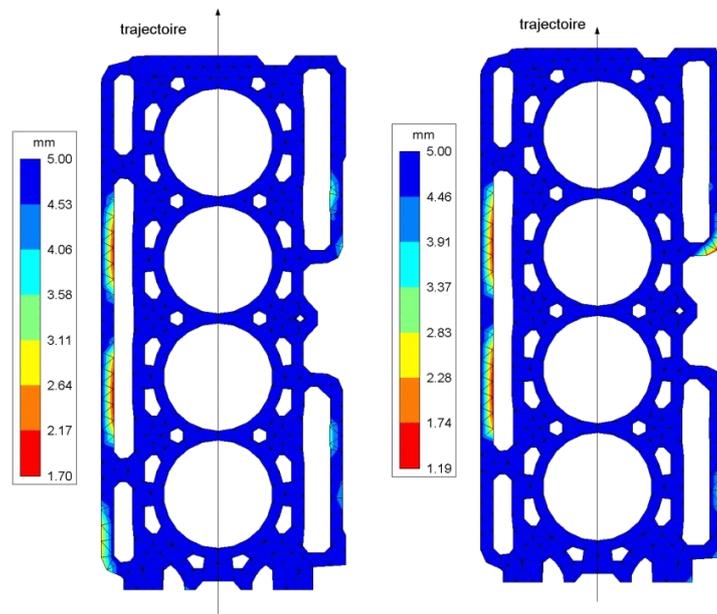


Figure 248 : influence du sens de rotation de la fraise (horlogique et anti-horlogique)

Le décalage de la trajectoire modifie également le coefficient directionnel et la carte de broutement. La figure 249 illustre le cas d'une trajectoire décalée de 25 mm respectivement vers la gauche et vers la droite par rapport au sens d'avance.

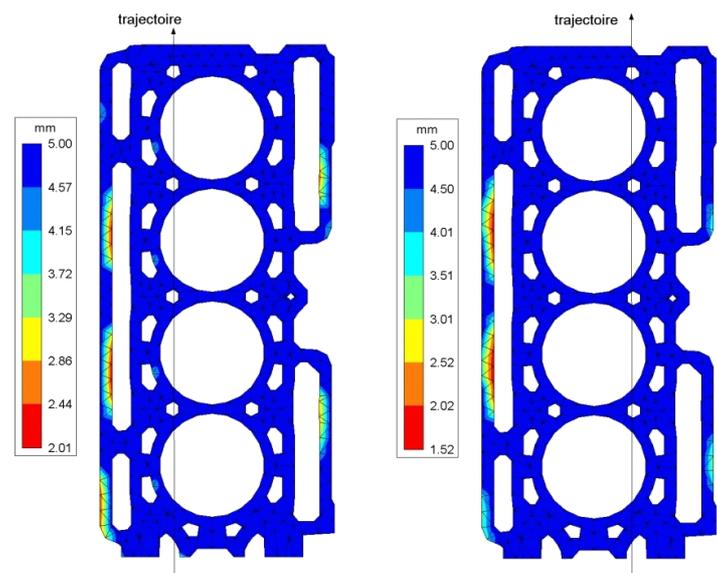


Figure 249 : influence du décalage de la trajectoire (sens horlogique)

L'angle de direction d'arête κ_r a également une grande influence sur le broutement. Pour une trajectoire

centrée et un sens de rotation horlogique, la carte de broutement obtenue avec un angle de direction d'arête de 80° est illustrée à la figure 250. L'évolution de la valeur minimale de l'engagement limite $a_{\text{lim}}^{(\text{min})}$ avec l'angle κ_r est tracée à la figure 251. Elle croît quasi linéairement avec κ_r , ce qui n'est pas évident *a priori* vu le nombre de termes qui sont influencés par l'angle de direction d'arête.

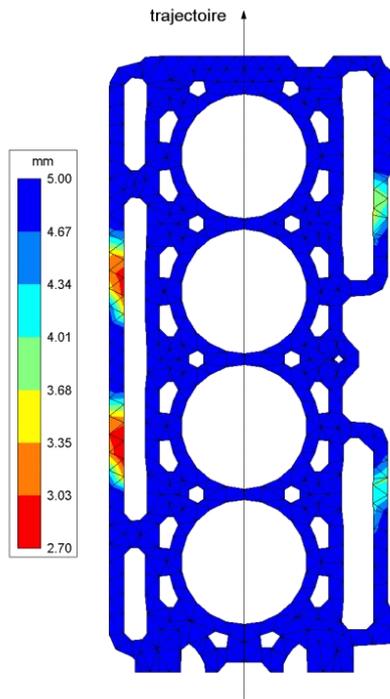


Figure 250 : carte de broutement pour un angle κ_r de 80° (sens horlogique)

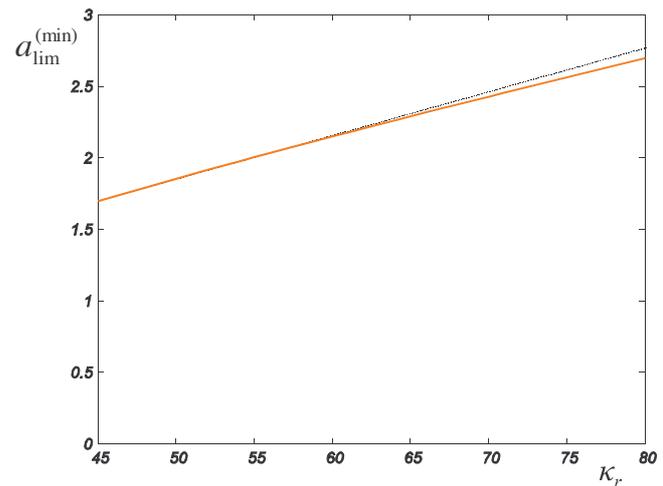


Figure 251 : influence de l'angle de direction d'arête κ_r

Conclusion

Pour établir une gamme d'usinage conforme au cahier des charges, le concepteur doit prendre en compte de nombreux facteurs. Les outils numériques actuels permettent d'en gérer efficacement un certain nombre, comme les chaînes de cotes, les temps de cycle, les collisions outil/pièce, ..., mais ils ne sont pas encore en mesure de couvrir toute la problématique posée par l'usinage de pièces en grande série.

Partant de ce constat, nous avons développé un outil de simulation qui permet d'analyser deux aspects majeurs de l'usinage, jusqu'à présent peu ou pas couverts par les outils disponibles : les défauts géométriques des surfaces usinées et les vibrations auto-excitées, autrement dit le broutement. Ces problèmes font tous deux intervenir la rigidité du système. Dans ce travail, nous nous sommes limités à des applications pour lesquelles seuls les éléments de fixation et la pièce usinée sont flexibles, ce qui est propre à la plupart des applications du domaine automobile.

- ● -

L'erreur de forme de la surface usinée est engendrée par les déformations du système. Celles-ci sont calculées par la méthode des *éléments finis*. Un des points originaux de ce travail est de construire la forme de la surface usinée à partir des *défauts nodaux*, c'est-à-dire des hauteurs de matière laissées par l'outil aux noeuds du maillage représentant la surface. Cette méthode permet de s'affranchir de toute forme d'interpolation autre que l'*interpolation naturelle* des éléments finis.

Les sollicitations du système sont les efforts de serrage et les forces de coupe développées par l'outil. Ces dernières sont appliquées sur la projection des arêtes de coupe de manière à prendre en compte les entrées et sorties progressives des plaquettes. En fraisage, la *recoupe* par l'outil de la surface usinée est également modélisée, de manière à régler au mieux le dépinçage de la fraise.

Le modèle adopté requiert le calcul d'un grand nombre de déformées. Afin de rendre le calcul efficace, nous avons développé un schéma d'analyse spécialement bien adapté à cette situation particulière : dans un premier temps, la *méthode du superélément* permet de limiter la taille du système aux seuls degrés de liberté qui interviennent explicitement dans la modélisation de l'opération d'usinage (ceux des surfaces usinées et des zones de fixation); la matrice de raideur du superélément est ensuite *inversée* après application des conditions aux limites; enfin, les déformées de la structure sont calculées pour obtenir la forme de la surface usinée. En outre, les problèmes de décollements d'appuis ou de surfaces d'appuis imparfaites peuvent être pris en compte en introduisant des conditions aux limites de contact.

A partir de la géométrie de la surface usinée, l'erreur de forme est calculée grâce à un algorithme original basé sur la *minimisation des normes d'ordre p*. Il est fondé sur la propriété de ces normes de tendre vers

la fonction à minimiser lorsque l'exposant tend vers l'infini. La convergence vers la solution optimale est atteinte en minimisant d'abord la norme d'ordre 2 puis les normes successives d'ordre supérieur en augmentant progressivement l'exposant. De nombreux tests ont montré que cet algorithme, applicable à toutes les erreurs de forme, est particulièrement *fiable*, même lorsque le problème comporte un grand nombre de minima locaux.

- ● -

Dans ce travail, le broutement est modélisé grâce à une méthode *approchée* qui s'appuie sur la théorie établie par Tlusty. L'originalité de la méthode est de ne pas faire intervenir les modes et les fréquences propres, alors même qu'il s'agit d'un problème de vibration. En fraisage, cette méthode n'est applicable qu'au cas des parois minces pour lesquelles une seule plaquette est en prise à la fois. Ce manque de généralité est compensé par le fait que le broutement se produit le plus souvent sur les parties les plus flexibles de la pièce comme par exemple les baignoires d'huile ou les voiles minces qui assurent l'accouplement entre le carter-cylindres et la boîte de vitesses.

Son principal avantage par rapport à des méthodes plus évoluées est de ne faire appel qu'à la matrice de souplesse du superélément. Une fois celle-ci obtenue, l'influence des paramètres d'usinage (trajectoire, géométrie de coupe, diamètre de la fraise) peut être visualisée instantanément au moyen d'une *carte de broutement*, qui indique la profondeur de passe limite en chaque noeud de la surface usinée. Lors de la phase de conception d'une gamme d'usinage, un tel outil d'analyse permet à la fois de mettre en évidence les éventuels problèmes de broutement et de dégager des solutions possibles.

- ● -

Parallèlement aux développements théoriques, un logiciel de simulation, appelé FEMS (Finite Element Machining Simulation), a été écrit. A partir d'un modèle d'éléments finis standard (SAMCEF ou NASTRAN), il permet de réaliser toutes les étapes de la modélisation depuis la création de groupes de noeuds jusqu'à l'analyse des résultats. Un soin particulier a été apporté à la convivialité, à la rapidité et au développement de fonctions adaptées à ce type de simulation. Le logiciel est actuellement en phase de déploiement chez nos deux partenaires industriels, RENAULT (*Powertrain Division*, Rueil-Malmaison, Paris) et ACI (Auto-Chassis International, Le Mans). Un tel logiciel constitue la base idéale pour intégrer de futurs développements en simulation de l'usinage.

- ● -

A ce stade, nous avons intégré deux aspects très importants de l'usinage, ce qui couvre déjà un large éventail des problèmes rencontrés. En effet, les déformations de la pièce et du système de fixation sont *systématiques*, en ce sens qu'elles se produisent pour toutes les opérations d'usinage. Néanmoins, au cours de la recherche, d'autres problèmes ont été identifiés : les déformations d'outils, les problèmes thermiques et les problèmes de contraintes résiduelles.

Pour élargir le champ d'application du logiciel développé, l'extension la plus immédiate consisterait à introduire l'outil et la broche dans le système étudié. Dans la plupart des cas, leur flexibilité peut être prise en compte avec des modèles de poutres. Pour les broches, dont le comportement est généralement non-linéaire [pru93a, pru93b], il suffirait de déterminer *a priori* l'évolution du déplacement et de la rotation en bout de broche en fonction de la charge. Pour les *usinages intérieurs* (barres-à-aléser, outils d'alésage au grain), la prise en compte de la flexibilité de l'outil s'avère indispensable dans les problèmes de broutement.

En ce qui concerne les déformations thermiques, leur prise en compte est nécessaire pour le traitement des pièces en alliage d'aluminium, au moins dans les deux situations suivantes : lorsque la pièce reste sur le même montage pendant un certain nombre d'opérations et lorsqu'elle est arrosée pour être portée à la température de référence. Dans les deux cas, un simple calcul thermique en *stationnaire* devrait permettre d'obtenir de bons résultats. Notons que l'introduction d'une distribution de températures équivaut à la définition de charges nodales qui peuvent être condensées dans le superélément, ce qui permet d'adopter le même schéma de résolution que celui présenté dans ce travail.

Pour modéliser plus finement les problèmes de vibration auto-excitée, on pourrait utiliser un superélément dynamique à la place du superélément statique. Dans ce cas, la matrice de masse de la structure est condensée de la même manière que la matrice de raideur, ce qui permettrait de calculer les modes et les fréquences propres de la pièce et de s'affranchir des approximations que nous avons adoptées.

Enfin, il serait intéressant de pouvoir prendre en compte les contraintes résiduelles qui, pour certaines applications, ont une influence notable sur le défaut. Ce développement est sans conteste le moins évident à réaliser car il se heurte à un certain nombre de difficultés : d'une part, la détermination *numérique* de la forme du champ de contraintes résiduelles et de son amplitude est très ardue, spécialement pour celles engendrées par la coupe; d'autre part, leur mesure expérimentale est difficile; enfin, il n'existe pas, à notre connaissance, de travaux portant sur l'effet d'un champ de contraintes déséquilibré (par l'enlèvement de matière dû à l'usinage) sur les déformations d'une pièce. Dès lors, le travail à accomplir est très conséquent.

Références

- [alt04] Altintas Y., *Modeling Approaches and Software for Predicting the Performance of Milling Operations at MAL-UBC*, Manufacturing Automation Laboratory, University of British Columbia, www.mech.ubc.ca/~mal, **2004**
- [ant96] Anthony G. T., Anthony H. M., Bittner B., Butler B.P., Cox M. G., Drieshner R., Elligsen R., Forbes A. B., Gross H., Hannaby S. A., Harris P. M., Kok J., *Reference Software for Finding Chebyshev Best-fit Geometric Elements*, Precision Engineering, volume 19, pages 28-36, **1996**
- [bar99] Barlier C., Poulet B., *Productique mécanique*, collection Mémotech, éditions Casteilla, Paris, **1999**
- [bel02] Belluco W., *Etude vibratoire ligne d'usinage carter-cylindres moteur F (fraisage d'ébauche face 500)*, Rapport interne RENAULT, **2002**
- [bel03] Belluco W., *Procédé d'usinage d'une face de carter et outil pour la mise en oeuvre d'un tel procédé*, patent request 03 12 014, request date 09.29.2003, INPI, France, **2003**
- [ber65] Berezin I. S., Zhidkov N.P., *Computing Methods*, volume 1, Pergamon Press, Oxford, **1965**
- [bim94] Bimschas K., *Verbesserung der Werkstückqualität durch Simulation des Bearbeitungsprozesses*, Thèse de doctorat, PTW Darmstadt, Carl Hanser Verlag, München, **1994**
- [bou88] Bourdet P., Clément A., *A Study of Optimal-Criteria Identification Based on the Small-Displacement Screw Model*, Annals of the CIRP, volume 37/1, pages 503-506, **1988**
- [bra96] Bradford B. C., Dopkin D. P., Huhdanpaa H., *The Quickhull Algorithm for Convex Hulls*, ACM Transactions on Mathematical Software, volume 22/4, pages 469-483, **1996**
- [bro64] Brown R. H., Armarego E. J. A., *Oblique Machining with a Single Cutting Edge*, International Journal of Machine Tool Design and Research, volume 4, pages 9-25, **1964**
- [bud95] Budak, E., Altintas, Y., *Modelling and Avoidance of Static Form Errors in Peripheral Milling of Plates*, International Journal of Machine Tools and Manufacture, volume 35/3, pages 459-476, **1995**
- [car95] Carr K., Ferreira P., *Verification of Form Tolerances (part I and II)*, Precision Engineering, volume 17, pages 131-156, **1995**
- [cet04] CETIM, Centre Technique des Industries Mécaniques, www.cetim.fr, **2004**

- [che79] Chevalier A., Bohan J., *Guide du technicien en productique*, Hachette Technique, **1979**
- [cri04] CRIF, Centre de support technologique auprès des entreprises, www.crif.be, **2004**
- [cut04] CutPro, Machining Process Simulation Software, www.malinc.com, **2004**
- [dan04] Danobat, *Machine Tool Company*, Espagne, www.danobat.com, **2004**
- [deb94] Debongnie J.-F., *Prévisions analytique des défauts de forme en chariotage*, rapport interne LMF/D37, **1994**
- [deb95] Debongnie J.-F., *Effet de la souplesse de la contre-pointe sur le défaut de cylindricité des pièces tournées*, rapport interne LMF/D38, **1995**
- [deb98] Debongnie J.-F., Masset L., *Sur l'évaluation des défauts de forme à partir de mesures tridimensionnelles*, *European Journal of Mechanical and Environmental Engineering*, volume 43/1, pages 13-21, **1998**
- [deb99] Debongnie J.-F., Masset L., *Controlling Form Errors From 3D Measures*, Proceedings of the 1999 ASME Design Engineering Technical Conferences, Las Vegas Nevada, 12-15 september **1999**
- [deb04] Debongnie J.-F., Communication de l'auteur, Université de Liège, **2004**
- [elb94] Elbestawi M. A., Ismail F., Du R., Ullagaddi B. C., *Modelling Machining Dynamics Including Damping in the Tool-Workpiece Interface*, *Engineering for industry*, volume 116, pages 435-439, **1994**
- [ern38] Ernst H., *Physics of Metal Cutting*, *Machining of Metals*, American Society of Metals, Metals Park, Ohio, **1938**
- [ete90] Etesami F., Qiao H., *Analysis of Two-Dimensional Measurement Data for Automated Inspection*, *Journal of Manufacturing System*, volume 9, pages 21-34, **1990**
- [fen91] Feng S. C., Hopp T. H., *A Review of Current Geometric Tolerancing Theories and Inspection Data Analysis Algorithms*, NISTIR 4509, National Institute of Standards and Technology, **1991**
- [fu84] Fu H. J., De Vor R. E., Kapoor S. G., *A Mechanistic Model for the Prediction of the Force System in Face Milling Operation*, *ASME Journal of Engineering for Industry*, volume 106, pages 81-88, **1984**
- [goc90] Goch G., *Efficient Multi-Purpose Algorithm for Approximation and Alignment Problems in Coordinate Measurement Techniques*, *Annals of the CIRP*, volume 39/1, pages 553-556, **1990**
- [gu91] Gu F. M., Kapoor S. G., De Vor R. E., Bandyopadhyay P., *An Approach to On-Line Cutter Runout Estimation in Face Milling*, *Transactions of NAMRI/SME*, volume 19, pages 240-247, **1991**

- [gu97] Gu F., Melkote S. N., Kapoor S. G., Devor R. E., *A Model for the Prediction of Surface Flatness in Face Milling*, ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering, volume 119, pages 476-484, **1997**
- [hac71] Hacques G., *Algorithmique numérique*, Colin, Paris, **1971**
- [har04a] Harmonizer, Chatter Analysis Software, Manufacturing Laboratory Inc., Las Vegas, Nevada, www.mfg-labs.com/Harmonizer, **2004**
- [har04b] Harwell Subroutine Library (HSL Archive), www.cse.clrc.ac.uk/nag/hsl, **2004**
- [har73] Hartig E., *Versuche Ueber Leistung und Arbeitsverbrauch der Werkzeugmaschinen*, **1873**
- [iwa84] Iwata K., Osakada K., Terasaka Y., *Process Modeling of Orthogonal Cutting by the Rigid-Plastic Finite Element Method*, ASME Journal of Engineering Material Technology, volume 106, pages 132-138, **1984**
- [jac92] Jacob J., Malesson Y., Ricque D., *Guide pratique de l'usinage*, Hachette Technique, **1992**
- [kak93] Kakade N. N., Chow J. G., *Finite Element Analysis of Engine Bore Distortions During Boring Operation*, ASME Journal of Engineering for Industry, volume 115, pages 379-384, **1993**
- [kan93] Kanada T., Suzuki S., *Application of Several Computing Techniques for Minimum Zone Straightness*, Precision Engineering, volume 15, pages 274-280, **1993**
- [kon73] König W., Essel K., *Spezifische Schnittkraftwerte für die Zerspanung Metallischer Werkstoffe*, Verlag, **1973**
- [kop93] Kops L., Gould M., Mizrach M., *Improved Analysis of the Workpiece Accuracy in Turning, Based on the Emerging Diameter*, Engineering for industry, volume 115, pages 253-257, **1993**
- [lai00] Lai H. Y., Jywe W. Y., Chen C. K., Liu C. H., *Precision Modeling of Form Errors for Cylindricity Using Genetic*, Precision Engineering, volume 24, pages 310-319, **2000**
- [lap04] LAPACK, *Linear Algebra PACKage*, www.cs.colorado.edu, **2004**
- [lee51] Lee E. H., Shaffer B. W., *The Theory of Plasticity Applied to a Problem of Machining*, ASME Journal of Applied Mechanics, volume 18, pages 405-412, **1951**
- [lia00] Liao G. Y., *Simulation of Engine Deck Face Distorsion During Fixturing and Milling Operations*, SAE Technical Paper 01-1287, **2000**
- [loe54] Loewen E. G., Shaw M. C., *On the Analysis of Cutting Tool Temperatures*, ASME Transactions, volume 76, pages 217-231, **1954**
- [lon85] Longeot H., Jourdan L., *Fabrication industrielle*, page 124, éditions Bordas, **1985**
- [mas86] Massonnet C., Cescotto S., *Mécanique des matériaux*, Editions H. Dessain, Sciences et Lettres, Liège, **1986**

- [mas99] Masset L., Debongnie J.-F., Foreau S., Dumont T., *A Model for the Prediction of Form Errors in Face Milling and Turning*, Proceedings of the 1999 ASME Design Engineering Technical Conferences, Las Vegas Nevada, 12-15 september, **1999**
- [mas01a] Masset L., *Simulation of Face Milling and Turning with the Finite Element Method*, International Journal of Forming Processes, volume 4/3-4, pages 481-498, **2001**
- [mas01b] Masset L., Debongnie J.-F., Beckers P., *Face Milling and Turning Simulation with the Finite Element Method*, Proceedings of fourth international ESAFORM Conference on Material Forming, Liège, pages 627-630, 23-25 avril **2001**
- [mas02] Masset L., Debongnie J.-F., *Machining Process Simulation: Specific Finite Element Aspects*, Proceedings of the Second International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering (ACOMEN), Liège, 28-31 mai **2002**
- [mas03a] Masset L., Debongnie J.-F., Berger F., *Solving Problems with Contact in Machining Process Simulation*, Proceedings of sixth International ESAFORM Conference on Material Forming, Salerno, pages 555-558, 28-30 april **2003**
- [mas03b] Masset L., Debongnie J.-F., *Machining Processes Simulation: Specific Finite Element aspects*, Journal of Computational and Applied Mathematics, article accepté en **2003**
- [mas04] Masset L., Belluco W., *Chatter Maps for product and Process Design of Automotive Parts*, Proceedings of the 7th CIRP International Workshop on Modeling of Machining Operations, ENSAM, Cluny, Burgundy, France, May 4-5, **2004**
- [may00] Mayer J.R., Phan A.-V., Cloutier G., *Prediction of Diameter Errors in Bar Turning: A Computational Effective Model*, Applied Mathematical Modeling, volume 24, pages 943-956, **2000**
- [mcm04] MCM, *Machining Centers Manufacturing spa*, Italie, www.mcmspa.it, **2004**
- [mer44] Merchant M. E., *Basic Mechanics of the Metal Cutting Process*, ASME Journal of Applied Mechanics, volume 11, pages A168-A175, **1944**
- [mer45] Merchant M. E., *Mechanics of the Metal Cutting Process in Orthogonal Cutting of a Type 2 Chip*, Journal of Applied Physics, volume 16, pages 267-275, **1945**
- [mer65] Merritt H. E., *Theory of Self-Excited Machine-Tool Chatter: Contribution to Machine-Tool Chatter Research*, ASME Journal of Engineering for Industry, volume 87, pages 447-454, **1965**
- [mer01] Merken P., *Erreur de sphéricité, mesure et calcul*, travail de fin d'études, Université de Liège, **2001**
- [mur80] Murthy T. S. R., Abdin S. Z., *Minimum Zone Evaluation of Surfaces*, International Journal of Machine Tool Design and Research, volume 20, pages 123-136, **1980**
- [nel65] Nelder J. A., Mead R., *A Simplex Method for Function Minimization*, Computer Journal, volume 7 n°4, pages 308-313, **1965**

- [nic04] Nicolás Correa Machine Tools, Espagne, www.correa.es, **2004**
- [nov97] Novaski O., Chautard Barczak A. L., *Utilization of Voronoi Diagrams for Circularity Algorithms*, Precision Engineering, volume 20, pages 188-195, **1997**
- [oxl89] Oxley P. L. B., *The Mechanics of Machining*, Editions Ellis Horwood, Chichester, **1989**
- [pal59] Palmer W. B., Oxley P. L. B., *Mechanics of Orthogonal Machining*, Proceedings of Inst. Mechanical Engineering, volume 173, pages 623-654, **1959**
- [pau96] Pauly P., *Etablissement d'algorithmes d'erreurs de forme et de position*, travail de fin d'études, Université de Liège, **1996**
- [pii37] Piispanen V., *Lastunmuodostumisen Teoriaa*, Teknillinen Aikakauslehti, volume 27, pages 315-322, **1937**
- [pru93a] Pruvot F., *Conception et calcul des machines-outils*, volume 1, *Généralités, morphologie, plan général*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, **1993**
- [pru93b] Pruvot F., *Conception et calcul des machines-outils*, volume 2, *Les broches : études cinématique et statique*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, **1993**
- [qhu04] Qhull software, The Geometry Center, University of Minnesota, www.geom.uiuc.edu/locate/qhull, **2004**
- [ren98] Simulation numérique de l'usinage, Contrat de recherche en collaboration avec la firme RENAULT, Beckers P., Debongnie J.-F., Deltour B., Masset L., 12 rapports, **1995-1998**
- [reu00] Reuleaux F., *Über den Taylor Whiteschen Werkzeugstahl*, Verein zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preussen, Sitzungsberichte, volume 79, page 179, **1900**
- [sam04] SAMCEF, *Système d'Analyse des Milieux Continus par la méthode des Eléments Finis*, www.samcef.com, **2004**
- [san04] Sandvik-Coromant, *Tool Supplier*, Suède, www.coromant.sandvik.com, **2004**
- [sch93] Schulz H., Bimschas K., *Optimization of Precision Machining by Simulation of the Cutting Process*, Annals of the CIRP, volume 42/1, pages 55-58, **1993**
- [sch94] Schulz H., Glockner K., *Simulation of the Deflection of Workpieces Due to the Cutting Forces*, Final report, RENAULT, **1994**
- [sec04] Seco Tools, Tool Supplier, www.secotools.com, **2004**
- [seg01] Segreti M., Moufki A., Dudzinski D., Molinari A., *Modelling of Non-Linear Vibrations in Orthogonal Cutting*, Proceedings of the 4th International ESAFORM Conference on Material Forming, volume 2, pages 647-650, **2001**
- [sha52] Shaw M. C., Cook N. H., Smith P. A., *The Mechanics of Three-Dimensional Cutting Operations*, ASME Transactions, volume 74, pages 1055-1064, **1952**

- [sha84] Shaw M. C., *Metal Cutting Principles*, Oxford University Press, **1984**
- [shu87] Shunmugam M. S., *New Approach for Evaluating Form Errors of Engineering Surfaces*, Computer-Aided Design, volume 19, pages 368-374, **1987**
- [sou40] Manuel pour l'usage du tour, South Bend Lathe Works, Indiana, USA, **1940**
- [sta51] Stabler G., *The Fundamental Geometry of Cutting Tools*, Proceedings of Inst. Mechanical Engineering, volume 165, pages 14-21, **1951**
- [ste91] Stephenson D. A., *Assessment of Steady-State Metal Cutting Temperature Models Based on Simultaneous Infrared and Thermocouple Data*, ASME Journal of Engineering for Industry, volume 113, pages 121-128, **1991**
- [ste95] Stephenson D. A., Bandyopadhyay P., *Process Independent Force Characterization for Machining Simulation*, Concurrent Product and process Engineering, ASME DE volume 85, pages 15-36, **1995**
- [ste97] Stephenson D. A., Agapiou J. S., *Metal Cutting Theory and Practice*, Editions Marcel Dekker, New York, **1997**
- [str85] Strenkowski J. S., Carroll J. T., *A Finite Element Model of Orthogonal Metal Cutting*, ASME Journal of Engineering for Industry, volume 107, pages 349-354, **1985**
- [str90] Strenkowski J. S., Moon K. J., *Finite Element Prediction of Chip Geometry and Tool/Workpiece Temperature Distributions in Orthogonal Metal Cutting*, ASME Journal of Engineering for Industry, volume 112, pages 313-318, **1990**
- [sub87] Subramani G., Suvada R., Kapoor S. G., DeVor R. E., *A Model for the Prediction of Force System for Cylinder Boring Process*, Proceedings NAMRC, volume 15, pages 439-446, **1987**
- [sub93] Subramani G., Kapoor S. G., DeVor R. E., *A Model for the Prediction of Bore Cylindricity During Machining*, ASME Journal of Engineering for Industry, volume 115, pages 15-22, **1993**
- [thi04] Third Wave AdvantEdge, Engineering Analysis and Simulation Software Products for Metal Cutting Industry, www.thirdwavesys.com, **2004**
- [tlu57] Tlustý J., Poláček M., *Beispiele der Behandlung der Selbsterregten Schwingung der Werkzeugmaschinen*, Proceedings 3rd Fo Ko Co, Vogel Verlag Wuerzburg, **1957**
- [tlu99] Tlustý J., *Manufacturing Processes and Equipment*, Prentice Hall, New Jersey, **1999**
- [tra89] Traband M. T., Joshi S., Wysk R. A., Cavalier T. M., *Evaluation of Straightness and Flatness Tolerances Using the Minimum Zone*, Manufacturing Review, volume 2, pages 189-195, **1989**
- [tre73] Tresca H., *Mémoire sur le rabotage des métaux*, Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale, **1873**

- [tri51] Trigger K. J., Chao B. T., *An Analytical Evaluation of Metal Cutting Temperatures*, ASME Transactions, volume 73, pages 57-68, **1951**
- [zor66] Zorev N. N., *Metal Cutting Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, **1966**

Table des matières

Introduction	3
Chapitre 1 : Exposé du problème	6
1.1. Historique de la machine-outil	7
1.2. Aspects technologiques	9
1.2.1. Interactions pièce-outil-machine	9
1.2.2. Tournage, fraisage, alésage	10
1.2.3. Prise de pièce	16
1.2.4. Géométrie de coupe	18
1.2.5. Erreur de forme	22
1.2.6. Gamme d'usinage	23
1.3. La coupe des métaux	24
1.3.1. Formation du copeau	24
1.3.2. Modélisation de la coupe orthogonale	26
1.3.3. Complexité de la modélisation de la coupe	29
1.4. Conception de gammes d'usinage	33
1.4.1. Outils d'aide à la conception	33
1.4.2. Erreurs géométriques	34
1.4.3. Problèmes dynamiques	36
Chapitre 2 : Modélisation	39
2.1. Modélisation du défaut d'usinage	40
2.1.1. Revue de la littérature	40
2.1.2. Discussion	42
2.1.3. Méthode proposée	46
2.1.4. Limitations du modèle	47
2.2. Modélisation de la prise de pièce	50
2.2.1. Modèle linéaire	50
2.2.2. Modèle avec contacts	51
2.3. Calcul des forces de coupe	53
2.3.1. Exposé du problème	53
2.3.2. Modèle de Kienzle	55

2.3.3. Modèle de Gu <i>et al.</i>	57
2.3.4. Détermination des paramètres du modèle de Gu <i>et al.</i>	59
2.3.5. Discussion	62
2.4. Application des forces de coupe	67
2.4.1. Positions de coupe	67
2.4.2. Positions de l'outil en tournage	68
2.4.3. Positions de l'outil en fraisage	69
2.4.4. Positions de l'outil en alésage au grain	73
2.4.5. Répartition des forces de coupe	74
2.5. Recoupe de la fraise	80
2.5.1. Dépincage de la fraise	80
2.5.2. Modélisation de la recoupe	81
Chapitre 3 : Développement d'un code de calcul opérationnel	85
3.1. Méthodes standard	86
3.1.1. Introduction	86
3.1.2. Résolution	89
3.2. Méthode du superélément	90
3.2.1. Principe	90
3.2.2. Création du superélément	91
3.2.3. Résolution du système réduit	91
3.3. Outils de résolution spécifiques	92
3.3.1. Conditions aux limites	92
3.3.2. Problème linéaire	94
3.3.3. Problème avec contacts	95
3.3.4. Discussion	97
Chapitre 4 : Exploitation des résultats	100
4.1. Position du problème	101
4.1.1. Introduction	101
4.1.2. Définition des erreurs géométriques	103
4.1.3. Revue de la littérature	106
4.2. Méthodes géométriques	107
4.2.1. Enveloppe convexe	107
4.2.2. Diagrammes de Voronoï	109
4.2.3. Discussion	114
4.3. Méthodes de minimisation	115
4.3.1. Formulation mathématique du problème	115
4.3.2. Méthode des moindres carrés	120
4.3.3. Méthode basée sur le gradient	123
4.3.4. Méthode du simplexe	124

4.4. Minimisation des normes p	125
4.4.1. Définitions et propriétés	125
4.4.2. Principe	127
4.4.3. Mise en oeuvre	128
4.4.4. Discussion	130
Chapitre 5 : Modélisation du broutement	132
5.1. Exposé du problème	133
5.1.1. Diagrammes de stabilité	133
5.1.2. Système à un degré de liberté	135
5.1.3. Modèle de Tlusty	137
5.2. Modélisation du broutement de la pièce	141
5.2.1. Cartes de broutement	141
5.2.2. Méthode de calcul	144
5.2.3. Discussion	148
Chapitre 6 : Applications	150
6.1. Description du logiciel développé	151
6.2. Chariotage d'un barreau	152
6.2.1. Présentation	152
6.2.2. Modélisation et simulation	153
6.2.3. Effet de l'enlèvement de matière	155
6.3. Carter de boîte de vitesses	157
6.3.1. Présentation	157
6.3.2. Résultats	158
6.4. Collecteur d'échappements	160
6.4.1. Présentation	160
6.4.2. Modélisation et calculs	161
6.4.3. Influence de l'outil	162
6.4.4. Influence de la trajectoire	164
6.4.5. Influence du bridage	165
6.5. Disques de freins	168
6.5.1. Présentation	168
6.5.2. Modélisation et calculs	169
6.5.3. Prise de pièce non-déformante	173
6.6. Tambour de frein	174
6.6.1. Présentation	174
6.6.2. Modélisation	174
6.6.3. Intégration des mors dans le modèle	176

6.7. Fraisage d'ébauche de carters-cylindres	178
6.7.1. Présentation	178
6.7.2. Cartes de broutement	178
6.7.3. Solution du problème de broutement	180
6.7.4. Amélioration des paramètres d'usinage	181
Conclusion	184
Références	187
Table des matières	194